Chapitre 1

1. Définitions

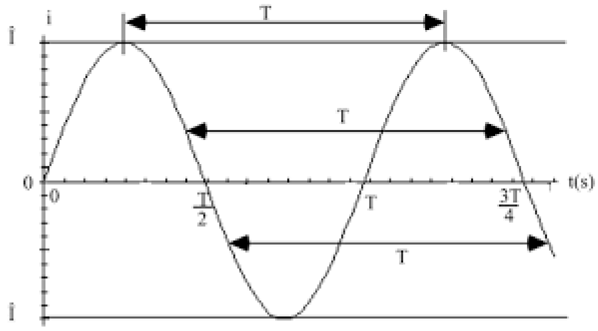
Un phénomène est dit périodique dans le temps, s'il se répète identiquement a lui-même a des intervalles de temps successif égaux. La durée de temps est notée T et généralement notée en second (sec).

La fréquence représente le nombre de période par unité de temps ($f = \frac{1}{T}$), l'unité de : ($f = \frac{1}{s} = s^{-1} = Hz$).

2. Fonction périodiques

La fonction F(t) est une fonction périodique de période T alors :

$$F(t) = F(t+T) = F(t+2T) = \cdots = F(t+nT)$$



La valeur moyenne d'une fonction périodique est donnée par la formule suivante $F_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$

La valeur efficace d'une fonction périodique est donnée par la formule suivante $F_{eff} = \frac{1}{T}\int_0^T F^2(t)dt$

3. Mouvement harmonique

3.1. Définitions

Le mouvement harmonique est un phénomène périodique dont la variation écrite par une fonction sinusoïdale $x = a\, cons(\omega t + \varphi)$ avec

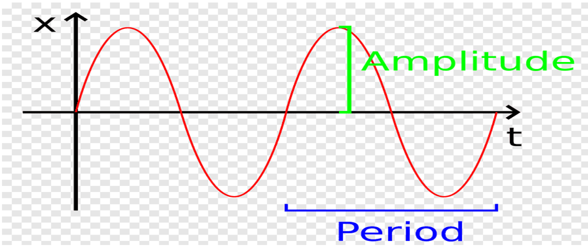
x : coordonnée généralisée

a : amplitude, valeur maximale de x

ω : pulsation ou vitesse angulaire

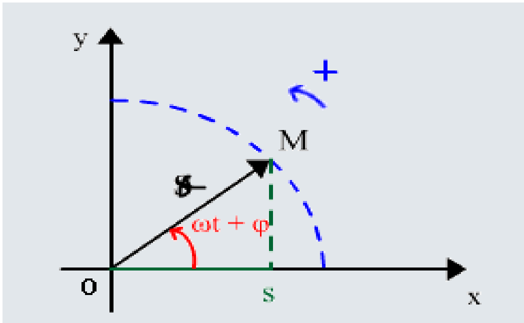
φ : phase initiale a $t = t_0$

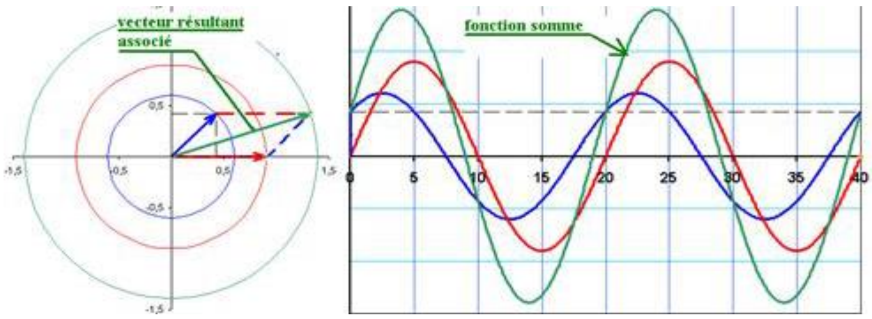
x est périodique de $2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$



3.2. Représentation de Fresnel

Le mouvement harmonique peut être considéré comme le mouvement de la projection sur un diamètre d'un point M ayant un mouvement circulaire ω sur un cercle de rayon a





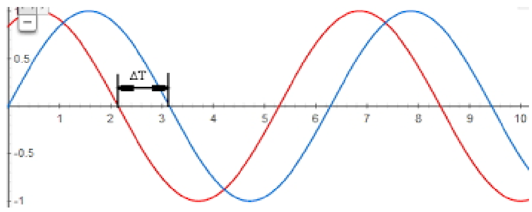
3.3. Déphasage est retard

Soit deux mouvements harmoniques de même période (pulsation)

$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

La différence de phase ou déphasage est donnée par $\Delta\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$

Si $\varphi_2 > \varphi_1$ on dit que x_1 est en retard par rapport à x_2 de $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$



2. Composition de mouvement harmonique

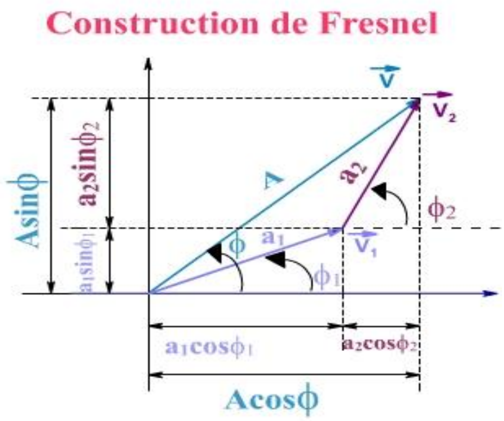
Dans cette section, nous considérons un mouvement de même période et de même direction. Soit $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Le mouvement résultant $x = x_1 + x_2$ peut être déterminé per deux méthodes.

a. Méthode de Fresnel

À partir de l'image de construction, on peut écrire

$$tg\,\varphi = \frac{a_1\, sin\, \varphi_1 + a_2\, sin\, \varphi_2}{a_1\, cos\, \varphi_1 + a_2\, cos\, \varphi_2}$$

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \Rightarrow (\vec{V})^2 = (\vec{V_1} + \vec{V_2})^2 = (\vec{V_1})^2 + (\vec{V_2})^2 + 2\,\vec{V_1}\,\vec{V_2} \Rightarrow a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\, a_2\, cos\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$



b. méthode trigonométrique

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$
$$= a_1 \cos \omega t \cos \varphi_1 - a_1 \sin \omega t \sin \varphi_1 + a_2 \cos \omega t \cos \varphi_2 - a_2 \sin \omega t \sin \varphi_2$$

$$= \cos \omega t\, [a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2] - \sin \omega t\, [a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2]$$

alors $x = a \cos(\omega t + \varphi) = a \cos \omega t \cos \varphi - a \sin \omega t \sin \varphi$

On aura

$$\begin{cases} a \cos \varphi = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 \ldots\ldots\ldots (1) \\ a \sin \varphi = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 \ldots\ldots\ldots. (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} = tg\varphi = \frac{a_1 \, sin \, \varphi_1 + a_2 \, sin \, \varphi_2}{a_1 \, cos \, \varphi_1 + a_2 \, cos \, \varphi_2}$$

$Et \; (1)^2 + (2)^2 = a^2$

3. Décomposition des fonctions périodiques en série de fourrier

Toutes fonctions périodiques F(t) de période T peut être développée en série de fonctions sinusoïdales $F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cos(n\omega t) + b_n \, sin \, (n\omega t)$

Ou $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) cos \, (n\omega t) dt$

$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) sin \, (n\omega t) dt$

Et $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$:valeur moyenne de F(t).

- ✓ Si F(t) est pair ⇒ $b_n = 0$
- ✓ Si F(t) est impair ⇒ $a_n = 0$

Chapitre 3

Oscillations libres amorties a 1 ddl

1. force et frottement

Dans la réalité, les systèmes en mouvement sont soumis à des forces de frottement qui tendent à amortie le mouvement. On a deux catégories de force de frottement :

- Force de frottement solide : elles sont constantes.
- Force de frottement visqueuse : liées à la vitesse.

Pour les petites oscillations, elles sont inversement proportionnelle à la vitesse : $\vec{F}_v = -\alpha\vec{v}$ avec α présente le coefficient d'amortissement.

2. équation de mouvement

Les oscillations libres amorties à 1ddl sont régie par des équations différentielles de la forme

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

λ facteur d'amortissement$\lambda = f(\alpha)$.

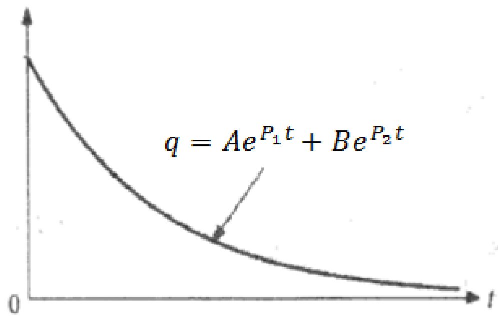
ω_0 pulsation propre du système.

La solution de cette équation dépend su signe de Δ de l'équation caractéristique suivante $P^2 + 2\lambda P + \omega_0^2 = 0$

- Si $\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0$

On a deux racines réels $\begin{cases} P_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} \\ \text{et} \\ P_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} \end{cases}$. La solution est de la forme

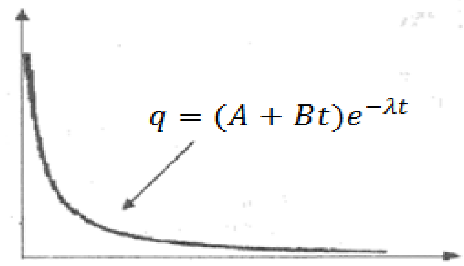
$$q = Ae^{P_1 t} + Be^{P_2 t}$$



Régime apériodique ou fortement amorti

- Si $\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0$

On a une racine double et réel $P = \lambda$. La solution est de la forme $q = (A + Bt)e^{-\lambda t}$

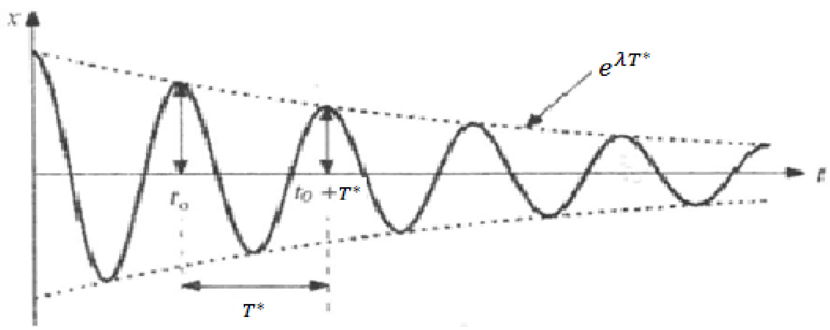


Régime critique

- Si $\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0$ (amortissement faible)

On a deux racines complexes $\begin{cases} P_1 = -\lambda - j\sqrt{\Delta'} \\ \quad\quad \text{et} \\ P_2 = -\lambda + j\sqrt{\Delta'} \end{cases}$. La solution est de la forme

$q = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$ avec C et φ sont des constantes



Régime oscillatoire amorti ou pseudopériodique

3. grandeurs caractéristiques

a. décrément logarithmique

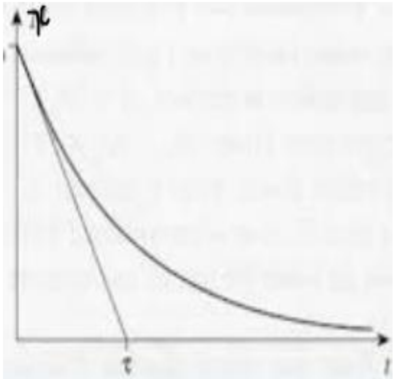
Pour le régime pseudo périodique, on le définie comme le logarithme du rapport de amplitudes successives :

$$\delta = \log\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+T^*)}} = e^{\lambda T^*}$$

b. constante de temps

C'est le temps nécessaire pour que l'amplitude soit réduite par $\frac{1}{e}$

$$\frac{Ce^{-\lambda(t+\tau)}}{Ce^{-\lambda t}} = \frac{1}{e} \Rightarrow e^{-\lambda\tau} = e^{-1} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}$$



4. exemple

a. système masse-ressort-amortisseur

- état d'équilibre

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{F_0} = \vec{0} \Rightarrow mg - kx_0 = 0$$

- Etat de mouvement

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{x}} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F} + \overrightarrow{F_\alpha} = m\ddot{\vec{x}}$$

Par projection sur l'axe (xx'), on a :

$$mg - k(x_0 + x) - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

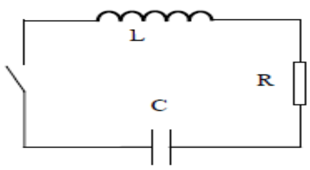
$$-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Avec

$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b. circuit RLC



Loi de Kirchoff

$$\sum U_i = 0 \Rightarrow U_C + U_L + U_R = 0$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + L\,\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$i = \frac{dq}{dt}$, $\ddot{q} = \frac{di}{dt}$, $\int i\,dt = q$

Donc

$$\frac{1}{C}q + L\ddot{q} + R\dot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Avec

$\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

5. Analogie électromécanique

Translation	**Rotation**	**Electricité**
Déplacement x	Angle θ	Charge q
Vitesse $\dot{x}$	Vitesse angulaire $\dot{\theta}$	Courant $i = \dot{q}$
Masse m	Moment d'inertie J	Bobine L
Coeff. D'amorti α	Coeff. Moment. D'amorti α	Résistance R
Raideur k	Constante de tension C	Inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
Force $\vec{F}$	Moment $\vec{\mu}$	Tension U
$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$	$J\ddot{\theta} + \mu(\alpha)\dot{\theta} + C\,\theta = 0$	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$

6. Equation de LaGrange

Pour un système libre amortie, l'équation de LaGrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) - \frac{dL}{dq} = -\frac{dD}{d\dot{q}}$$

q coordonnée.

D fonction ou énergie de dissipation, pour une amortisseur de constante α : $D = \frac{1}{2}\alpha v^2$ pour une résistance $D = \frac{1}{2}Ri^2$

Chapitre 6

Système a plusieurs degrés de liberté

Les systèmes a plusieurs d d l sont des systèmes décrit par plusieurs coordonnées généralise. Le nombre de cas coordonnées correspond au nombre de d d l. Ces systèmes sont la réunion de sous-systèmes de 1 d d l dont les mouvements influent les uns sur les autres on dit qu'ils sont couplés.

I Système à 2 d d l

Equation de mouvement

L'équation du mouvement est donnée par l'expression suivante :

$$\ddot{q}_1 + 2\,\lambda_1\,\dot{q}_1 + {\omega_1}^2 q_1 = a_1 q_2 + b_1\,\dot{q}_2 + c_1 \ddot{q}_2$$

$$\ddot{q}_2 + 2\,\lambda_2\,\dot{q}_2 + {\omega_2}^2 q_2 = a_2 q_1 + b_2\,\dot{q}_1 + c_2 \ddot{q}_1$$

Avec

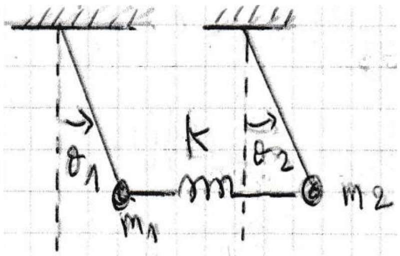
q_1 et q_2 dénote les coordonnées généralisées

λ_1 et λ_2 présent les coefficient d'amortissement des systèmes découplés.

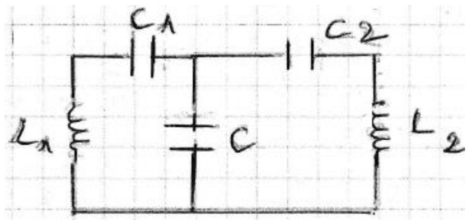
ω_1 et ω_2 pulsation propre des systèmes découplés.

a_1 , a_2, b_1 , b_2 , c_1, c_2 coefficient de couplage.

- Si $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0 \Longrightarrow$ couplage elastique

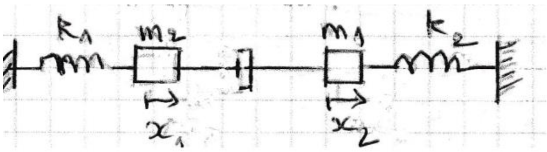


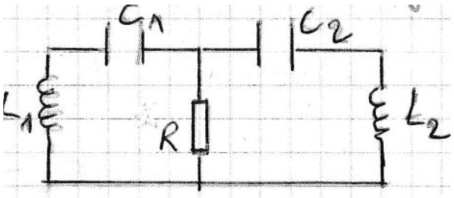
Système



Circuit électrique équivalent

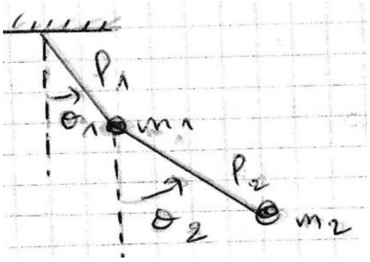
- Si a_1= $a_2 = c_1 = c_2 = 0 \Longrightarrow$ couplage visqueuse

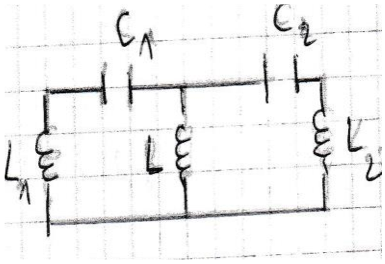




Système Circuit électrique équivalent

- Si a_1= $a_2 = b_1 = b_2 = 0 \Longrightarrow$ couplage par inertie

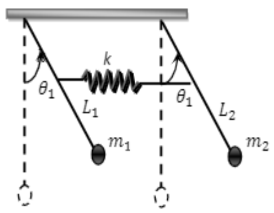




Système Circuit électrique équivalent

II Système libre non amortie avec couplage élastique

L'équation du mouvement est donnée par la formule suivante



$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + {\omega_1}^2 x_1 = a_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + {\omega_2}^2 x_2 = a_2 x_1 \end{cases}$$

Pour résoudre le système, on écrit les solutions sous la forme suivantes

$x_1 = A_1 \cos\ (\Omega t + \varphi_1) \underset{R.C}{\longrightarrow} \bar{x}_1 = A_1\ e^{\ (\Omega t + \varphi_1)} = \bar{A}_1\, e^{\Omega\, t}$ avec $\bar{A}_1\ = A_1\ e^{\ \varphi_1}$

et

$x_2 = A_2 \cos\ (\Omega t + \varphi_2) \underset{R.C}{\longrightarrow} \bar{x}_2 = A_2\ e^{\ (\Omega\, t + \varphi_2)} = \bar{A}_2\, e^{\Omega\, t}$ avec $\bar{A}_2\ = A_2\ e^{\ \varphi_2}$

Ou Ω dénote la pulsation propre du système couplé $\Omega = f(\omega_1, \omega_2)$.

On dérive $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ et on remplace dans l'équation du système, on obtient

$$\begin{cases} ({\omega_1}^2 - \Omega^2)\bar{A}_1 - a_1\bar{A}_2 = 0 \\ -a_2\bar{A}_1 + ({\omega_2}^2 - \Omega^2)\bar{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant

$$\det\begin{vmatrix} ({\omega_1}^2 - \Omega^2) & -a_1 \\ -a_2 & ({\omega_2}^2 - \Omega^2) \end{vmatrix} = ({\omega_1}^2 - \Omega^2)({\omega_2}^2 - \Omega^2) - a_1a_2$$

On a deux cas

- Si $\det \neq 0$, par la methode de cramer rao, on a

$$\bar{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a_1 \\ 0 & ({\omega_2}^2 - \Omega^2) \end{vmatrix}}{det} = \frac{0}{det} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

et

$$\bar{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} ({\omega_1}^2 - \Omega^2) & 0 \\ -a_2 & 0 \end{vmatrix}}{det} = \frac{0}{det} = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

Donc : système a l'équilibre, pas de vibration.

- $\det = 0$

  On a

$\begin{cases} \bar{A}_1 = \infty \\ \bar{A}_2 = \infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ Cas d'indétermination, il faut résoudre l'équation $det = 0$ pour voir les cas de vibration.

$$\det = 0 \Rightarrow ({\omega_1}^2 - \Omega^2)({\omega_2}^2 - \Omega^2) - a_1a_2 = 0$$

$$\Rightarrow \Omega^4 - ({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2)\Omega^2 + {\omega_1}^2{\omega_2}^2 - a_1a_2 = 0$$

Cette équation est appelée équation aux pulsations propres.