## Chapitre 01 : Résolution approximative des équations non linéaires $f(x) = 0$.

### 1. Introduction :

La résolution des équations non linéaires peut se faire analytiquement pour certains cas simples. Cependant, les méthodes analytiques ne suffisent pas pour résoudre les équations polynomiales de degré élevé (>4) et les équations transcendantes. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour obtenir des solutions approchées. Ce chapitre présente trois techniques : la bisection, Newton-Raphson et le point fixe.

Si $f(x)$ est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, et on cherche à résoudre l'équations $f(x) = 0$, c-à-d, trouver les racines $x_i$ tel que $f(x_i) = 0$. Nous devons garantir d'abord qu'il existe des solutions de $f(x)$ dans cet intervalle. Ensuite, chercher le nombre de solutions possible. Pour pouvoir les déterminer en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire (TVI).

### 2. Théorème de la valeur intermédiaire :

$$\left.\begin{array}{l}\text{-Si } f(x) \text{ est une fonction continue sur un intervalle } [a,b]. \\ \text{-Si } f(a).f(b) < 0.\end{array}\right\} \exists\, c \in [a,b] \text{ tq } f(c) = 0.$$

-Si de plus, $f(x)$ est monotone, alors la solution $c$ est unique.

### 3. Bissection (dichotomie) :

La méthode de la bisection est basée sur la division successive de l'intervalle qui contient la solution jusqu'à atteindre la racine à une précision prés.

A chaque étape, on verifie dans quelle sous-intervalle est située la racine en utilisant le TVI.

#### 3.1. Developpement de la méthode :

1-On devise l'intervalle $[a, b]$ en deux sous-intervalles égales : $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$ avec $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

2-On verifie dans quelle sous-intervalle est située la racine en utilisant le TVI :

$$\begin{cases} Soit\ f(a).f(x_0) < 0, donc\ la\ racine\ est\ située\ dans\ [a, x_0] \\ Soit\ f(x_0).f(b) < 0, donc\ la\ racine\ est\ située\ dans\ [\, x_0, b] \end{cases}$$

-L'intervalle qui vérifie la condition du TVI devient le nouvel intervalle à deviser en deux sous-intervalles et on vérifie de nouveau lequel de ces sous nouvelles intervalles satisfait le TVI.

#### 3.2. Critère d'arrêt :

On répète les étapes 1 et 2, jusqu'à ce que $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon$ est la précision souhaitée, ou bien le nombre d'itérations $n = \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$ soit atteint.

#### 3.3. Exemple :

Nous cherchons à résoudre l'équation $f(x) = \sqrt{x} - \cos(x) = 0$ dans l'intervalle $[0,1]$ à $10^{-1}$ prés en utilisant la méthode de la bissection.

1. Quel est le nombre d'itérations nécessaires.

2. Trouver une approximation de cette solution.

Solution :

1. On a $n = \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(\frac{1-0}{10^{-1}}\right)}{\ln(2)} \simeq 3.32$ , donc on prend $n = 4$ itérations.
2. La solution approximative :

| $n$ | $a$ | $b$ | $c = \frac{a+b}{2}$ | $f(a)$ | $f(b)$ | $f(c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0.5 | -1 | 0.45 | -0.17 |
| 2 | 0.5 | 1 | 0.75 | -0.17 | 0.45 | 0.13 |
| 3 | 0.5 | 0.75 | 0.62 | -0.17 | 0.13 | -0.02 |
| 4 | 0.62 | 0.75 | 0.68 | -0.02 | 0.13 | 0.04 |

La solution approximative est $c \simeq 0.68$.