4. Méthode du point fixe :

Soit une fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$, nous cherchons à résoudre l'équation $f(x) = 0$ en utilisant la méthode du point fixe.
Pour pouvoir utiliser la méthode du point fixe, on doit écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $g(x) = x$ tel que $f(x) = g(x) - x$, par exemple si $f(x) = x^2 - x + 1$, l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ peut se mettre sous la forme : $x^2 + 1 = x$ et dans ce cas là $g(x) = x^2 + 1$.

4.1. Conditions (critères) de convergence :

Le choix de $g(x)$ est basé sur deux conditions (critères) de convergence :

A- $g([a,b]) \in [a,b]$
B- $|g'(x)| < 1$

4.2. Formule récursive :

Si les deux conditions de convergence sont vérifiées, on peut écrire la formule récursive comme suit :

$$\begin{cases} x_0 = donné \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

4.3. Critère d'arrêt :

A chaque itération on calcule x_{n+1} à partir du x_n, on arrête le calcule quand $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, avec ε est la précision souhaitée, ou bien quand le nombre d'itérations demandé est atteint.

4.4. Exemple sur le choix de $g(x)$:

Soit $f(x) = x^2 - 3$ une fonction définie sur $[1,2]$ avec $x_0 = 1.5$ et soit $\varepsilon = 10^{-2}$. Laquelle des fonctions $g(x)$ satisfait les conditions de convergence du point fixe.

A-$g_1(x) = x^2 + x - 3$

B- $g_2(x) = \frac{3}{x}$

C-$g_1(x) = \frac{x+3}{x+1}$

<u>Solution</u> :

A-Vérifions si la condition de convergence $|g_1'(x)| < 1$ est satisfaite :

$|g'_1(x)| = |2x + 1|$, comme $|g'_1(x)|$ est croissante, on vérifie $|g'_1(2)| = 5 > 1$.

Donc la condition de convergence $|g_1'(x)| < 1$ n'est pas satisfaite.

B-Vérifions si la condition de convergence $|g_2'(x)| < 1$ est satisfaite :

$|g'_2(x)| = \left|-\frac{3}{x^2}\right| = \frac{3}{x^2}$, comme $|g'_1(x)|$ est décroissante, on vérifie $|g'_2(1)| = 3 > 1$.

Donc la condition de convergence $|g_2'(x)| < 1$ n'est pas satisfaite.

C-Vérifions si la condition de convergence $|g_3'(x)| < 1$ est satisfaite :

$|g'_3(x)| = \left|-\frac{2}{(x+1)^2}\right| = \frac{2}{(x+1)^2}$, comme $|g'_3(x)|$ est décroissante, on vérifie $|g'_3(1)| = 0.5 < 1$.

Donc la condition de convergence $|g_2'(x)| < 1$ est satisfaite et on peut écrire l'équation de récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_{n+1} = g'_3(x) = \dfrac{x_n + 3}{x_n + 1} \end{cases}$$

On calcule les termes de la suite récursive et à chaque fois on compare l'erreur $|x_{n+1} - x_n|$ avec ε, une fois cette erreur est inférieure à ε, on arrête le calcul.

n	x_n	$\|x_{n+1} - x_n\|$
0	1.500	/
1	1.800	0.3
2	1.714	0.086
3	1.736	0.022
4	1.730	0.006

On a $|x_4 - x_3| = 0.006 < \varepsilon = 0.01$, donc la solution est $x_4 = 1.730$.