5. Méthode du Newton-Raphson :

C'est la méthode la plus simple et la plus rapide en terme de convergence, elle est basée sur le développement en série de Taylor d'une fonction $f(x)$.

Si $f(x)$ est continue et continuellement dérivable au voisinage de x solution de $f(x) = 0$, alors le développement en série de Taylor au voisinage d'une approximation x_0 proche de x est donné par :

$$f(x) = f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) + R$$

x_0 : la première approximation de x la solution de l'équation $f(x) = 0$.

R : le reste qui contient les termes d'ordre supérieur.

Si on néglige R on trouve l'expression suivante :

$$f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) = 0$$

Donc : $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

5.1. Formule récursive :

On peut écrire la formule récursive (l'équation de récurrence) de Newton- Raphson comme suit :

$$\begin{cases} x_0 = donné \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

5.2. Conditions (critères) de convergence :

Pour pouvoir utiliser la méthode de Newton-Raphson, la fonction $f(x)$ doit satisfaire trois conditions :

A- $f(a).f(b) < 0$
B- $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$
C- $f''(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$

5.3. Critère d'arrêt :

A chaque itération on calcule x_{n+1} à partir du x_n, on arrête le calcule quand $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, avec ε est la précision souhaitée, ou bien quand le nombre d'itérations demandé est atteint.

5.4. Exemple

Soit $f(x) = \ln(x) - x^2 + 2$ une fonction définie sur $[0.1,0.5]$. Trouver une approximation de la solution en utilisant la méthode de Newton-Raphson avec $x_0 = 0.3$ et $\varepsilon = 10^{-3}$.

<u>Solution</u> :

$\begin{cases} f(0.1) = -0.31 < 0 \\ f(0.5) = 1.05 > 0 \end{cases}$ donc $f(0.1).f(0.5) < 0$

$f'^{(x)} = \frac{1}{x} - 2x$ on vérifie si $f'^{(x)} = 0$, On pose $\frac{1}{x} = 2x$ et $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \notin [0.1, 0.5]$. Donc $f'(x) \neq 0, \forall x \in [0.1, 0.5]$

$f''^{(x)} = -\frac{1}{x^2} - 2$ on vérifie si $f''^{(x)} = 0$ dans $[0.1, 0.5]$, On pose $\frac{1}{x^2} = -2$ et $x = \pm j\sqrt{\frac{1}{2}} \notin [0.1, 0.5]$. Donc $f''(x) \neq 0, \forall x \in [0.1, 0.5]$.

Donc la condition de convergence $|g_2'(x)| < 1$ est satisfaite et on peut écrire l'équation de récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 = 0.3 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{\ln(x_n) - x_n^2 + 2}{\dfrac{1}{x_n} - 2x_n} \end{cases}$$

On calcule les termes de la suite récursive et à chaque fois on compare l'erreur $|x_{n+1} - x_n|$ avec ε, une fois cette erreur est inférieure à ε, on arrête le calcul.

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	0.3	/
1	0.0416	0.2584
2	0.0910	0.0494
3	0.1285	0.0375
4	0.1376	0.0091
5	0.1379	0.0003

On a $|x_5 - x_4| = 0.0003 < \varepsilon = 0.001$, donc la solution est $x_5 = 0.1379$