Introduction générale

La Recherche Opérationnelle (RO) peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèse des phénomènes de management du système d'information utilisables pour élaborer de meilleures décisions. Elle propose des modèles conceptuels pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire les choix les plus efficaces.
La recherche opérationnelle (RO) est une discipline carrefour entre :

— L'économie : modèle initial généralement issue de la vie économique (économie d'entreprise, analyse économique)
— Les mathématiques : formulation mathématique, modèle mathématique (théorie des systèmes, méthodes d'optimisation ou statistiques).
— L'informatique : mise en œuvre pratique (algorithmiques, structure de données).

La programmation linéaire est un outil très puissant de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans R^+ et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans N. Bien entendu, il est possible d'avoir les deux en même temps. Cependant, la résolution d'un problème avec des variables entières est nettement plus compliquée qu'un problème en nombres réels.

Une des méthodes les plus connues pour résoudre des programmes linéaires en nombre réels est la méthode du Simplexe. En théorie, elle a une complexité non polynomiale et est donc supposée peu efficace. Cependant, en pratique, il s'avère au contraire qu'il s'agit d'une bonne méthode.

De plus, de nombreux logiciels intégrant cette méthode existent. Certains sont utilisés via une interface graphique alors que d'autres permettent une communication par fichiers ce qui autorise l'utilisation du programme de manière cachée dans le développement d'un autre logiciel.

Chapitre 1

Introduction à la programmation linéaire

1.1 Introduction

Le développement technologique, soumet l'homme aux contraintes d'un système de relation économique de plus en plus complexe. On constate qu'il y a de plus en plus d'éléments nouveaux qui doivent être pris en compte lors des prises de décision concernant une action donnée (organisation d'une production, un réseau de transport,..., etc.) et que ces prises de décision deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques. C'est ainsi que s'est développé un domaine des mathématiques basé sur l'activité de décision, appelé recherche opérationnelle.
Les premiers problèmes, qui marquent le début de la recherche opérationnelle ont été posés pendant la seconde guerre mondiale. A cette époque l'homme était préoccupé par l'organisation des opérations militaires et surtout aériennes (nombre d'avions, la formulation à adapter, la fréquence des vols pour avoir un maximum d'efficacité,... etc).
Par la suite, les méthodes de recherche opérationnelle se sont de plus en plus appliquées aux problèmes économiques et commerciaux. Elles se sont imposées auprès des dirigeants des grands organismes économiques et industriels comme les seuls outils permettant de prévenir aussi objectivement que possible les conséquences de leurs actions.
Une des parties essentielle de la recherche opérationnelle est la programmation linéaire, qui maximise ou minimise la fonction linéaire soumise à des contraintes linéaires.
Le terme programmation linéaire a été introduit, en même temps que la méthode du simplexe. La programmation linéaire a été introduite par le russe Kantorovitch et la première résolution a été faite par l'américain G.B.Dantzig en 1951.

1.2 Exemples de problèmes de programmation linéaire

Avant de donner le modèle mathématique général du problème de la programmation linéaire, nous présentons deux exemples concrets et particuliers.

Problème de production

Une unité de production de parpains fabrique quatre types de produit : Les parpains de dimensions respectivement 10 cm (noté P_1), 15 cm (noté P_2), 20 cm (noté P_3) et l'ourdi (noté P_4). Pour la fabrication de ces produits, on utilise quatre matières premières, le sable (M_1), le gravier (M_2), le ciment (M_3) et l'eau (M_4), disponibles en quantité respectivement de 5000, 3000 et 2000 unités. L'eau est disponible en quantité illimitée. Le plan de production de l'unité est donné dans le tableau ci-dessous :

Produits / Matiéres Premiéres	P_1	P_2	P_3	P_4	Quantités matières premières disponibles
M_1	2	3	5	6	5000
M_2	1	2	3	3	3000
M_3	0.8	1	2	3	2000
M_4	1	1	2	2	/

Le tableau signifie que pour fabriquer un parpains de $10cm$, il faut 2 unités de M_1, 1 unité de M_2, 0.8 unité de M_3 et 1 unité de M_4, et de la même manière pour P_2,P_3 et P_4.
Les parpains sont vendus respectivement à raison de 6,7,9 et 10 DA l'unité.
Le problème pour la direction de l'unité est de trouver le nombre maximal de produit P_1, P_2 , P_3 et P_4 Ã fabriquer pour avoir un bénéfice maximal, tout en respectant les contraintes de l'unité.
Désignons par $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ les quantités de produits $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$. Ces quantités doivent vérifier les conditions suivantes :

— Les quantités utilisées en matières premières ne doivent pas dépasser les quantités disponibles :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_3 \leq 3000, \\ 0.8x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 2000, \end{cases} \tag{1.1}$$

— Les quantités à produire sont toutes positives ou nulles :

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \tag{1.2}$$

Comme l'eau est disponible en quantité illimitée, donc on n'a aucune contrainte sur la matière première M_4. Le chef de production de l'unité choisira le programme réalisable qui donnera le maximum de la fonction bénéfice Z :

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 \rightarrow max \tag{1.3}$$

La fonction bénéfice (2.1) appelée aussi fonction objective ou fonction but, représente le bénéfice que va réaliser l'unité. En résumé le chef de production aura pour objectif, de trouver la solution optimale du problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 \rightarrow max \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_3 \leq 3000, \\ 0.8x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 2000, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases} \tag{1.4}$$

Fertilisation d'un terrain agricole
Un agriculture peut utiliser 2 types d'engrais x_1 et x_2, pour fertiliser ses terres : il sait que celles-ci requièrent, par hectare et par an, au moins $60kg$ de potasse, $120kg$ de calcium et $90kg$ de nitrates. les deux types d'engrais coûtent le même prix au poids :
Pour une unité de x_1, il faut avoir : $1kg$ de potasse, $3kg$ de calcium et $3kg$ de nitrates ;
Pour une unité x_2, il faut avoir :$2kg$ de potasse, $2kg$ de calcium et $1kg$ de nitrates.
Comment l'agriculture peut-il fertiliser ses cultures au moindre coût ? Il s'agit d'un problème à 2 inconnues x_1 et x_2 (nombres positifs), représentant les quantités d'engrais de types x_1 et x_2 à acheter par hectare et par an.
Les contraintes imposées sur la fertilisation d'un hectare peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 60, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 120 \\ 3x_1 + x_2 \geq 90. \end{cases} \tag{1.5}$$

Le problème consiste à trouver x_1 et x_2 de façon à minimiser $x_1 + x_2$ (le coût étant proportionnel à la quantité d'engrais achetée par hectare et par an) , c'est à dire

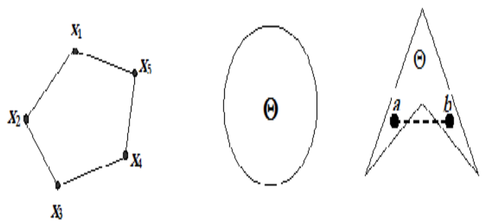
$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow min \tag{1.6}$$

Chapitre 2

Interprétation géométrique et résolution graphique d'un problème de programmation linéaire

2.1 Définitions essentielles

Définition 2.1 *Un ensemble $M \subset R^n$ est convexe si* $\forall a, b \in M$, $\alpha a + (1-\alpha)b \in M$, *pour tout,* $\alpha \in [0,1]$.
Ou encore :
M est convexe si et seulement si le segment reliant tout couple de points de M est inclu dans M.



Exemple 2.1
- *Les graphes 1 et 2 sont des ensembles convexes.*
- *Le graphe 3 de la figure çi-dessus est un ensemble non convexe, car le segment a et b n'appartient pas à M.*

Propriété 2.1 *Soit $M \in R^n$ et $D \subset R^n$, deux ensembles convexes alors :*
$M + D = \{x \in R^n / x = c + d, c \in M, d \in D\}$ *est un ensemble convexe.*

Preuve 2.1 *Soit $x_1 \in (M+D) \Rightarrow \exists c_1 \in M, d_1 \in D / x_1 = c_1 + d_1$;*
Soit $x_2 \in (M+D) \Rightarrow \exists c_2 \in M, d_2 \in D / x_2 = c_2 + d_2$;
et soit

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha(c_1+d_1) + (1-\alpha)(c_2+d_2) \\ &= \alpha c_1 + \alpha d_2 + (1-\alpha)c_2 + (1-\alpha)d_2 \\ &= \underbrace{\alpha c_1 + (1-\alpha)c_2}_{\in M} + \underbrace{\alpha d_2 + (1-\alpha)d_2}_{\in D} \\ &\Rightarrow x \in (M+D) \\ &\Rightarrow M + D est\ convexe. \end{aligned}$$

Propriété 2.2 *Soit* $M_1,\ M_2,\ M_3, ...,\ M_p$ *des ensembles convexes* $\subset \mathbb{R}^n$ *alors* $M = \cap_{i=1}^{p} M_i$ *est un ensemble convexe.*

Preuve 2.2 *Soient* a *et* $b \in M \Rightarrow a$ *et* $b \in M_i, \quad \forall\ i = \overline{1,p},$
$\Rightarrow\ \forall \alpha \in [0,1],\ \alpha a + (1-\alpha)b \in M,\ \forall$ *l'indice* i *car* M_i *est convexe*
$\Rightarrow\ \alpha a + (1-\alpha)b \in M.$

Définition 2.2 *On appelle combinaison linéaire convexe de* $n-$ *vecteurs* $x_1,\ x_2, ...,\ x_n \in \mathbb{R}^n$,
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$ *où* $\alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$

Définition 2.3 *Soit* $A \subset \mathbb{R}^n (A \neq \emptyset)$*, on appelle enveloppe convexe de* A*, le plus petit ensemble convexe contenant* A*, noté* $M(A),\ (A \subset M(A))$*, on l'appelle* $cov(A)$*.*

Définition 2.4 *Soit* $a = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *alors l'ensemble* $H = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha x = \beta\}$ *est un Hyper plan de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 2.2 *Dans* $\mathbb{R}^2$, $\quad H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (a_1, a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \Rightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 = \beta\}$ *est un Hyper plan de* $\mathbb{R}^2$*, qui est une droite.*

Propriété 2.3 *Un Hyper plan est un ensemble convexe.*

Preuve 2.3 *Soit* x *et* $y \in H$ *et soit* $\alpha \in [0,1]$,
$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = \beta, \\ a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_n y_n = \beta, \end{cases}$$
$\Rightarrow a_1(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1) + a_2(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2 + ... + a_n(\alpha x_n + (1-\alpha)y_n)$
$\Rightarrow \alpha\beta + (1-\alpha)\beta = \beta$
$\Rightarrow a(\alpha x + (1-\alpha)y) = \beta$
$\alpha x + (1-\alpha)y \in H$
$\Rightarrow H$ *est convexe.*

Définition 2.5 *Soit* $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., a_n\} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *on appelle :*
Demi-espace positif fermé, l'ensemble $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha x \geq \beta\}$,
Demi-espace négatif fermé, l'ensemble $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha x \leq \beta\}$,
Demi-espace positif ouvert, l'ensemble $H_+^0 = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha x > \beta\}$,
Demi-espace négatif ouvert, l'ensemble $H_-^0 = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha x < \beta\}$

Définition 2.6 *l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermé de* $\mathbb{R}^n$ *est appelé polytope convexe*

Définition 2.7 *On appelle polyèdre, un polytope convexe borné (c'est un compact convexe de* $\mathbb{R}^n$*)*

Remarque 2.1 *Un ensemble est dit compact, s'il est fermé et borné.*

Exemple 2.3
1. *Compacts convexe dans* $\mathbb{R}^2$,
   — *Le triangle,*
   — *Le cercle,*
2. *Compact convexe dans* $\mathbb{R}^3$,
   — *La sphére,*

Remarque 2.2 *soit le programme linéaire suivant : (P.L)* $\begin{cases} \max Z = c'x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$

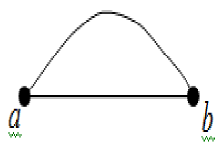
Avec $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ *les vecteurs lignes de A.*

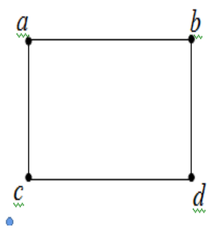
$c = (c_1, c_2, ..., c_n) \in R^n,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in R^m.$

Les contraintes $\begin{cases} a_1 x \geq b_1 \\ a_2 x \geq b_2 \\ \vdots \\ a_m x \geq b_m \end{cases}$ *du (P.L), définissent un polytope connexe et chaque contrainte définit un demi-espace fermé.*

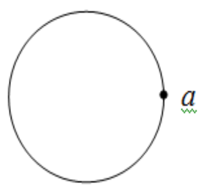
Définition 2.8 *Soient un ensemble convexe de* R^n *et* x_0 *un élément de* M.
x_0 *est appelé point extrême de* M *s'il n'existe pas deux points* x_1 *et* $x_2 \in M$ *tels que :* $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2,\ \forall \alpha \in]\,0,1[$.

Exemple 2.4 **i)** *a, b, c et d sont des points extrêmes. a, b, c et d sont des points extrêmes.*





ii)



iii) *a est un point extrême, et le nombre de points extrêmes d'un cercle n'est pas dénombrable.*

2.1.1 Matrices et vecteurs partitionnés

On peut effectuer le produit d'une matrice A et d'un vecteur X , après les avoir partitionnées, on dit alors qu'on a effectué le produit par bloc.
En effet :

Si $A=[A_1|A_2]$, $X=\left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array}\right]$ alors on aura $AX=[A_1|A_2]\left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array}\right]=A_1X_1+A_2X_2$.

On peut aussi partitionner A de la manière suivante : $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $X=\left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array}\right]$, $b=\left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}\right]$

et l'équation $Ax=b$ devient : $\left\{\begin{array}{l} A_{11}X_1+A_{12}X_2=b_1 \\ A_{21}X_1+A_{22}X_2=b_2 \end{array}\right.$

Remarque 2.3 *On peut partitionner une matrice d'une façon arbitraire.*
Par exemple, si $A=A(I,J)$ est une matrice d'ordre $m\times n$ et que J_B et J_H sont deux sous ensemble quelconque de J, tels que $J=J_B\bigcup J_H$,
$J_B\bigcap J_H = \emptyset$, on peut alors partitionner A de la manière suivante : $A=[A_B|A_H]$, où $A_B=A(I,J_B)\,, A_H=A(I,J_H)$, et $X=X(J)=\left[\begin{smallmatrix} X_B \\ X_H \end{smallmatrix}\right]$, où $X_B=X(J_B)$, $X_H=X(J_H)$
De là :

$$\begin{aligned} AX &= a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_jx_j+\cdots+a_nx_n=\sum_{j\in J}a_jx_j \\ &= \sum_{j\in J_B}a_jx_j+\sum_{j\in J_H}a_jx_j \\ &= A(I,J_B)\,X(J_B)+A(I,J_H)\,X(J_H) \\ &= A_BX_B+A_HX_H \end{aligned}$$

Exemple 2.5 *Soit* $A=A(I,J)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$X=X(J)=\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Effectuons par blocs le produit AX avec la partition suivante :*

$J=J_B\cup J_H, J_B=\{2,5\}, J_H=\{1,3,4\}$.
On a

$$A_B=A(I\ ,J_B)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_H=A(I,J_H)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$
$$X_B=X(J_B)=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{et}$$
$$X_H=X(J_H)\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

. D'où :

$$\begin{aligned} AX &= A_BX_B+A_HX_H \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -19 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.2 Caractérisation des points extrêmes

Considérons un problème canonique de programmation linéaire :

$$\begin{cases} Z = c'x \to \max \\ \quad Ax = b \qquad (P) \\ \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Désignons par $M = \{x \in \mathrm{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ l'ensemble des solutions admissibles du problème (P).

Théorème 1 *L'ensemble M est convexe fermé.*

Preuve 2.4
- *Montrons que M est convexe :*
  Soient x_1 et $x_2$deux points de M et $\alpha \in \mathrm{R}, 0 \leq \alpha \leq 1$. Soit $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ et montrons que $x \in M$; c'est-à -dire vérifions si x est admissible : $Ax = A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2 = \alpha b + (1-\alpha)b = b$, et $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq 0$, donc $x \in M$, c'est à dire M est convexe.
- *Montrons que M est fermé :*
  Soient $x_k, k = 1, 2, ...$ une suite arbitraire de points de M convergeant vers x ($\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$).Comme $x_k \in M$, donc $Ax_k = b$ et par conséquent $\lim\limits_{k\to\infty} Ax_k = Ax = b$, donc $x \in M$, ce qui veut dire que M est fermé.

Théorème 2 *Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un point extrême, alors les vecteurs colonnes de A correspondants aux composantes positives de x sont linéairement indépendants.*

Preuve 2.5 *Soit x un point extrême et supposons que les k premières composantes sont positives, c'est-à -dire,*
x s'écrit de la manière suivante $x = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$. Comme x est admissible, de l'équation $Ax = b$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k = b, \tag{2.1}$$

où a_j sont les colonnes de A.
Supposons que les vecteurs colonnes $a_1, a_2, ..., a_k$ sont linéairement dépendants, c'est-à-dire il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ non tous nuls tels que :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k = 0. \tag{2.2}$$

On multiplie l'équation (2.2) par ε(nombre arbitraire réel) on obtient :

$$\varepsilon\alpha_1 a_1 + \varepsilon\alpha_2 a_2 + ... + \varepsilon\alpha_k a_k = 0. \tag{2.3}$$

On additionne les deux équations (2.1) et (2.3) on obtient :

$$a_1(x_1 + \varepsilon\alpha_1) + ... + a_k(x_k + \varepsilon\alpha_k) = b. \tag{2.4}$$

De la même manière, on soustrait (2.3) de (2.1) on obtient :

$$a_1(x_1 - \varepsilon\alpha_1) + ... + a_k(x_k - \varepsilon\alpha_k) = b. \tag{2.5}$$

Des équations (2.4) et (2.5), on conclut que les vecteurs $X_1 = (x_1 + \varepsilon\alpha_1, ..., x_k + \varepsilon\alpha_k, 0, ..., 0)$ et $X_2 = (x_1 - \varepsilon\alpha_1, ..., x_k - \varepsilon\alpha_k, 0, ..., 0)$ vérifient la contrainte essentielle et pour ε suffisamment petit, ils vérifient la contrainte de positivité donc ils sont admissibles. De là en les additionnant et en les divisant par 2, on obtient : $x = \frac{X_1 + X_2}{2}$, ce qui dit que x n'est pas un point extrême et ceci contredit l'hypothèse que x est un point extrême.

Théorème 3 *Si le système de vecteur $a_1, a_2, ..., a_n$(les colonnes de A) posséde m-vecteurs linéairement indépendants (par exemple $a_1, a_2, ..., a_m$) alors le vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0)$ est un point extrême de l'ensemble des solutions réalisables.*

Preuve 2.6 *Soient $a_1, a_2, ..., a_m$ m-vecteurs linéairement indépendants de la matrice A, donc le vecteur b s'écrit de manière unique :$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = b$.*
Supposons que x n'est pas un point extrême, c'est-à -dire ils existent deux points de M, x_1 et x_2 $(x_1 \neq x_2)$ tels que :
$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, *où* $x_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, x_{m+1}^1, ..., x_n^1)$ *et* $x_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, x_{m+1}^2, ..., x_n^2)$
Comme x_1 et x_2 sont positifs donc de $x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$ on obtient que x_1 et x_2 s'écrivent sous la forme suivante :
$x_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1, 0, ..., 0)$, $x_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2, 0, ..., 0)$. *$x_1$ et x_2 sont admissibles, donc $Ax_1 = b$ et $Ax_2 = b$. De là on obtient :*
$a_1x_1^1 + a_2x_2^1 + ... + a_mx_m^1 = b, a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + ... + a_mx_m^2 = b$, *Par conséquent :*
$a_1(x_1^1 - x_1^2) + a_2(x_2^1 - x_2^2) + ... + a_m(x_m^1 - x_m^2) = 0$, *et comme les $a_i, i = 1, ..., m$ sont linéairement indépendants donc $x_1^1 - x_1^2 = 0, x_2^1 - x_2^2 = 0, ..., x_m^1 - x_m^2 = 0$, et finalement $x_1 = x_2$ contradiction avec $x_1 \neq x_2$, c'est à dire x est un point extrême.*

Conséquence 1

Le nombre de points extrêmes est fini ceci découle le faite que le nombre de colonne de A est fini.

Théorème 4 *Si la fonctionnelle atteint son maximum sur un point quelconque x_0 de M, alors ce point est extrême.*
Si ce maximum est atteint en plusieurs points alors le maximum est atteint sur une combinaison linéaire de ces points.

Preuve 2.7 *1. Soient $x_1, x_2, ..., x_m$ des points extrêmes de M et x^0 l'optimum(maximum).*
Supposons que x^0 n'est pas extrême, donc il s'écrit comme combinaison linéaire des points extrêmes :
$x^0 = \sum_{i=1}^m k_i x_i$, $\sum_{i=1}^m k_i = 1, k_i \geq 0, i = 1, ..., m$.
Comme x^0 est un maximum donc $c'x^0 \geq c'x, \forall x$. ($f$ est linéaire signifie que $f(\sum_{i=1}^m k_i x_i) = \sum_{i=1}^m k_i f(x_i)$).
Désignons par x_r le point extrême pour lequel $c'x_r = \max c'x_i, i = \overline{1, m}$, c'est à dire $c'x_i < c'x_r$ pour tout $i = i = \overline{1, m}$ donc on a l'égalité suivante : $c'x^0 = \sum_{i=1}^m c'k_i x_i \leq \sum_{i=1}^m k_i c'x_r = c'x_r \sum_{i=1}^m k_i = c'x_r$.
Comme $c'x^0 \geq c'x$, $\forall x$, donc on a une contradiction pour $x = x_r \Rightarrow x^0$ est un point extrême.

1. *Supposons que le maximum est atteint aux points extrêmes $x_1, ..., x_s$et soit $x_* = \sum_{i=1}^s x_i k_i, \sum_{i=1}^s k_i = 1, k_i \geq 0$, une combinaison linéaire de ces points. De là pour x_* la fonctionnelle est égale à :*

$$f(x_*) = c'x_* = \sum_{i=1}^{s} c'x_i k_i.$$

Comme le maximum est atteint aux points extrêmes $x_1, ..., x_s$ alors $c'x_i = c'x^0, i = \overline{1, m}$, d'où $f(x_*) = c'x_* = c'x^0 \sum_{i=1}^s k_i = c'x^0$.
Conséquence 2
L'une des propriétés, les plus importantes des problèmes de programmation linéaire est que le maximum (respectivement le minimum) d'une fonction linéaire est atteint toujours sur un ou plusieurs points extrêmes.

2.3 Résolution graphique

Considérons le problème de programmation linéaire suivant : $\begin{cases} Z = c'x \rightarrow \max \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$ Où A est une matrice d'ordre $m \times n$,$x \in \mathrm{R^n}$, $c \in \mathrm{R^n}$, $b \in \mathrm{R^m}$.

Si le nombre de variables n est supérieur d'une unité ou de deux unités par rapport aux nombres m des équations, la résolution d'un tel problème peut se faire simplement géométriquement.
Si $n-m=1$, on fixe une variable, par exemple x_1 et on calcule les autres $(x_2, x_3, ..., x_n)$ variables en fonction de x_1 dans les équations $Ax=b; x_2 = x_3 = ... = x_n$.
On remplace ces variables par leurs valeurs dans la fonctionnelle et on obtient une fonction d'une seule variable. De là , la fonctionnelle devient
$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \alpha_1 x_1 + \beta$, qui est une fonction d'une seule variable, dont le maximum sera trouvé en fonction du signe de x_1 et des bornes de x_i.
Si $n-m=2$, on fixe deux variables et on calcule dans le système $Ax=b$, les autres en fonction des deux variables. En suite on trace dans un plan toutes les droites ainsi obtenues.

Exemple 2.6

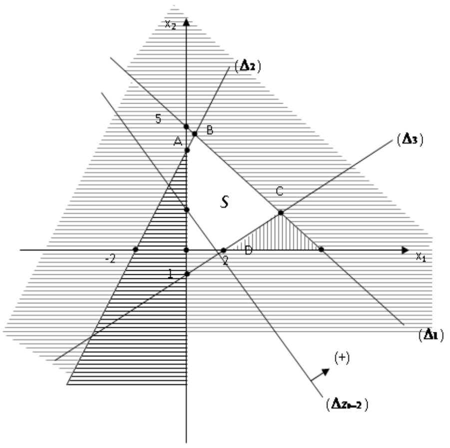
$$\begin{gathered} Z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 20 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{gathered}$$

Ici $n=3, m=2, n-m=1$, donc on fixe par exemple $x_1$et on calcule les autres en fonction de x_1 : $\begin{cases} x_3 = -\frac{3}{2}x_1 + 15 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 - 5, \end{cases}$ donc $Z = x_1 + 2x_2 - x_3 = x_1 + x_1 - 10 + \frac{3}{2}x_1 - 15 = \frac{7}{2}x_1 - 25$ On sait que $x_j \geq 0, \overline{1,3}$, c'est à dire, $-\frac{3}{2}x_1 + 15 \geq 0, \frac{1}{2}x_1 - 5 \geq 0$et $x_1 \geq 0$, de là $x_1 \leq 10$, $x_1 \geq 0$ et finalement $0 \leq x_1 \leq 10$, donc le $\max Z = \max\limits_{0 \leq x_1 \leq 10} \left(\frac{7}{2}x_1 - 25\right)$ est atteint pour $x_1 = 10$. En suite on trouve $x_2 = x_3 = 0$et $Z^0 = 10$.

Exemple 2.7

$$\begin{gathered} Z = 2x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered} .$$

La partie du plan dont les coordonnées respectent les contraintes est le polygone OABCD, c'est l'ensemble des solutions réalisable.
La droite (Δ_1) est la frontière correspondant à la première contrainte , la droite (Δ_2) correspond à la deuxième contrainte et la droite (Δ_3) correspond à la troisième contrainte .



La fonction objective Z est représentée par l'équation $2x_1 + x_2 = z_0(\Delta_{Z_0})$ Pour $z_0 = 2$ on aura $2x_1 + x_2 = 2$.
Si l'on déplace la droite (Δ_{Z_0}) dans le sens de la fléche, qui est le sens de croissance du bénéfice,

l'optimum sera atteint au point extrême $C = \Delta_1 \bigcap \Delta_3 = (4, 1)$.
D'où la solution optimale $x^0 = (4, 1)$ avec $Z^0 = 9$.

Chapitre 3

Algorihme du Simplexe

3.1 Introduction

Soit le problème canonique de programmation linéaire suivant :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \tag{3.1}$$

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1j}x_j+ & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2j}x_j+ & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1+ & a_{i2}x_2+ & \cdots & +a_{ij}x_j+ & \cdots & +a_{in}x_n = b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots & +a_{mj}x_j+ & \cdots & +a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{3.2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \tag{3.3}$$

Ici on suppose $b_1, b_2, \cdots, b_m \geq 0, rang A = m \leq n$.
Si l'un des b_i est négatif, on multiplie l'équation par -1 pour avoir un b_i positif. Le problème (3.1)-(3.3) peut être écrit sous sa forme matricielle :

$$\left\{\begin{array}{c} c'x \to \max \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

où $A = A(I, J)$-est la matrice des conditions, $a_j = A(I, j)$-les colonnes de A,$c'(J) = c^t(J)$-le vecteur des coûts, $b = b(I)$-le vecteur des contraintes, $x = x(J) = (x_j,\ j \in J)$-le vecteur des paramètres, $I = \{1, 2, \cdots, m\}, J = \{1, 2, \cdots, n\}$-les ensembles d'indices des lignes et des colonnes de la matrice A.

3.2 Solution de base

Définition 3.1 *Tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les contraintes (3.2) et (3.3) est appelé solution réalisable (admissible) du problème (3.1)-(3.3).*

Définition 3.2 *Une solution réalisable x^0 est optimale si $c'x^0 = \max(c'x)$, où x est une solution réalisable.*

Définition 3.3 *Une solution admissible x est dite de base si $(n-m)$ de ses composantes sont nulles, et aux autres $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_m}$, correspondent m vecteurs (colonne de A) $a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_m}$ de la matrice de condition linéairement indépendants.*

L'ensemble $J_B = \{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$ est appelé *ensemble des indices de base* ; $J_H = J \backslash J_B$ *ensemble des indices hors base.*

Autrement

Une solution réalisable $x = x(J)$ est *solution de base* si $x_H = x(J_H) = 0$, $\det A_B \neq 0$, où $A_B = A(I, J_B)$.

La matrice A_B est appelé *matrice de base* , x_j, $j \in J_B$*-les composantes de base* ; x_j, $j \in J_H$*- les composantes hors base.*

Définition 3.4 *Une solution de base x est dite non-dégénérée si $x_j > 0$, $j \in J_B$.*

Conséquence

On sait que le nombre de solutions de base d'un tel problème peut atteindre C_n^m.

Exemple 3.1 *Soit le système :*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 7x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

La solution basique liée à la base $A_B = A(I, J_B) = (a_3, a_4) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$, *avec* $J_B = \{3, 4\}$, *est de la forme :* $x = (0, 0, x_3, x_4)$ *et* $\det A_B = 4 \neq 0 \Rightarrow$ *le système* $A_B x_B = b$ *admet une solution unique de base qui sera :* $x = \left(0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

3.3 Formule d'accroissement de la fonction objective

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ une solution réalisable de base avec la matrice de base $A_B = A(I, J_B)$, $J_H = J/J_B$.

Effectuons la partition suivante : $A = [A_B | A_H]$, $A_H = A(I, J_H)$, $x = \left[\frac{x_B}{x_H}\right]$, $x_B = x(J_B), x_H = x(J_H)$, $c = \left[\frac{c_B}{c_H}\right]$, $c_B = c(J_B)$, $c_H = c(J_H)$.

Considérons une autre solution réalisable quelconque $\overline{x} = x + \Delta x$.

L'accroissement de la fonction objective Z est donc égale à :

$$\Delta Z = \overline{Z}(x) - Z(x) = c'\overline{x} - c'x = c'\Delta x. \tag{3.5}$$

Comme x et $\overline{x}$ sont réalisables alors : $A\overline{x} = Ax = b \Rightarrow A(\overline{x} - x) = A\Delta x = 0$.

Soit $\Delta x = \left[\frac{\Delta x_B}{\Delta x_H}\right]$, d'où $A\Delta x = A_B \Delta x_B + A_H \Delta x_H = 0 \Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \Delta x_H$ et en vertu de la relation (3.5) on obtient : $\Delta Z = c'_B \Delta x_B + c'_H \Delta x_H = c'_B \left(-A_B^{-1} A_H \Delta x_H\right) + c'_H \Delta x_H$

$\Rightarrow \Delta Z = -\left(c'_B A_B^{-1} A_H - c'_H\right) \Delta x_H$.

Construisons le m-vecteur appelé *vecteur des potentiels* $y = y(I)$:

$$y' = c'_B A_B^{-1}; \tag{3.6}$$

et le vecteur dit *vecteur des estimations* $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j, j \in J)$:

$$\begin{cases} \Delta' = y'A - c' \\ \Delta_j = y'a_j - c_j, j \in J. \end{cases} \tag{3.7}$$

Remarque 3.1 $\Delta'_B = \Delta'(J_B) = 0$ *par construction.*

En utilisant (3.6) et (3.7), l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\Delta Z = -\Delta'_H \Delta x_H = -\sum_{j \in J_H} \Delta_j \Delta x_j \tag{3.8}$$

Comme $\overline{x}_j \geq 0, \quad \forall j$ *et* $x_j = 0, \quad \forall j \in J_H$, *donc* $\overline{x}_j = x_j + \Delta x_j = \Delta x_j \geq 0, j \in J_H$.

En utilisant cette dernière inégalité et la relation (3.8) on déduit le critére d'optimalité.

3.4 Critére d'optimalité

Théorème 5 *Soit $\{x, A_B\}$une solution réalisable de base de départ, l'inégalité vectorielle $\Delta_H = \Delta(J_H) > 0$ 0 est suffisante pour l'optimalité de la solution de base x. Elle est aussi nécessaire lorsque x est non dégénérée.*

Preuve 3.1 ***Condition suffisante :***
Soit x une solution de base, telle que $\Delta_H = \Delta(J_H) \quad \geq 0$, considérons une autre solution réalisable quelconque $\overline{x} = x + \Delta x$.
Comme $\overline{x} = x + \Delta x \geq$ 0, donc $\overline{x}_H = x_H + \Delta x_H \geq 0$ et x est de base, c'est à dire, $x_H = 0$ donc $\Delta x(J_H) \geq 0$ et en utilisant l'hypothése $\Delta(J_H) \geq 0$ on obtient l'inégalité suivante : $\Delta Z = c'\overline{x} - c'x = -\Delta'_H \Delta x_H \leq 0 \Rightarrow c'\overline{x} \leq c'x, \forall \overline{x}$ solution réalisable, et ceci montre que x est une solution optimale du problème.
Condition nécessaire :
Faisons la preuve par absurde.
Soit $\{x, A_B\}$ une solution optimale non dégénérée, et supposons que l'inégalité $\Delta_H \geq 0$ n'est pas vérifié, c'est à dire, $\exists j_0 \in J_H$, tel que $\Delta_{j_0} < 0$.
Construisons un autre vecteur $\overline{x} = x + \Delta x$, où Δx est l'accroissement de x.
Il faut trouver Δx de telle sorte que $\overline{x}$ soit admissible : $A\overline{x} = b, \overline{x} \geq 0$.
Pour cela posons :
$\Delta x_j = \begin{cases} 0, j \in J_H/j_0, \\ \theta, j = j_0, \end{cases}$ *avec $\theta \geq$ 0, et de l'admissibilité de $\overline{x}\,(A\overline{x} = b)$, on calcule :*

$$\begin{aligned} \Delta x'_B &= \Delta x'(J_B) = -\Delta_B^{-1} A_H \Delta x_H, \\ &= -\theta A_B^{-1} a_{j_0}. \end{aligned}$$

Vérifions l'admissibilité de $\overline{x}$ par rapport à la contrainte directe $(\overline{x} \geq 0)$: $\overline{x}_H = x_H + \Delta x_H$,ici $\overline{x}_H \geq 0$ car $\theta \geq 0$ et $\Delta x_H = 0$ partout sauf pour $j = j_0$.
$\overline{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1} a_{j_0}$, ici on sait que $x_B > 0$ (x non dégénérée).
Donc pour θ suffisamment petit $\overline{x}_B \geq 0$. De là $\overline{x}$ est une solution réalisable.
En utilisant l'accroissement de la fonctionnelle : $\overline{Z}(\overline{x}) - Z(x) = c'\Delta x = -\theta \Delta_{j_0} > 0$ on obtiendra $c'\overline{x} > c'x$ et ceci contredit l'optimalité de x.

Remarque 3.2 *Si les composantes du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0}$ sont non positives, alors le problème de départ posséde une solution infinie.*
En effet, en construisant $\overline{x}$ admissible, il faut avoir $\overline{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1} a_{j_0}$.
Comme $x_B > 0$ et si $A_H^{-1} a_{j_0} \leq 0$, alors $\overline{x}_B$ est positif ou nul $\forall \theta$.
De là on prend un θ infini et $\overline{x}$ est toujours une solution admissible et $\overline{Z}(\overline{x}) = c'x + c'\Delta x = c'x - \theta \Delta_{j_0} \to \infty$, $\theta \to \infty$

3.5 Itération de l'algorithme du simplexe

Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ et supposons que le critère d'optimalité n'est pas vérifié, c'est à dire l'inégalité $\Delta_j \geq 0$, $j \in J_H$, n'est pas vérifiée.
Choisissons un indice $j_0 \in J_H / \Delta_{j_0} = \min\limits_{\Delta_j \prec 0, j \in J} \Delta_j$.
L'un des buts de l'itération est de faire rentrer cet indice j_0 dans la base (autrement dit la colonne a_{j_0} va rentrer dans la base).
Donc il faut trouver un indice $j_1 \in J_B$, qui sortira de la base (à cet indice correspond la colonne $a_{j_1} \in A_B$).
L'itération consiste à passer de la solution de base $\{x, A_B\}$à la solution $\left\{\overline{x}, \overline{A}_B\right\}$ et tel que $Z(\overline{x}) \geq Z(x)$.
La nouvelle solution de base $\overline{x}$ sera trouvé de la manière suivante : $\overline{x} = x + \theta \ell$, où ℓ est la direction du

changement et θ le pas le long de cette direction. Construisons la direction ℓde la manière suivante :
Sur J_H, posons :

$$\ell_j = \begin{cases} 0, j \in J_H \backslash j_0, \\ 1, j = j_0. \end{cases}$$

Sur J_B : $\overline{x}$ doit être réalisable, donc elle doit vérifier $A\overline{x} = b$ et comme $Ax = b$ donc $\theta A\ell = 0$, c'est à dire $A\ell = 0$.
Cette dernière relation implique que :

$$A_B\ell_B + A_H\ell_H = 0 \Rightarrow \ell_B = \ell(J_B) = -A_B^{-1}A_H\ell_H.$$

De lÃ $\overline{x}_H = x_H + \theta\ell_H = \theta\ell_H \geq 0$ et $\overline{x}_B = x_B + \theta\ell_B \Rightarrow \overline{x}_j = x_j - \theta A_B^{-1}a_{j_0}$.
Si les composantes du vecteur $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$, alors $\overline{x}_j \geq 0, \forall\theta \geq 0$, donc on peut prendre $\theta = \infty$ et on aura une solution infinie.
Si parmi les composantes du vecteur $A_B^{-1}a_{j_0}$, ils existent celles qui sont négatives, donc en augmentant θ certaines composantes de $\overline{x}_B$ seront négatives.
Pour avoir $\overline{x}_B \geq 0$, il faut prendre un pas maximal θ^0 :

$$\theta^0 = \min_{j \in J_B} \theta_j = \min\left\{\frac{x_j}{x_{j_0j}}/x_{j_0j} \succ 0, j \in J_B\right\} = \theta_{j_1}.$$

La nouvelle base sera :
$\overline{J}_B = (J_B \backslash j_0) \bigcup j_1$ et $\overline{A}_B = \left(A_B \backslash \mathrm{a}_{\mathrm{j0}}\right) \bigcup a_{j_1}$.

3.6 Algorithme du Simplexe

Algorithm 1 : Algorithme du Simplexe

§Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable
†Calculer $y' = c'_BA_B^{-1}$ et $\Delta_j = y'a_j - c_j,\ j \in J_H$.
♭ $\Delta_j \geq 0,\ j \in J_H$
-Si c'est oui,
STOP, x est une solution optimale.
-Sinon,
♭ $\exists\ j_0 \in J_H/\Delta_{j0} < 0$ et $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$
-Si oui,
Stop, Le maximum de la fonction objective est atteint à l'infini
Sinon,
$j_0/\Delta_{j0} = min\Delta_{j0}$ et $j_0/\theta^0 = \theta = \min\left\{\frac{x_j}{x_{j_0j}}/x_{j_0j} \succ 0, j \in J_B\right\}$
Calculer $\overline{x} = \overline{x}(J)(\overline{x}(J_B), \overline{x}(J_H)),\ \overline{x}(J_B) = x(J_B) - \theta A_B^{-1}a_{j0}$.
$\overline{x}_j = 0,\ \ j \in J_H æ_0,\ \ \overline{x}_{j0} = \theta^0$.
Poser $\overline{J}_B = (J_B æ_1) \cup j_0,\ \ \overline{J}_H = (J_H æ_0) \cup j_1,\ \ \overline{A}_B = A(I, \overline{J}_B)$
d'où $\{\overline{x}, \overline{A}_B\}$ la nouvelle solution réalisable de base.

3.7 Tableau du simplexe

Les différents calculs qu'on aura à effectuer dans les différentes étapes de résolution seront disposés dans le tableau suivant :

c			c_1	c_2	c_3	$\dots$ $\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots\dots$	c_j	$\dots\dots$	c_n	
c_B	**Base**	b	a_1	a_2	a_3	$\dots$ $\dots$	a_m	a_{m+1}	$\dots\dots$	a_j	$\dots\dots$	a_n	θ_j
c_1	a_1	$b_1 = x_1$	1	0	0	$\dots$ $\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$\dots\dots$	x_{1j}	$\dots\dots$	x_{1n}	θ_1
c_2	a_2	$b_2 = x_2$	0	1	0	$\dots$ $\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$\dots\dots$	x_{2j}	$\dots\dots$	x_{2n}	θ_2
c_3	a_3	$b_3 = x_3$	0	0	1	$\dots$ $\dots$	0	$x_{3,m+1}$	$\dots\dots$	x_{3j}	$\dots\dots$	x_{3n}	θ_3
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$		$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$		$\vdots$ $\vdots$		$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
c_m	a_m	$b_m = x_m$	0	0	0	$\dots$ $\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$\dots\dots$	x_{mj}	$\dots\dots$	x_{mn}	θ_m
$Z = c'_B x_B$		Δ_j	Δ_1=0	Δ_2=0	Δ_3=0	$\dots$ $\dots$	Δ_m=0	Δ_{m+1}	$\dots\dots$	Δ_j	$\dots\dots$	Δ_m	

Les m-vecteurs de la base ne sont pas forcement les premiers.

Exemple 3.2 *Nous allons résoudre le problème de programmation linéaire suivant, par la méthode du simplexe :*

$$\begin{cases} Z = 2x_1 + x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

On a $J = \{1,2,3,4,5\}$*et* $J_B = \{3,4,5\}$,$J_H = \{1,2\}$ *avec* $A_B = I_3$*, donc la solution réalisable de base est* $x = (0,0,4,5,6)$*, dressons alors le premier tableau du simplexe :*

c			*2*	*1*	*0*	*0*	*0*		
c_B	*Base*	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j	
0	a_3	*4*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*4*	L_1^1
0	a_4	*5*	*-2*	*3*	*0*	*1*	*0*	/	L_2^1
0	a_5	*6*	*2*	*-3*	*0*	*0*	*1*	*3*	L_3^1 $\to$ *vecteur sortant*
Z=0		Δj	*-2*	*-1*	*0*	*0*	*0*		
			$\uparrow$*vecteur rentrant*						

On remarque que $\Delta_j \geq 0, \forall j \in J_H$*, n'est pas vérifié , donc la solution réalisable de base initiale n'est pas optimale, on doit alors changer la base de la manière suivante :* $\min\limits_{j \in J_H} \Delta_j = \Delta_1 = 2$,*donc* $j_0 = 1$*, de là le vecteur* a_1 *va rentrer dans la nouvelle base, pour déterminer le vecteur qui va sortir, on calcule les* $\theta_j, j \in J_B$ *:*

$\theta_3 = \frac{4}{1} = 4, \theta_5 = \frac{6}{2} = 3$*. D'où* $\theta_{j_1} = \min\limits_{j \in J_B} \theta_j = \theta_5 = 3$*, de là , le vecteur* a_5 a_5 *va sortir de la base.*

Donc la nouvelle base est $\overline{J}_B = \{3,4,1\}$, $\overline{J}_H = \{5,2\}$*, Pour déterminer la nouvelle solution* $\overline{x}$*, dressons le* $2^{\text{ème}}$ *tableau du simplexe :*

c			*2*	*1*	*0*	*0*	*0*		
c_B	*Base*	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j	
0	a_3	*1*	*0*	$^5/_2$	*1*	*0*	$^{-1}/_2$	$^2/_5$	$\to L_1^2 = L_1^1 - {}^1/_2 L_3^1$
0	a_4	*11*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	/	$L_2^2 = L_2^1 + L_3^1$
2	a_5	*3*	*1*	$^{-3}/_2$	*0*	*0*	$^1/_2$	/	$L_3^2 = \frac{1}{2} L_3^1$
$\overline{Z} = 6$		$\overline{\Delta}_j$	*0*	*-4*	*0*	*0*	*1*		
				$\uparrow$					

La nouvelle solution de base est donc $\overline{x} = (3,0,1,11,0)$ *de plus elle n'est pas optimale, car* $\overline{\Delta}_2 = -4 \prec 0$*.*

On doit alors changer la base une autre fois :
$\min_{j\in \overline{J}_H} \overline{\Delta}_j = \overline{\Delta}_2 = -4$, *donc le vecteur* a_2 *va rentrer dans la base.*
Comme $\theta_{j_1} = \min_{j\in \overline{J}_B} \theta_j = \theta_3$, *donc le vecteur* a_3 *sortira de la base.*
D'où, on obtient : $\overline{\overline{J}}_B = \{2,4,1\}$, $\overline{\overline{J}}_H = \{5,3\}$, *pour déterminer la nouvelle solution* $\overline{\overline{x}}$, *dressons le* $3^{éme}$ *tableau du simplexe :*

c			2	1	0	0	0		
c_B	$Base$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_j	
1	a_2	$2/5$	0	1	$2/5$	0	$2/5$		$\rightarrow L_1^3 = \frac{5}{2} L_1^2$
0	a_4	11	0	0	0	1	1		$L_2^3 = L_2^2$
2	a_5	$18/5$	1	0	$3/5$	0	$1/5$		$L_3^3 = L_3^2 + \frac{3}{5} L_1^2$
$\overline{\overline{Z}} = \frac{38}{5}$		$\overline{\overline{\Delta}}_j$	0	0	$\frac{8}{5}$	0	0		

La nouvelle solution de base est donc $x = \left(18/5,\ 2/5,\ 0, 11,\ 0\right)$, *comme* $\overline{\overline{\Delta}}_j \geq 0$, $\forall j \in \overline{\overline{J}}_H$, *l'algorithme s'arrête et la solution obtenue est optimale, avec* $\overline{\overline{Z}} = \frac{38}{5}$

Remarque 3.3 L_2^3 *par exemple, désigne la* $2^{éme}$ *ligne du* $3^{ème}$ *tableau.*