Université de Jijel
Master 1 IA
2024/2025

Série 1 : Optimisation non linéaire sans contraintes

Exercice 1 :

Rechercher les points critiques et déterminer leur nature (maximum local ou global, minimum local ou global, selle (col)) pour les fonctions f définies ci-dessous :

1) $f(x,y) = (x-5)^2 + (y-2)^2$
2) $f(x,y) = 2x^2 + 6y^2 - 5x + 4y$
3) $f(x,y) = 4x^2 - 12xy + y^2$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur R^2 par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1) La fonction f est-elle convexe sur R^2 ?
2) Déterminer les points critiques de f, et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...).

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur R^2 par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$$

1) Déterminer les extremums locaux de f sur R^2.
2) Montrer que f admet un minimum global sur R^2.

Exercice 4 :

Calculer la racine qui se trouve entre 0 et 1.5 de la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en utilisant :

1) La méthode de Newton en prenant x_0 égal 1 avec $ep = 0.0001$.
2) La méthode la sécante en prenant $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$
3) La méthode de régula–falsi en prenant $x^a = 0$ et $x^b = 1$

Exercice 5 (TP à rendre) :

Soit la fonction suivante :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1 + 3x_2 - 2x_3(x_1 + x_2 + 1)$$

1) Cette fonction est-elle convexe sur R^3
2) Ecrire un programme Python calculant le minium de cette fonction :
3) En utilisant la méthode du gradient à un pas fixe et un pas optimal.
4) En utilisant la méthode du gradient conjugué avec un pas optimal
5) En utilisant la méthode de Newton.

Exercice 6 : Nous cherchons le minimum de la fonction :

$$f(x_1, x_2) = 0.5\, x_1^2 + x_2^2 + x_1\, x_2$$

En pregnant $x^0 = (10,-5)$

1. Utiliser la méthode du gradient à un pas optimal pour trouver le minimum de f.
2. Utiliser la méthode du gradient conjugué pour trouver le minimum de f, en prenant un pas optimal et des directions de :
   1.Fletcher-Reevers
   2.Polak-Ribière
3. Ecrire un algorithme détaillé de la méthode du gradient avec un pas optimal.
4. Appliquer la méthode de Newton pour trouver le minimum de f.

Exercice 7: En utilisant la méthode itérative de Newton et en prenant $X^0 = (0, 1)$ résoudre le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1^2 - 2x_2^2 = -1 \\ -x_1 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$