10 Novembre 2025

Université de Jijel
Département de Mathématiques
Master 2 Mathématiques Fondamentales
2024-2025

TD 2
Théorie des groupes des tresses

Exercice 0.1.
Soit $X = \{1, 2, ..., n\}$, $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutation de X, et $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset X$. On appelle cycle de longueur k toute permutation

$$(x_1, x_2, ..., x_k)$$

Tout cycle de longueur 2 est dit transposition.
(1) Calculer $(1, 2)(3, 4)$.
(2) Montrer que tout cycle est le produit de transpositions,

$$(x_1, x_2, ..., x_k) = (x_1, x_2)(x_1, x_3)...(x_1, x_k).$$

(3) Dans $\mathcal{S}_6$, calculer $\pi_1 = (1, 2, 3, 4)(2, 5)$ et $\pi_2 = (1, 2, 3, 4)^{-1}(2, 5)$.

Exercice 0.2.
Démontrer les égalités suivantes dans B_4, en utilisant les relations d'Artin :
(1) $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$.
(2) $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$.
(3) $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$.
(4) $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3 = \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$.

Exercice 0.3.
(1) Vérifier, dans B_5, l'égalité suivante

$$\sigma_4\sigma_2^{-1} = (\sigma_2\sigma_3)^{-1}[\sigma_4\sigma_2^{-1}, \sigma_2\sigma_3^{-1}]\sigma_2\sigma_3,$$

où $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.
(2) Soit F_2 un groupe libre sur deux générateurs x et y. Définissons trois automorphismes de groupes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de F_2 dans F_2 sur les deux générateurs par

$$\varphi_1(x) = x, \varphi_1(y) = xy, \varphi_2(x) = y^{-1}x, \varphi_2(y) = y, \varphi_3(x) = x, \varphi_3(y) = yx.$$

(a) Montrer que les automorphismes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ vérifient les relations des tresses,i.e.,
$\varphi_1 \circ \varphi_3 = \varphi_3 \circ \varphi_1$,
$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$,
$\varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2$.
(b) Montrer qu'il existe un homomorphisme de groupes $\psi : B_4 \to Aut(F_2)$ tels que $\psi(\sigma_i) = \varphi_i$ pour $i = 1, 2, 3$, où $(Aut(F_2), \circ)$ est le groupe des automorphismes de F_2.

Exercice 0.4.
On sait que $B_3 =< \sigma_1, \sigma_2/\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 >$. Posons $x = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ et $y = \sigma_1\sigma_2$.
(1) Montrer que $x^2 = y^3$ et que $B_3 =< x, y/x^2 = y^3 >$.
(2) Montrer que $x^2 \in C(B_3)$, le centre de B_3.

Exercice 0.5.
Montrer que pour tout $n > 1$, le groupe B_n est engendré par les deux éléments σ_1 et $\alpha = \sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-1}$. (indication : $\sigma_i = \alpha^{i-1}\sigma_1\alpha^{1-i}$).