جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

السنة الثانية رياضيات

مقياس الجبر 3 السنة الجامعية 2025/2024

سلسلة الأعمال الموجهة (1)

التمرين 1 :

ليكن E فضاء شعاعي بعده n ، و f و g أندومورفيومين لـ E .

1) أثبت أن مجموعة القيم الذاتية لـ $g \circ f$ تساوي مجموعة القيم الذاتية لـ $f \circ g$.

2) نفرض أن $f \circ g = g \circ f$ وأن f يملك n قيمة ذاتية مختلفة.

أثبت أن كل شعاع ذاتي لـ f هو شعاع ذاتي لـ g .

التمرين 2 :

عين كثير الحدود المميز، القيم الذاتية والفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي للمصفوفات التالية.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

التمرين 3 :

أدرس قابلية التقطير على $\mathbb{R}$ للمصفوفات التالية وفي الحالة الممكنة أعطي المصفوفة القطرية المشابهة ومصفوفة العبور.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

التمرين 4 :

ليكن في $M_3(\mathbb{R})$ المصفوفة M_a المعرفة كما يلي :

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) أدرس حسب قيم a القيم الذاتية للمصفوفة M_a ودرجة التضاعف.

2) عين قيم a التي من أجلها تكون M_a قابلة للتقطير.

التمرين 5 :

ليكن في $M_4(\mathbb{R})$ مصفوفة A قابلة للتقطير بحيث كثير الحدود المميز لها هو :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$$

1) عين كثير الحدود الأصغري لـ A .

2) استنتج عبارة A^{-1} بدلالة A و I_4 .

التمرين 6 :

عين كثير الحدود الأصغري للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

هل A قابلة للتقطير على $\mathbb{R}$ ؟

التمرين 7 : (يترك للطالب)

لتكن في $M_3(\mathbb{R})$ المصفوفة

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) أثبت أن 1 و α هما قيمتان ذاتيتان لـ A_α .

2) أدرس حسب قيم α بعد الفضاء الذاتي E_1 المرفق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

3) عين قيم α التي من أجلها تكون A_α قابلة للتقطير. في الحالات الممكنة عين المصفوفة القطرية المشابهة لـ A_α ومصفوفة العبور.

4) عين التطبيق الخطي $f: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ للمصفوفة A_1 في الأساس $\{1, X, X^2\}$.

5) استنتج، بدون حساب، القيم الذاتية لـ f . هل f قابل للتقطير؟