جامعة محمد الصديق بن يحي - جيجل

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

السنة الثانية رياضيات

مقياس الجبر 3 السنة الجامعية 2025/2024

سلسلة الأعمال الموجهة (2)

التمرين 1 :

ليكن $\mathbb{K}$ حقل تبديلي وليكن الشكل الخطي (أثر مصفوفة) المعرف كما يلي :

$$Tr : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longmapsto Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1) إذا كانت A و B مصفوفتان متشابهتان، أثبت أن $Tr(A) = Tr(B)$.

ملاحظة :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}) : Tr(AB) = Tr(BA)$$

2) لتكن مصفوفة تملك n قيمة ذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. أثبت أن :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad , \quad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

التمرين 2 :

لتكن $A_t \in M_n(\mathbb{R})$ حيث $t \in \mathbb{R}$ ، معرفة كما يلي :

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & t \end{pmatrix} , \qquad \begin{array}{l} a_{ii} = t \, , \ \forall i = \overline{1, n} \\ a_{ij} = 1 \, , \ \forall i, j = \overline{1, n} \, , i \neq j \end{array}$$

1) برهن أن $A_0 = t - 1$ قيمة ذاتية لـ A_t .

2) عين بعد الفضاء الجزئي الذاتي المرفق لـ A_0 ثم استنتج درجة تضاعف λ_0 وباقي القيم الذاتية لـ A_t .

3) أدرس قابلية التقطير لـ A_t .

4) عين قيم t التي من أجلها تكون A_t قابلة للقلب.

5) من أجل $n = 3$ و $t = 2$ ، عين A_2^{-1} و A_2^k من أجل كل $k \in \mathbb{N}$.

التمرين 3 :

1) أدرس قابلية التثليث على $\mathbb{R}$ للمصفوفات التالية وأعطي شكل جوردان في الحالة الممكنة :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

2) حل جملة المعادلات التفاضلية الخطية التالية :

$$(S) \quad \begin{cases}\dfrac{df_1}{dt}=3f_1-f_2-f_3\\ \dfrac{df_2}{dt}=-f_1+2f_2\\ \dfrac{df_3}{dt}=3f_1-2f_2\end{cases}$$

حيث f_1, f_2, f_3 توابع ذات متغير حقيقي t.

التمرين 4 :

لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

1) أثبت أن A قابلة للتثليث على $\mathbb{R}$ وأعطي شكل جوردان.

2) حل جملة المعادلات التفاضلية الخطية التالية :

$$(S) \quad \begin{cases}\dfrac{df_1}{dt}=f_1\\ \dfrac{df_2}{dt}=-f_3\\ \dfrac{df_3}{dt}=f_2+2f_3\end{cases}$$

حيث f_1, f_2, f_3 توابع ذات متغير حقيقي t.