Chapitre 1

Introduction

1.1 Préliminaires

Dans la suite, nous noterons par $\mathcal{E}$ un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ et par $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{E}$. Nous désignerons par I l'unité de $B(E)$.
Pour un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ nous noterons par:

$$\mathcal{I}m\ A = \{Ax\,|x \in \mathcal{D}(A)\}$$

l'image de A et par:

$$\mathcal{K}er\ A = \{x \in \mathcal{D}(A)\,|Ax = 0\}$$

le noyau de A.
L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}m\ A$ est surjectif. Si $\mathcal{K}er\ A = \{0\}$, alors A est injectif. Pour un opérateur bijectif, on peut définir l'opérateur inverse:

$$A^{-1} : \mathcal{D}\left(A^{-1}\right) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

par $A^{-1}y = x$ si $Ax = y$. Evidemment $\mathcal{D}\left(A^{-1}\right) = \mathcal{I}m\ A$. Dans la suite nous noterons par $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. L'ensemble $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ est un ensemble ouvert dans $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ ([**Is'81**, Theorem 4.1.13, pag. 145]).
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous définissons:

$$A^n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathcal{E}$$

par:

$$A^0 = I\ ,\ \ A^1 = A\ ,\ldots,\ \ A^n = A\left(A^{n-1}\right) \quad ,$$

où:

$$\mathcal{D}(A^n) = \left\{x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \,\middle|\, A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A)\right\}$$

quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Lemme 1.1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathcal{E}$ une fonction continue. Alors:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\,ds = f(a) \quad .$$

Preuve Nous avons:

$$\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\,ds - f(a) \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} [f(s) - f(a)]\,ds \right\| \leq \sup_{s\in[a,a+t]} \|f(s) - f(a)\| \quad .$$

L'égalité de l'énoncé résulte de la continuité de l'application f.■

Lemme 1.1.2 *Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $\|A\| < 1$, alors $I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et:*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad .$$

Preuve Soit $Y_n = I + A + A^2 + \ldots + A^n$. Alors:

$$\|Y_{n+p} - Y_n\| \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

Par conséquent, $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite Cauchy. Mais $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ est une algèbre de Banach. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc convergente. Notons $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ sa limite. De l'égalité $(I - A)Y_n = I - A^{n+1}$, il résulte que $\lim_{n\to\infty}(I - A)Y_n = I$, d'où $(I - A)Y = I$.
Nous obtenons $Y(I - A) = I$ de façon analogue.
Finalement, on voit que $I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et que $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.■

Remarque 1.1.3 Si $\|I - A\| < 1$, alors $A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et $A^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (I - A)^n$.

Définition 1.1.4 *L'ensemble:*

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbf{C} \,\middle|\, (\lambda I - A)^{-1} \textit{ est inversible dans} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})\right\}$$

s'appelle l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Proposition 1.1.5 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors $\rho(A)$ est un ensemble ouvert.*

Preuve Définissons l'application:

$$\phi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

par:

$$\phi(\lambda) = \lambda I - A \quad .$$

Evidemment, ϕ est continue. Si $\lambda \in \rho(A)$, alors $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et par suite $\rho(A) = \phi^{-1}\left(\mathcal{GL}(\mathcal{E})\right)$. Comme $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ est un ensemble ouvert, on voit que $\rho(A)$ est ouvert.$\blacksquare$

Définition 1.1.6 *L'application:*

$$R(\,.\,;A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

s'appelle la résolvante de A.

Proposition 1.1.7 *La résolvante d'un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, a les propriétés suivantes:*
i) si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors:

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A) \quad ;$$

ii) $R(\,.\,;A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$;
iii) si $\lambda \in \mathbf{C}$ et $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons:

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad ;$$

iv) Nous avons:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}$$

quels que soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in \rho(A)$.

Preuve i) Nous avons successivement:

$$\begin{aligned} & R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} = \\ = \; & (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A - \lambda I + A) (\mu I - A)^{-1} = \\ = \; & (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A) \end{aligned}$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \rho(A)$.
ii) Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Notons $D\left(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|}\right)$ le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\frac{1}{\|R(\lambda;A)\|}$. Alors, pour $\lambda \in D\left(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|}\right)$, nous avons:

$$\lambda I - A = [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]\,(\lambda_0 I - A) \quad .$$

Mais:

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)\| = |\lambda_0 - \lambda|\|R(\lambda_0; A)\| < 1 \quad .$$

Compte tenu du lemme 1.1.2, il résulte que:

$$I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \in \mathcal{GL}(\mathcal{E}) \quad ,$$

d'où $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et:

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda_0 I - A)^{-1}[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]^{-1} = \\
&= R(\lambda_0; A)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; A)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0; A)^{n+1} \quad .
\end{aligned}$$

Donc $R(\,.\,; A)$ est analytique sur $\rho(A)$.
iii) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$. Alors $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, d'où $I - \lambda^{-1}A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$. De plus:

$$\left(I - \lambda^{-1}A\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda^{-1}A\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n} \quad .$$

Par conséquent:

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I - \lambda^{-1}A\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad .$$

L'assertion (iv) s'obtient par récurrence. Pour $n = 1$, nous avons:

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda; A) = \frac{d}{d\lambda}(\lambda I - A)^{-1} = -(\lambda I - A)^{-2} = R(\lambda; A)^2 \quad .$$

Supposons que pour $k \in \mathbf{N}$, on ait:

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda; A) = (-1)^k k! R(\lambda; A)^{k+1} \quad .$$

Montrons que:

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda; A) = (-1)^{k+1}(k+1)! R(\lambda; A)^{k+2} \quad .$$

Nous avons:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda;A)=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda;A)\right)=\\
=\ &\frac{d}{d\lambda}\left[(-1)^k k!(\lambda I-A)^{-k-1}\right]=\\
=\ &(-1)^k k!(-k-1)(\lambda I-A)^{-k-2}=(-1)^{k+1}(k+1)!R(\lambda;A)^{k+2}
\end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)=(-1)^n n!R(\lambda;A)^{n+1} \quad , \quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*.\blacksquare$$

Remarque 1.1.8 Compte tenu de la proposition 1.1.7 (iii), il résulte que:

$$\{\lambda\in\mathbf{C}\,||\lambda|>\|A\|\,\}\subset\rho(A).$$

Définition 1.1.9 *L'ensemble $\sigma(A)=\mathbf{C}-\rho(A)$ s'appelle le spectre de $A\in\mathcal{B}(\mathcal{E})$.*

Proposition 1.1.10 *Soit $A\in\mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors:*
i) $\sigma(A)\neq\emptyset$;
ii) $\sigma(A)$ est un ensemble compact.

Preuve i) Supposons que $\sigma(A)=\emptyset$. Alors $\rho(A)=\mathbf{C}$. Par conséquent, l'application $\lambda\longmapsto(\lambda I-A)^{-1}$ est définie sur $\mathbf{C}$. De plus, pour $|\lambda|>\|A\|$, nous avons:

$$R(\lambda;A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad , \quad (\forall)\lambda\in\rho(A).$$

Il s'ensuit que:

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}R(\lambda;A)=0.$$

Donc il existe $M>0$ tel que $\|R(\lambda;A)\|<M$, $(\forall)\lambda\in\mathbf{C}$. Le théorème de Liouville ([**DS'67**, pag. 231]) implique que $R(.;A)$ est constante sur $\mathbf{C}$ et que cette constante ne peut être que 0. Donc $(\lambda I-A)^{-1}=0$ pour tout $\lambda\in\mathbf{C}$, ce qui est absurde. Par conséquent $\sigma(A)\neq\emptyset$.
ii) Compte tenu de la proposition 1.1.7 (iii), nous obtenons que:

$$\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbf{C}\,||\lambda|\leq\|A\|\,\}.$$

L'ensemble $\sigma(A)$ est donc borné. Comme nous avons vu que $\sigma(A)$ est un ensemble fermé, il est donc compact.$\blacksquare$

Définition 1.1.11 *Pour un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, le nombre*

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

s'appelle le rayon spectral de A.

Remarque 1.1.12 Evidemment, pour un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $\sigma(A)$ est contenu dans l'intérieur du cercle de centre O et de rayon $r(A)$. De plus, on peut montrer que

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

et on voit que $r(A) \leq \|A\|$.

Par la suite, nous présenterons quelques problèmes concernant la théorie spectrale pour un opérateur linéaire fermé $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

Définition 1.1.13 *L'ensemble:*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{E} \text{ est opérateur bijectif}\}$$

s'appele l'ensemble résolvant de A.

Remarque 1.1.14 Il résulte du théorème du graphe fermé ([**DS'67**, Theorem II.2.4, pag. 57]) que l'opérateur:

$$(\lambda I - A)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est continu dans $\mathcal{E}$.

Définition 1.1.15 *L'application:*

$$R(\,.\,;A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda;A) = (\lambda I - A)^{-1} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \rho(A)$$

s'appelle la résolvante de A.

Proposition 1.1.16 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, un opérateur linéaire fermé. Alors:*
i) $\rho(A)$ est un ensemble ouvert et $R(\,.\,;A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$;
ii) si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors:

$$R(\lambda;A) - R(\mu;A) = (\mu - \lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A) \quad ;$$

iii) Nous avons:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}$$

quels que soient $n \in \mathbf{N}$ *et* $\lambda \in \rho(A)$.

Preuve Elle est analogue à celle de la proposition 1.1.7.■

Définition 1.1.17 *L'ensemble* $\sigma(A) = \mathbf{C} - \rho(A)$ *s'appelle le spectre de* A.

Remarque 1.1.18 $\sigma(A)$ est un ensemble fermé.

Remarque 1.1.19 Il existe des opérateurs fermés qui ont un spectre non borné.

Exemple 1.1.20 Prenons $\mathcal{E} = \mathcal{C}_{[0,1]}$ et considérons l'opérateur:

$$D : \mathcal{C}^1_{[0,1]} \longrightarrow \mathcal{E}$$

défini par:

$$Df = f^{'}$$

Dans ce cas, nous avons $\sigma(D) = \mathbf{C}$.

Définition 1.1.21 *Soit* $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ *un ensemble ouvert. Une application analytique:*

$$\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

qui vérifie la propriété:

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu \quad , \quad (\forall)\lambda, \mu \in \mathbf{D},$$

s'appelle une pseudo-résolvante.

Théorème 1.1.22 *Soit* $\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une pseudo-résolvante. Alors:*
i) $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$, $(\forall)\lambda, \mu \in \mathbf{D}$*;*
ii) $\mathcal{K}er R_\lambda$ *et* $\mathcal{I}m R_\lambda$ *ne dépendent pas de* $\lambda \in \mathbf{D}$*;*
iii) R_λ *est la résolvante d'un opérateur linéaire* A *fermé et défini sur un sous espace dense si et seulement si* $\mathcal{K}er R_\lambda = \{0\}$ *et* $\overline{\mathcal{I}m R_\lambda} = \mathcal{E}$.

Preuve i) Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{D}$. Alors, nous avons:

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$$

et:

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda \quad ,$$

d'où:

$$0 = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu + (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda \quad .$$

Par suite, on a $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.
ii) Soient $\mu \in \mathbf{D}$ et $x \in \mathcal{K}er\ R_\mu$. Alors $R_\mu x = 0$. Si $\lambda \in \mathbf{D}$, on a:

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu x \quad .$$

Donc $R_\lambda x = 0$. Par conséquent $x \in \mathcal{K}er\ R_\lambda$. Il s'ensuit que $\mathcal{K}er\ R_\lambda$ ne dépend pas de $\lambda \in \mathbf{D}$.
Soient $\mu \in \mathbf{D}$ et $y \in \mathcal{I}m\ R_\mu$. Alors il existe $x \in \mathcal{E}$ tel que $R_\mu x = y$. Si $\lambda \in \mathbf{D}$, nous avons:

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu x \quad .$$

Donc:

$$R_\lambda x - y = (\mu - \lambda) R_\lambda y \quad ,$$

ou bien:

$$y = R_\lambda \left(x + (\lambda - \mu) y\right) \quad .$$

Donc il existe $u = x + (\lambda - \mu) y \in \mathcal{E}$ tel que $y = R_\lambda u$. Par conséquent $y \in \mathcal{I}m\ R_\lambda$. Il s'ensuit que $\mathcal{I}m\ R_\lambda$ ne dépend pas de $\lambda \in \mathbf{D}$.
iii) $\Longrightarrow$ Si R_λ est une résolvante pour un opérateur linéaire A fermé et défini sur un sous espace dense, alors R_λ est une application bijective, d'où $\mathcal{K}er\ R_\lambda = \{0\}$ et $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$. Par suite, ${R_\lambda}^{-1} = \lambda I - A$ et $\overline{\mathcal{D}\left({R_\lambda}^{-1}\right)} = \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$. Par conséquent $\overline{\mathcal{I}m\ R_\lambda} = \overline{\mathcal{D}\left({R_\lambda}^{-1}\right)} = \mathcal{E}$.
$\Longleftarrow$ Soient $\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une pseudo-résolvante et $\lambda \in \mathbf{D}$ tel que $\mathcal{K}er\ R_\lambda = \{0\}$. Alors pour $y \in \mathcal{I}m\ R_\lambda$, il existe un seul $x_\lambda \in \mathcal{E}$ tel que $y = R_\lambda x_\lambda$. Mais pour $\lambda, \mu \in \mathbf{D}$, on a:

$$R_\lambda y - R_\mu y = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu y \quad .$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} R_\lambda y - R_\mu y &= R_\lambda R_\mu x_\mu - R_\mu R_\lambda x_\lambda = \\ = \quad & R_\lambda R_\mu x_\mu - R_\lambda R_\mu x_\lambda = R_\lambda R_\mu \left(x_\mu - x_\lambda\right) \quad . \end{aligned}$$