d'où il résulte que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy. Puisque $\mathcal{E}$ est un espace de Banach, il s'ensuit que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point $x \in \mathcal{E}$. Alors, on en déduit que:

$$Ax_n \longrightarrow \alpha x - y \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

et comme A est un opérateur fermé, on obtient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\alpha x - Ax = y$. Par suite, $\mathcal{I}m\ (\alpha I - A) = \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est fermé dans $]0,\infty)$ et comme il existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, nous déduisons que $\mathcal{A} =]0,\infty)$.■

1.3 Semi-groupes uniformément continus

Dans la suite nous présenterons quelques problèmes concernant les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach $\mathcal{E}$.

Définition 1.3.1 *On appelle semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{E}$ une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes:*
i) $T(0) = I$;
ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad , \quad (\forall)t, s \geq 0$;
iii) $\lim_{t\searrow 0} \|T(t) - I\| = 0$.

Définition 1.3.2 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire:*

$$A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad ,$$
$$A = \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} \quad .$$

Lemme 1.3.3 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{E}$ dont le générateur infinitésimal est A.*

Preuve Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une application définie par:

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \quad .$$

La série du membre de droite de l'égalité est convergente pour la topologie de la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. De plus, il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s)$ quels que soient $t, s \geq 0$.
Compte tenu de l'inégalité:

$$\|T(t) - I\| \leq e^{t\|A\|} - 1 \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

il résulte:

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0 \quad .$$

Donc la famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe uniformément continu.
D'autre part, puisque:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \left(e^{tA} - I - tA \right) \right\| = \left\| \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA \right) \right\| = \\ = & \left\| \frac{1}{t} \left(I + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA \right) \right\| \leq \frac{1}{t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \\ = & \frac{1}{t} \left(1 + t\|A\| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} - 1 - t\|A\| \right) = \frac{1}{t} \left(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\| \right) = \\ = & \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t\|A\|} \|A\| - \|A\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \searrow 0, \end{aligned}$$

nous obtenons:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A \quad .$$

Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admet donc pour générateur infinitésimal l'opérateur A.■

Lemme 1.3.4 *Etant donné un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il existe un unique semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tel que:*

$$T(t) = e^{tA} \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un autre semi-groupe uniformément continu engendré par A, nous avons:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A$$

et:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{S(t) - I}{t} = A \quad .$$

Par conséquent:

$$\lim_{t\searrow 0}\left\|\frac{T(t)-S(t)}{t}\right\|=0 \quad .$$

Pour $a\in]0,\infty)$, nous considérons l'intervalle $I_a=[0,a[$. Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sont des semi-groupes uniformément continus, nous voyons que les applications:

$$t\longmapsto \|T(t)\|$$

et:

$$t\longmapsto \|S(t)\|$$

sont continues. Il existe $c_a\in[1,\infty)$ tel que:

$$\sup_{t\in I_a}\{\|T(t)\|,\|S(t)\|\}\leq c_a \quad .$$

Si $\varepsilon>0$, il existe $t_0\in I_a$, $t_0>0$, tel que:

$$\left\|\frac{T(t)-S(t)}{t}\right\|\leq\frac{\varepsilon}{ac_a^2} \quad , \quad (\forall)t\in]0,t_0[.$$

Soit $t\in I_a$ arbitrairement fixé et $n\in\mathbf{N}$ tel que $\frac{t}{n}\in]0,t_0[$. Alors:

$$\begin{aligned}
&T(t)-S(t)=\left[T\left(n\frac{t}{n}\right)\right]-\left[S\left(n\frac{t}{n}\right)\right]=\\
=\ & T\left(n\frac{t}{n}\right)S\left(0\frac{t}{n}\right)-T\left((n-1)\frac{t}{n}\right)S\left(1\frac{t}{n}\right)+\\
+\ & T\left((n-1)\frac{t}{n}\right)S\left(1\frac{t}{n}\right)-T\left((n-2)\frac{t}{n}\right)S\left(2\frac{t}{n}\right)+\\
+\ & T\left((n-2)\frac{t}{n}\right)S\left(2\frac{t}{n}\right)-\cdots-T\left(0\frac{t}{n}\right)S\left(n\frac{t}{n}\right)=\\
=\ & \sum_{k=0}^{n-1}\left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(k\frac{t}{n}\right)-T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left((k+1)\frac{t}{n}\right)\right]=\\
=\ & \sum_{k=0}^{n-1}T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\left[T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)\right]S\left(k\frac{t}{n}\right)
\end{aligned}$$

quel que soit $t\in I_a$.

De l'inégalité:

$$\left\|\frac{T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}\right\|\leq\frac{\varepsilon}{ac_a^2} \quad ,$$

nous obtenons:

$$\left\|T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)\right\|\leq\frac{\varepsilon}{ac_a^2}\frac{t}{n}$$

et par suite:

$$\|T(t) - S(t)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_a \frac{\varepsilon}{ac_a^2} \frac{t}{n} c_a < \varepsilon \quad , \quad (\forall) t \in I_a.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en résulte que $T(t) = S(t)$, pour tout $t \in I_a$. Mais, comme $a \in]0, \infty)$ est aussi arbitraire, il s'ensuit que $T(t) = S(t)$, $(\forall) t \in [0, \infty)$.■

Présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 1.3.5 *Un opérateur $A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Preuve $\Longrightarrow$ Soit $A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors:

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0 \quad .$$

L'application $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est continue et par suite $\int_0^t T(s)\, ds \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Avec le lemme 1.1.1, on voit que:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\, ds = T(0) = I \quad .$$

Il existe donc $\tau > 0$ tel que:

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(t)\, dt - I \right\| < 1 \quad .$$

Compte tenu de la remarque 1.1.3, l'élément $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(t) dt$ est inversible, d'où il s'ensuit que $\int_0^\tau T(t)\, dt$ est inversible. Nous avons:

$$\frac{T(h) - I}{h} \int_0^\tau T(t)\, dt = \frac{1}{h} \left[\int_0^\tau T(t+h)\, dt - \int_0^\tau T(t)\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} T(u)\, du - \frac{1}{h} \int_0^h T(u)\, du \quad .$$

Avec le lemme 1.1.1, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^\tau T(t)\,dt = \\
= \quad & \lim_{h\searrow 0}\left[\frac{1}{h}\int_\tau^{\tau+h} T(u)\,du - \frac{1}{h}\int_0^{0+h} T(u)\,du\right] = \\
= \quad & T(\tau)-T(0) = T(\tau)-I \quad ,
\end{aligned}$$

d'où:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)-I}{h} = [T(\tau)-I]\left[\int_0^\tau T(t)\,dt\right]^{-1} .$$

Par conséquent, le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur:

$$A = [T(\tau)-I]\left[\int_0^\tau T(t)\,dt\right]^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \quad .$$

$\Longleftarrow$ Cette implication est évidente compte tenu du lemme 1.3.3 et du lemme 1.3.4.■

Corollaire 1.3.6 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe uniformément continu et* A *son générateur infinitésimal. Alors:*
i) il existe $\omega \geq 0$ *tel que* $\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0$;
ii) l'application $[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *est différentiable pour la topologie de la norme et:*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve i) Nous avons:

$$\|T(t)\| = \left\|e^{tA}\right\| \leq e^{t\|A\|} \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Pour $\omega = \|A\|$, nous obtenons l'inégalité:

$$\|T(t)\| \leq e^{\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

L'assertion (ii) provient des égalités suivantes:

$$A = \lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)-I}{t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)-T(0)}{t-0} \quad ,$$

nous en déduisons que l'application considérée est dérivable au point $t = 0$.

Soient $t > 0$ et $h > 0$. Alors:

$$\left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \|T(t)\| \leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| e^{t\|A\|} \quad ,$$

d'où:

$$\lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| = 0 \quad .$$

Par conséquent, l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à droite et on a:

$$\frac{d^+T(t)}{dt} = AT(t) \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

Soient $t > 0$ et $h < 0$ tel que $t + h > 0$. Alors:

$$\left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| \frac{I - T(-h)}{h} - AT(-h) \right\| \|T(t+h)\| \leq$$
$$\leq \left\| \frac{T(-h) - I}{-h} - AT(-h) \right\| e^{(t+h)\|A\|} \quad ,$$

d'où il vient:

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = AT(t) \quad .$$

Par conséquent l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à gauche et nous avons:

$$\frac{d^-T(t)}{dt} = AT(t) \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

Finalement on voit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, \infty)$ et nous avons:

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

On vérifie que $AT(t) = T(t)A$, $(\forall) t \geq 0$.■

Maintenant abordons quelques problèmes de théorie spectrale pour un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour le générateur infinitésimal l'opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Théorème 1.3.7 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $Re\lambda > \|A\|$, alors l'application:*

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad ,$$