



DEVOIR N°1

Résolution des problèmes 1 D par Différences Finies (Application aux écoulements souterrains)

Motivation :

La modélisation et calculs des écoulements souterrains revêtent un grand intérêt dans la gestion rationnelle moderne de la ressource hydrique. Ainsi, cherche-t-on à prédire la ligne phréatique d'une nappe aquifère sous influence de pompages et/ou recharge de surface, naturelle ou artificielle suivant la perméabilité du sol et de décider alors de l'exploitation rationnelle de la nappe. Pour ce faire, l'outil numérique se présente comme la clef d'aide à la décision par la résolution numérique des équations différentielles de l'écoulement souterrain.

Modèle simplifié :

Pour approcher l'écoulement à surface libre d'une nappe aquifère et simuler l'influence des diverses recharges de surface sur le niveau piézométrique de la nappe, on doit adopter un modèle hydraulique simplifié (fig.1). Nous considérerons la nappe libre, sujette à l'investigation numérique, comme homogène et isotrope, constituée d'un substratum imperméable horizontal et d'un toit perméable. L'écoulement sera alors considéré comme unidimensionnel. L'adoption de l'hypothèse de *Dupuit* stipulant l'uniformité du profil de vitesse, sans effet de courbure des lignes de courant, sera aussi invoquée. Ceci fait que le champ d'écoulement pourrait être représenté par un point de calcul unique pour chaque section vertical de l'aquifère.

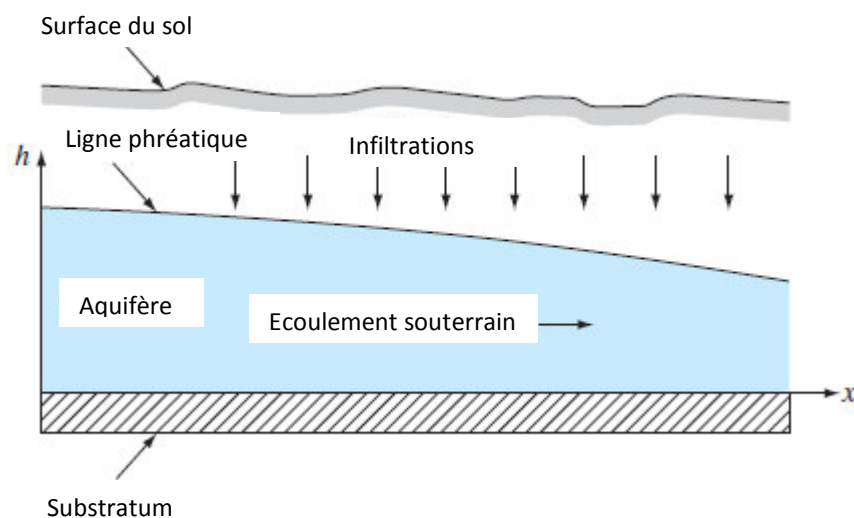


Figure 1 : Schéma simplifié du problème de la nappe en recharge

Nous adopterons à cet effet, pour les besoins de la présente investigation numérique, les données suivantes du réservoir aquifère :

Longueur L (m)	Perméabilité K (m/jour)	Infiltration I (m/jour)	Niveau moyen \bar{h} (m)
1000	01	0,0001	7,5

Modèle mathématique du problème :

Le mouvement permanent de l'écoulement dans la nappe aquifère avec apport massique extérieur est régi, dans son cas simplifié, par une équation différentielle linéaire de second ordre qui s'écrit :

$$K \bar{h} \frac{d^2 h}{dx^2} + I = 0$$

Avec

h : Niveau piézométrique (m) ;

k : Conductivité hydraulique de la nappe aquifère (m/j) ;

\bar{h} : Niveau piézométrique moyen de la nappe (m) ;

I : Taux d'infiltration (m/j)

La solution particulière de cette équation différentielle sera obtenue par adjonction des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} h(0) = 10 \text{ m} & \text{(Conditions à la frontière gauche)} \\ h(1000) = 5 \text{ m} & \text{(Conditions à la frontière droite)} \end{cases}$$

Travail demandé :

En s'appuyant sur les données géométriques, caractéristiques de l'aquifère et le modèle mathématique du problème, le travail demandé consiste en ce qui suit:

1. Ecrire la solution numérique de l'équation différentielle par la méthode des différences (schéma centré) et déduire la matrice nodale ;
2. Former la matrice globale du système et inclure les conditions aux frontières ;
3. Résoudre le système matriciel et tracer le profil piézométrique de la nappe pour une discrétisation $\Delta x = 100 \text{ m}$. Comparer avec la solution analytique, interpréter et conclure.

Organisation du rapport

Le compte rendu du devoir sera sous forme de rapport explicatif de l'étude comportant les éléments suivants :

- Introduction et présentation de la problématique
- Modèle mathématique
- Discrétisation numérique
- Résultats et interprétation
- Conclusion
- Références bibliographiques

N.B. : Le compte rendu du travail doit être rédigé à la main, de manière claire et ordonnée. La date limite de remise du devoir est de quinze (15) jours à compter du jour de sa réception.