

## 1- Introduction

La théorie de la plasticité a été développée, au début des années trente (1930), initialement pour les métaux, bien qu'elle puisse être appliquée à d'autres types de matériaux. Pour montrer les aspects, dont la plasticité possède, étudions, par exemple, le cas d'une barre métallique soumise à la traction pure. Celui est un cas unidimensionnel, facilement interprété, dans laquelle nous observons les caractéristiques suivantes comme illustrer dans la figure (1).

Un comportement proche de l'élasticité linéaire jusqu'à ce que la contrainte appliquée atteigne une certaine valeur limite  $\sigma_Y$  ( $\sigma_s$  ;  $\sigma_0$ ), (qu'on l'appelle limite d'élasticité).

Une fois atteint cette valeur, on aura un **changement de comportement**, pour laquelle les déformations augmentent beaucoup plus rapide, tandis que la contrainte demeure sensiblement constante ou il varie légèrement: **le matériel s'écoule**.

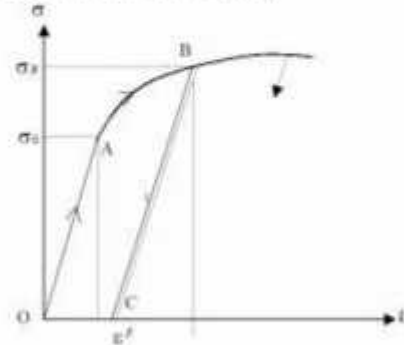


Fig. -1- : Essai de traction uniaxiale

- Une fois atteint le régime élasto-plastique, (c'est à dire, après que la contrainte dépassera la valeur limite  $\sigma_Y$ ), les déformations ne sont plus réversibles dans sa totalité. En effet, observant un cycle de charge et décharge comme le chemin **OAB** (fig.-1), notons que la déformation au niveau de point A vaut :

$$\epsilon_A = (\epsilon_A - \epsilon_B) + \epsilon_B$$

- Aboutissant à une certaine valeur de déformation, se produira la rupture du matériel.

Dans cette figure nous pouvons voir que, pour un point **P** quelconque dans le repère  $\sigma$ - $\epsilon$ , la déformation possède deux composants: élastique, récupérable, et plastique, non récupérable:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

Nous rappelons que l'expérience met en évidence l'existence d'un domaine d'élasticité à l'intérieur duquel les déformations sont réversibles. La définition donnée à la partie II peut être généralisée.

## 2-Fondements de la théorie de la plasticité-3D

### 2-1- Existence de domaine élastique

Il existe de multiples procédés expérimentaux qui permettent d'accéder au comportement des matériaux soumis à des sollicitations plus complexes que la simple *traction-compression uniaxiale* précédemment examinée. Citons par exemple l'*essai "triaxial de révolution"* utilisé couramment pour les sols, roches ou bétons, schématisé sur la figure (2-a), ou bien l'*essai de "traction-compression-torsion"* représenté sur la figure (2-b), employé pour tester des matériaux métalliques ou composites sous sollicitation de *traction-compression-scission* obtenue en chaque.

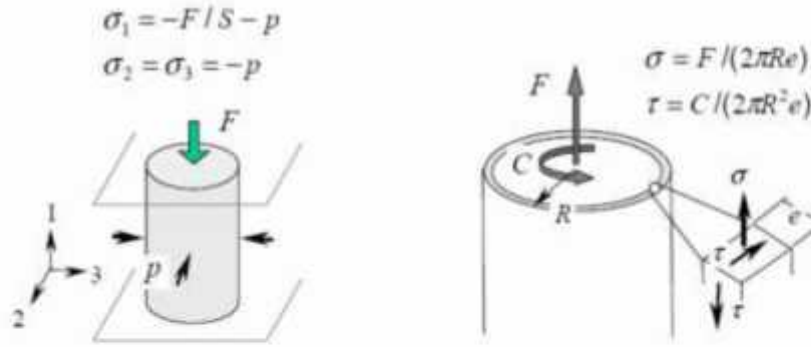
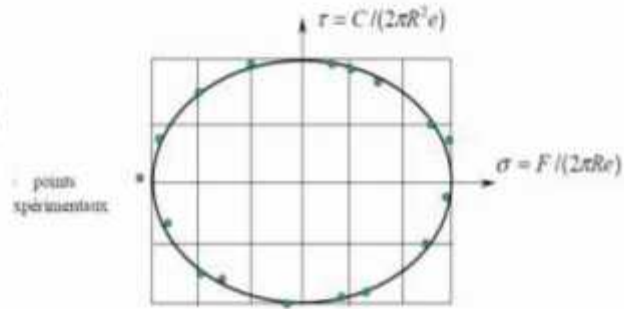


Fig. -2- : Exemples d'essais "multiaxiaux".

La figure (3) représente dans le plan  $(\sigma, \tau)$ , un domaine de forme elliptique, déterminé expérimentalement à l'aide de ce dernier essai, à l'intérieur duquel le comportement du tube (du matériau), demeure *élastique*. Dès que le point représentatif du chargement franchit le seuil du domaine, appelé *domaine d'élasticité initial*, pour revenir ensuite à l'état déchargé ( $\sigma = \tau = 0$ ), il subsiste un allongement et une rotation résiduels. L'écroutissage du matériau se traduit par une modification du domaine d'élasticité.

Fig.-3- : Détermination expérimentale du domaine d'élasticité initial à l'aide d'un essai de traction-compression-torsion (d'après Bui, 1969).



Une fois le comportement élastoplastique est atteint l'état de contrainte demeure sur la surface limite définie par la fonction de charge.

Étant donné, que le matériel expérimente un changement de comportement pendant l'étape de chargement. Pour cette raison, les relations contraintes-déformations doivent être écrites de forme incrémentielle. Nous utiliserons les annotations suivantes de manière indistincte:

$$\Delta \sigma_{li} \leftrightarrow \Delta \epsilon_{li} \quad \text{Ou bien} \quad \dot{\sigma}_{li} \leftrightarrow \dot{\epsilon}_{li} \quad \text{ou bien} \quad d\sigma_{li} \leftrightarrow d\epsilon_{li}$$

## 2-2- Hypothèse d'additivité

Le principe de base, de la théorie de plasticité, est que dans tout moment il peut se produire de déformations élastiques (réversibles), et plastiques (non réversibles), et que la déformation totale c'est la somme des deux quantités:

$$d\epsilon_{li} = d\epsilon_{li}^e + d\epsilon_{li}^p$$

Totale    Élastique    Plastique

Les déformations élastiques, sont calculées avec la théorie de l'élasticité, bien que les paramètres ne peuvent pas être constates:

$$d\epsilon_{li}^e = C_{ij} d\sigma_k \quad \text{Ou} \quad d\sigma_k = D_k d\epsilon_{li}^e$$

### 3. Critères de plasticité

Un critère de rupture (*loi de comportement*) est une fonction de contraintes. Pour un matériau sans écrouissage (plasticité parfaite), ce critère ne peut être dépassé en aucun point. Les déformations sont régies par une loi dite loi d'écoulement. Plusieurs critères de plasticité sont employés pour décrire le comportement des matériaux. On trouve des critères à un seul paramètre, critères à deux paramètres, critères à cinq paramètres et des critères à plusieurs paramètres.

#### 3-1- Critère de Von Mises

L'expérience montre que pour les métaux, tout état de contraintes «hydrostatique» est admissible. C'est à dire que quel que soit la charge, il n'y a pas de déformations plastiques.

En conséquence :

- Le domaine d'élasticité est représenté par un domaine ouvert non borné d'axe d'isotropie (1,1,1) ou l'axe hydrostatique, dans l'espace des contraintes principales.
- L'expression du critère  $F_o(\bar{\sigma})$  doit être indépendante de la partie sphérique du tenseur des contraintes.

Pour exprimer le critère nous utilisons donc le tenseur déviateur des contraintes défini par :

$$\bar{\sigma}_d = \bar{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\sigma}) \mathbf{1} \rightarrow \text{Partie sphérique notée } \bar{\sigma}_s$$

Le critère de *Von Mises* est la forme la plus simple utilisant le premier invariant non nul du déviateur des contraintes :

$$J_1(\bar{\sigma}_d) = t_1(\bar{\sigma}_d) = 0 \quad \text{et} \quad J_2(\bar{\sigma}_d) = t_2(\bar{\sigma}_d^2) = \bar{\sigma}_d : \bar{\sigma}_d$$

$$\text{Soit la fonction de charge} \quad F_o(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_d : \bar{\sigma}_d - k^2$$

La représentation graphique de la fonction de charge initiale dans  $\mathcal{R}^3$  espace des contraintes principales est une surface cylindrique non bornée d'axe hydrostatique (1,1,1) de rayon  $\sqrt{2}\sigma_s$ .

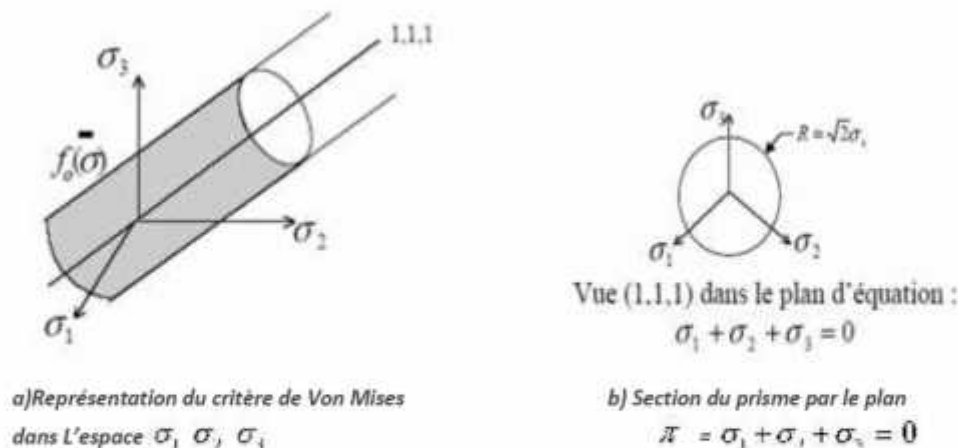


Fig. -4- : Représentation du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes

En pratique la définition du domaine d'élasticité, utilisant le critère de *Von Mises*, est la suivante:

$$\left\{ \bar{\sigma} ; \quad \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}_d : \bar{\sigma}_d} - \sigma_s \leq 0 \right\} \quad \text{Le seuil } \sigma_s \text{ à la dimension d'une contrainte que l'on peut identifier à } \sigma_0 \text{ dans le cas de l'essai de traction.}$$



La grandeur  $\sigma_V = \sqrt{\frac{3}{2} \overline{\sigma_d}} : \overline{\sigma_d}$  est appelée **contrainte équivalente de Von Mises**.

D'où en termes de contraintes principales :

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\text{Et } F_\sigma(\overline{\sigma}) = \sigma_V - \sigma_s$$

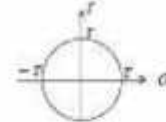
### 3-2- Critère de Tresca

Ce critère est originalement développé et utilisé pour les métaux. Selon ce critère, la plastification prend place lorsque la contrainte maximale de cisaillement (tangentielle) dans un point atteint une valeur critique **k** (*propriété de matériau*). Mathématiquement ce critère peut s'exprimer comme :

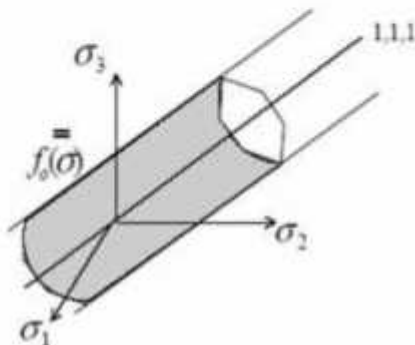
$$\{\overline{\sigma} : \forall i, j \in [1, 3] \quad |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_s \leq 0\}$$

La contrainte équivalente de Tresca est définie par :  $\sigma_T = m \quad |\sigma_i - \sigma_j|$

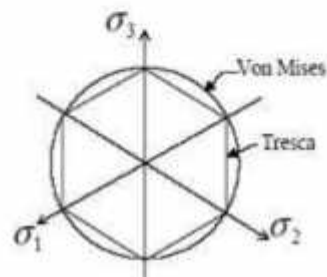
Pour l'essai de cisaillement simple, une représentation de Mohr (voir figure ci-contre) permet de voir que l'expression du critère de **TRESCA** est :  $|2\tau| - \sigma_s \leq 0$ . La limite d'élasticité en cisaillement simple est donc :  $2\sigma_s$ .



La représentation graphique fonction de charge initiale dans  $\mathcal{R}^3$  espace des contraintes principales est une surface cylindrique de base hexagonale non bornée d'axe (1,1,1).



a) Représentation du critère de Tresca dans l'espace  $\pi$ .



b) Section du prisme par le plan  $\pi : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

Fig. -5- : Représentation du critère de Tresca dans l'espace des contraintes

En fonction de contraintes principales, on peut exprimer le critère de Tresca comme :

$$\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| = k \quad \text{c.à.d.} \quad F(\sigma) = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3| - k = 0$$

$$\text{Ou } k = \sigma_s \quad (\sigma_0 \text{ ou } \sigma_y) \quad (\text{seuil de plasticité}).$$

**Remarque :** l'addition d'un tenseur sphérique quelconque au tenseur des contraintes ne modifie pas la valeur de la contrainte équivalente de **Tresca**. Tout état de contraintes hydrostatique est donc admissible. Comme pour **Von Mises** ce critère est indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes.

### 3-3- Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de **Mohr-Coulomb**, indique que la rupture est gouvernée par la relation suivante :

$$F(\bar{\sigma}) = |\tau_r| = c + \sigma_r \cdot \tan(\varphi) = 0$$

$c$  : La cohésion et  $\varphi$  ; L'angle de frottement, représentent les paramètres du modèle.

Avec :  $\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} C(2)$  ; Et au moment de rupture :  
 $|\tau| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} S(2)$

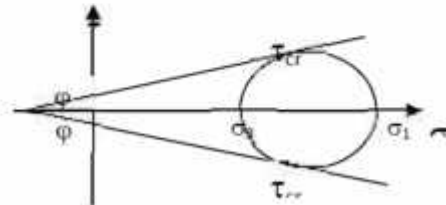
Si on remplace, l'expression de la fonction de charge peut être écrite sous la forme :

$$F(\bar{\sigma}) = (1 - S(\varphi)) \cdot \sigma_1 - (1 + S(\varphi)) \cdot \sigma_3 - 2 \cdot c \cdot C(\varphi) = 0$$

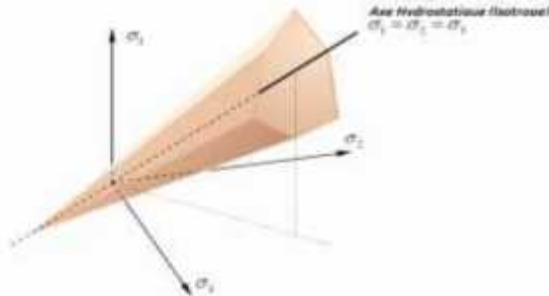
Avec  $C(2) = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$  et  $S(2) = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$

Il s'agit de l'équation d'un plan, son intersection avec l'axe hydrostatique se caractérise par

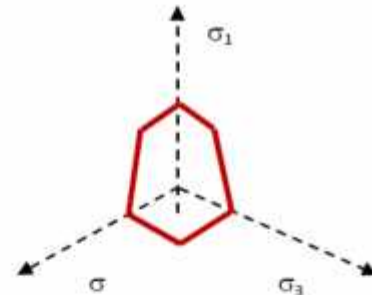
$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{2c}{1 - \sin \varphi} = \sigma_c \quad (1)$$



Il s'agit de l'équation d'une pyramide à base hexagonale non uniforme (Surface de rupture), dont l'axe est l'axe hydrostatique  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$



a) Représentation du critère de Von Mises dans l'espace



b) Section du prisme par le plan  $\pi: \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = 0$

Fig. -6- : Représentation du critère de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes

Le critère de **Mohr-Coulomb** a été largement employé dans la modélisation du comportement du sol vu sa simplicité et vue la considération des paramètres physiques du sol à savoir la cohésion  $c$  et l'angle de frottement  $\varphi$ . Par ailleurs le critère possède certaines insuffisances et qui peuvent être énumérées ci-dessous.

1. La contrainte moyenne n'a aucune influence sur le critère de rupture ;
2. Les méridiennes et l'enveloppe de rupture sont des lignes droites, ce qui signifie que l'angle de frottement interne ne varie pas avec la pression de confinement. Ce qui est contraire aux observations expérimentales ;
3. La surface de rupture possède des angles (des singularités de point de vue mathématique), ce qui rend difficile son implantation numérique.

#### 4- Lois de comportement élastique linéaire – parfaitement plastique

Dans cette section, une modélisation du comportement du sol par une loi élastique parfaitement plastique sera présentée. En géotechnique, on utilise très couramment, la loi élastique linéaire, parfaitement plastique avec les critères de plasticité (de rupture), de *Mohr-Coulomb*. La loi de comportement modélise les courbes en termes de déviateur de contraintes et déformation volumique en fonction de la déformation axiale.

##### 4-1- Présentation des résultats de l'essai triaxial

Les résultats obtenus durant la réalisation des essais triaxiaux à partir d'un état de consolidation quelconque, drainés ou non drainés, d'un sol sous une contrainte isotrope  $\sigma'_3$ . La variation du déviateur  $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$  en fonction de la déformation axiale  $\varepsilon_1$ ; et l'évolution de la variation volumique  $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2 \varepsilon_3$  en fonction de la déformation axiale  $\varepsilon_1$  (Fig. -7).

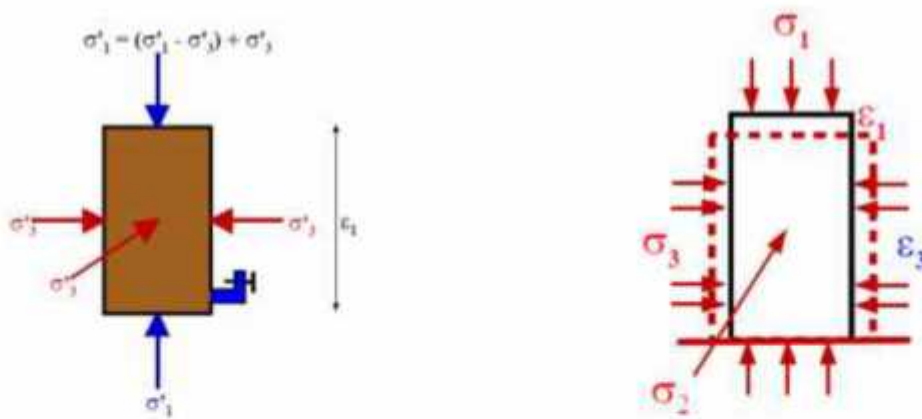


Fig. -7- : Cisaillement triaxial en compression : contraintes et déformations

Puisque Le sol est normalement consolidé, dès qu'on applique un déviateur de contraintes le sol se plastifie. Pour des grandes déformations l'échantillon va atteindre un *état critique*.

Quand on atteint les **états critiques** pour de grandes déformations

- Si les essais sont **drainés** ( $\Delta u = 0$ ) et  $\Delta e$  ou  $\Delta v \neq 0$  (Fig. -8).
  - $e$  ou  $v$  devient constant **indice des vides critique** (*critical void ratio*) :

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_1} = 0$$

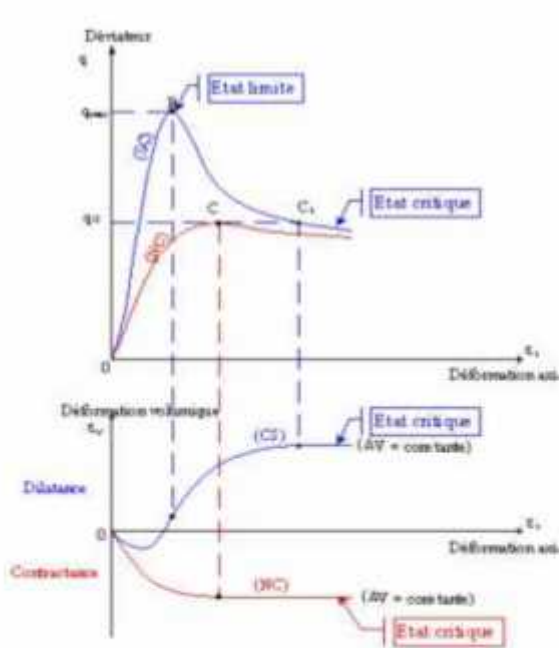
- $q$  devient constant :  $\frac{\partial q}{\partial \varepsilon_1} = 0$

- Si les essais sont **non drainés** ( $\Delta u \neq 0$ ) et  $\Delta e$  ou  $\Delta v = 0$  (Fig. -9).

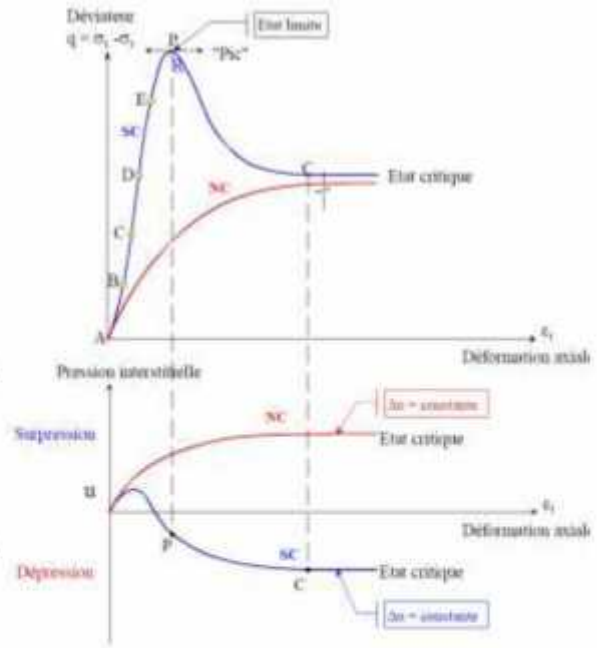
- la surpression interstitielle  $\Delta u$  devient constante :  $\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_1} = 0$

- $q$  devient constant :  $\frac{\partial q}{\partial \varepsilon_1} = 0$





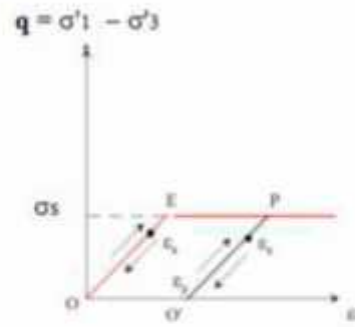
**Fig. -8- :** Exemples d'état limite et d'états critiques pour un essai triaxial consolidé – drainé sur des sols saturés NC et SC



**Fig. -9- :** Exemples d'état limite et d'états critiques pour un essai triaxial consolidé – Non drainé sur des sols saturés NC et SC

Concernant la courbe déviateur- déformation axiale, sous un premier chargement, si la valeur du déviateur  $q$  est inférieure à un certain seuil (limite élastique)  $\sigma_s$  donné par la loi de plasticité, on considère que le comportement du sol est élastique linéaire (Fig. -10).

**Fig. -10- :** Courbes déviateur – déformation axiale pour la loi élastique -linéaire parfaitement plastique

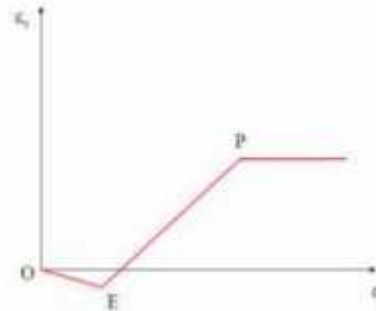


Entre les points **O** et **E** le déviateur est proportionnel à la déformation axiale  $\sigma'_1 - \sigma'_3 = k \cdot \epsilon_1$ . Les chemins de chargement **OE** et de déchargement **EO** sont identiques. Dès qu'un point du sol atteint le seuil de plasticité  $\sigma_s$  la déformation tend vers une valeur infinie et suit le chemin **EP** tant qu'on maintient le déviateur égal à  $\sigma_s$ . Si on procède ensuite, à partir du point **P**, à un déchargement **PO'**, le chemin de contraintes au déchargement suit la même pente qu'au chargement, la pente au déchargement est donc identique à la pente de premier chargement.

Au déchargement complet il subsiste une déformation permanente plastique  $\epsilon_p$ . Ensuite si on opère un rechargement, le chemin de contrainte **O'P** va suivre la même pente jusqu'au même seuil de plasticité  $\sigma_s$ , la déformation totale étant alors  $\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_e$ . Enfin si le déviateur atteint à nouveau  $\sigma_s$ , la déformation totale tend à nouveau vers l'infini.

Concernant la courbe déformation volumique – déformation axiale, sous un premier chargement, si la valeur du déviateur  $q$  est inférieure à un certain seuil  $\sigma_s$  donné par la loi de plasticité, on considère que le comportement du sol est élastique linéaire (Fig. -11).

**Fig. -11- :** Courbes déformation volumique déformation axiale pour la loi élastique - linéaire parfaitement plastique



Entre les points **O** et **E**, le volume de l'échantillon diminue, proportionnellement à la déformation axiale. Quand le déviateur atteint le seuil de plasticité  $\sigma_s$ , suivant l'état initial du sol et la contrainte  $\sigma'_3$ , le volume de l'échantillon augmente, il se dilate, phénomène de dilatance ou se contracte, phénomène de contractance (Fig. -12 & 13). Pour de grandes déformations, au-delà du point **P**, par exemple, on atteint l'état critique pour lequel la déformation volumique ne varie plus.

#### 4-2- Loi de comportement de Mohr – Coulomb

Le modèle *élastique linéaire parfaitement plastique* avec critère de plasticité de Mohr – Coulomb est encore le modèle le plus utilisé dans la pratique courante de la géotechnique, en principe seulement pour les chemins monotones (*sans cycles de chargement – déchargement*), pour les sols grenus (sable et gravier) et le comportement drainé, à long terme, des sols fins saturés (*limon et argile*). On étudie d'abord le critère de plasticité qui permettra de définir ensuite le domaine d'élasticité.

On se basant sur le critère de Mohr-Coulomb :

$$\sin \varphi' = \frac{\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}}{\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + C' \cdot \cot \varphi'}$$

Il se caractérise, pour le modèle complet, élastique – parfaitement plastique par une élasticité linéaire isotrope de paramètre  $E'$  et  $\nu'$  et un seuil de plasticité  $\sigma_s$  (Fig. -16) tel que :

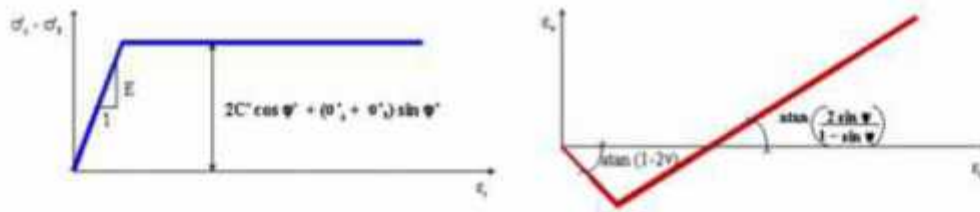
$$(\sigma'_1 - \sigma'_3) = 2 \cdot C' \cdot \cot \varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \cdot \sin \varphi'$$

Si  $(\sigma'_1 - \sigma'_3) < 2 \cdot C' \cdot \cot \varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \cdot \sin \varphi'$  le sol est dans le domaine élastique

Si  $(\sigma'_1 - \sigma'_3) = 2 \cdot C' \cdot \cot \varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \cdot \sin \varphi'$ , le sol est dans le domaine plastique ;

Il est impossible que  $(\sigma'_1 - \sigma'_3) > 2 \cdot C' \cdot \cot \varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3) \cdot \sin \varphi'$





**Fig. -12- :** Caractéristiques de la loi élastique-linéaire parfaitement plastique.  
Critère de rupture Mohr-Coulomb

La contrainte principale intermédiaire  $\sigma'_2$  ne joue aucun rôle,  $\varphi'$ ,  $C'$ ,  $\psi$  ont les définitions suivantes :

- $\varphi'$  : angle de frottement interne du sol, correspond à un frottement solide dans un squelette de grains ou de particules ;
- $C'$  : cohésion entre les particules fines du sol, « colle » entre les particules qui existe sous certaines conditions ;
- $\psi$  : l'angle de dilataance du sol, il représente l'augmentation de volume du squelette du sol qui se produit pendant le cisaillement du sol, le contraire est la contractance.

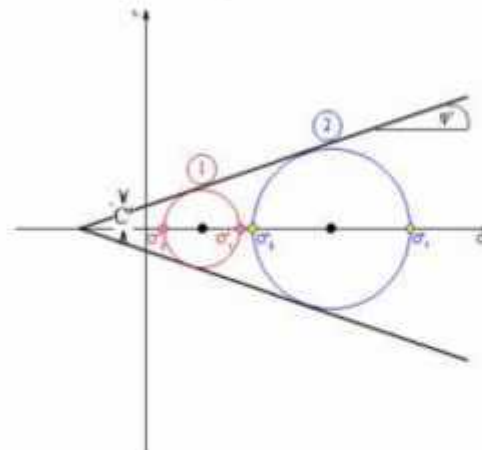
Les valeurs de  $\varphi'$  et  $C'$  sont calculées dans les axes de Mohr, Cambridge ou Lambe.

#### 4-3- Détermination de $\varphi'$ et $C'$ dans les axes de Mohr

Les courbes déviateur  $q$  ( $\sigma'_1 - \sigma'_3$ ) en fonction de la déformation axiale  $\varepsilon_1$  (Fig. - 8 & 9) permettent de déterminer le déviateur à la rupture, soit au pic, soit pour une déformation donnée, soit à l'état critique.

Si on soumet plusieurs échantillons de sol, à des contraintes de confinement  $\sigma'_3$  différentes, jusqu'au critère de rupture, les enveloppes des différents cercles de Mohr, à la rupture, sont, en première approximation, deux droites symétriques ( Fig. -13).

**Fig. -13- :** Enveloppe de rupture de Mohr-Coulomb.



Le critère de plasticité de Coulomb dans les axes de Mohr s'exprime donc par la formule générale :

$$\tau = C' + \sigma' \cdot \tan \varphi'$$

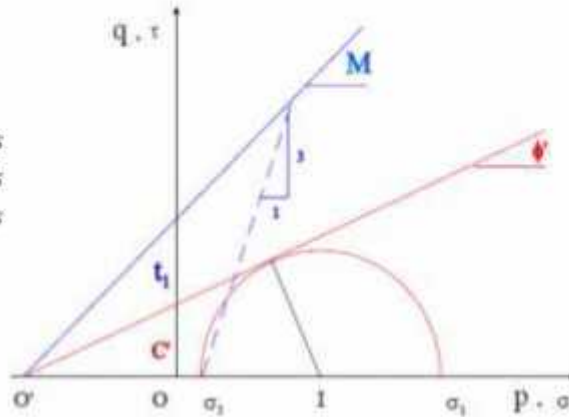
Le critère de plasticité de Coulomb couplé au postulat de Terzaghi donne :

$$\tau = C' + (\sigma - u) \cdot \tan \varphi'$$

#### 4-4-Détermination de $\varphi'$ et $C'$ dans les axes de Cambridge

Si l'enveloppe d'une famille de cercles de Mohr est une droite, le lieu des points représentatifs de ces états de contraintes est également une droite dans le plan du contrainte moyenne  $p' = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3$  et le déviateur de contraintes  $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ , (Fig. -14).

**Fig. -14 :** Correspondance entre les enveloppes de rupture dans les axes de Mohr  $(\sigma' ; \tau)$  et dans les axes de Cambridge  $(p' ; q)$



$$(\sigma'_1 - \sigma'_3) = 2.C'.\text{Cot}\varphi' + (\sigma'_1 + \sigma'_3).\text{Sin}\varphi'$$

$$\begin{cases} p' = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3} \\ q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma'_1 = \frac{1}{3}(3p' + 2q) \\ \sigma'_3 = \frac{1}{3}(3p' - q) \end{cases}$$

Remplaçant  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_3$  par  $p'$  et  $q$ .

$$\left( \frac{1}{3}(3p' + 2q) - \frac{1}{3}(3p' - q) \right) = 2.C'.\text{Cot}\varphi' + \left( \frac{1}{3}(3p' + 2q) + \frac{1}{3}(3p' - q) \right).\text{Sin}\varphi'$$

$$(3p' + 2q - 3p' + q) = 6.C'.\text{Cot}\varphi' + (3p' + 2q + 3p' - q).\text{Sin}\varphi'$$

$$(3q) = 6.C'.\text{Cot}\varphi' + (6p' + q).\text{Sin}\varphi'$$

$$q = \frac{6.\text{Sin}\varphi'}{3 - \text{Sin}\varphi'} p' + \frac{6.C'.\text{Cot}\varphi'}{3 - \text{Sin}\varphi'} = M.p' + t_1$$

La pente  $M$  et l'ordonnée à l'origine de la droite de rupture  $t_1$  dans le chemin de contraintes de Cambridge,  $p'$ ,  $q$ , permettent de déduire l'angle de frottement interne  $\varphi'$  et la cohésion  $C'$  définis dans les axes de Mohr-Coulomb.