Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques Troisième année licence

TD n°1

Géométrie différentielle

(Difféomorphisme et théorème des fonctions implicites)

Exercice 1. *On considère l'application* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par*

$$f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

Démontrer que l'image de f *est un ouvert strictement inclus dans* $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

1. *Montrer que pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *il existe des voisinages ouverts* $U_{(a,b)}$ *et* $V_{f(a,b)}$ *de* (a, b) *et* $f(a, b)$ *respectivement tels que* f *est un* C^1-*difféomorphime de* $U_{(a,b)}$ *dans* $V_{f(a,b)}$.
2. *L'application* f, *est-elle un difféomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *sur son image* $f(\mathbb{R}^2)$?
3. *Soit* $U = \mathbb{R}\times]0, 2\pi[$. *Déterminer* $f(U)$ *et montrer que* f *est un* C^1-*difféomorphisme de* U *sur* $f(U)$.

Exercice 3. *Après avoir justifié son existence, déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction implicite* $x \mapsto \varphi(x) = y$ *définie (implicitement) par*

$$\varphi(0) = 1, \quad f(x, y) = 1 - ye^x + xe^y.$$

Exercice 4. *Démontrer que la relation* $x + y + z + \sin(xyz)$ *définit* z *comme fonction de* x *et de* y *au voisinage du point* $(0, 0, 0)$. *Calculer alors* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *au voisinage de ce point.*

Exercice 5. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle qu'il existe* $\alpha > 0$ *pour lequel*

$$\alpha\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|, \quad \textit{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n;$$

1. *Montrer que f est injective.*
2. *Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.*
3. *Montrer que $df(x)$ est inversible en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. En déduire que f est surjective.*
4. *Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.*

F. Aliouane