

Introduction

UN processus aléatoire (stochastique) est une représentation mathématique des phénomènes aléatoires évoluent dans le temps (ou dans l'espace). De tels phénomènes apparaissent dans plusieurs domaines tel que : la physique, l'ingénieur électrique, la biologie, la géologie, l'économie, la finance, la gestion, Pb de recherche opérationnelle,...

À chaque instant de son évolution, le phénomène peut être représenté par une v.a de sorte que l'on obtient une famille de v.a caractérisée par une structure de dépendance (entre membres) et domaine de valeurs possibles.

1.1 Quelques définitions de base

1.1.1 Construction et exemples

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

L'espace fondamental Ω est supposé dépendre implicitement d'un ensemble \mathcal{T} , représentant le domaine d'évolution du phénomène pour lequel Ω est l'ensemble des résultats possibles. Lorsqu'on observe une phénomène évolue dans le temps \mathcal{T} , à chaque instant de l'évolution ($t \in \mathcal{T}$), on peut considérer Ω_t , l'espace des résultats possibles du phénomène à l'instant t , alors sur tout le domaine d'évolution \mathcal{T} , l'espace fondamental Ω serait $\Omega = \prod_{t \in \mathcal{T}} \Omega_t$ où $\prod_{t \in \mathcal{T}}$ désigne le produit cartésien de tous les membres de \mathcal{T} .

Par exemple : 1) On observe l'expérience du jet infiniment répété d'une pièce de monnaie, le

domaine d'évolution est

$$\mathcal{T} = \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{N}^*$$

.

Les résultats possibles de l'expérience associée sont

$$\Omega_t = \{P, F\}$$

.

L'espace

$$\Omega = \prod_{t \in \mathbb{N}^*} \Omega_t = \prod_{t \in \mathbb{N}^*} \{P, F\} = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$$

.

2. Pour la même expérience, on s'intéresse au nombre de Piles obtenus jusqu'à chaque répétition

$t, t \in \mathcal{T} = \mathbb{N}^*$

$$\implies \Omega = \prod_{t \in \mathbb{N}^*} \Omega_t \quad t\omega : \Omega_t = \{0, 1, 2, \dots, t\}$$

Donc :

$$\Omega = \prod_{t \in \mathbb{N}^*} \{0, 1, 2, \dots, t\} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$$

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \mid \omega_i = \overline{0, i}, \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Définition 1.1.1. *Un processus aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille de v.a $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et dépendant d'un paramètre $t \in \mathcal{T}$. L'ensemble \mathcal{T} est dit domaine d'évolution du processus.*

Remarque 1.1.1. *i) Formellement, on peut définir un processus aléatoire par l'une des façons suivantes :*

$$1) \{X_t, t \in \mathcal{T}\} : \mathcal{T} \longrightarrow \Upsilon(\Omega, \mathbb{R})$$

$$t \longmapsto X_t$$

ou : $\Upsilon(\Omega, \mathbb{R})$ est l'ensemble des v.a définies de Ω dans \mathbb{R} .

2) Un processus aléatoire est une application :

$$\Omega \times \mathcal{T} \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

$$(\omega, t) \mapsto X_t(\omega) \quad t\omega \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall a \in \mathbb{R} : \{\omega, X_t(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

ii) Les v.a $X_t, t \in \mathcal{T}$ peuvent être discrètes et/ou continues, scalaires, vectorielles, réelles, complexes.

iii) Si on pose $X_t(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X_t (pour t fixé), alors l'ensemble $\cup_{t \in \mathcal{T}} X_t(\Omega) := E$ est dit espace des états (ou espace des phases) du processus.

iv) L'ensemble \mathcal{T} peut être dénombrable fini ou infini ou non-dénombrable.

Exemple 1.1.1. 1) Reprenons l'exemple précédent du jet infini d'une pièce de monnaie avec $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Considérons la famille de v.a $\{X_t, t \in \mathbb{N}^*\}$ définie pour tout $t \in \mathbb{N}^*$ par :

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto X_t(\omega) = X_t(\omega_1, \omega_2, \dots)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_t = P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $\{X_t, t \in \mathbb{N}^*\}$ ou $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ défini un processus aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E = \cup_{t \in \mathbb{N}^*} \{0, 1\} = \{0, 1\}$.

2) Reprenons l'exemple de jet infini avec : $\Omega = \prod_{t \in \mathbb{N}^*} \{0, 1, \dots, t\}$ et soit $\{X_t, t \in \mathbb{N}^*\}$ une famille de v.a définie sur Ω par :

$$\Omega \xrightarrow{X_t} \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto X_t(\omega) = \omega_t$$

Alors : $\{X_t, t \in \mathbb{N}^*\}$ définit un processus aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E = \cup_{t \in \mathbb{N}^*} \{0, t\} = \mathbb{N}$.

Exemple 1.1.2. Supposons qu'on temps $t = 0$, on ait dans le point d'origine dans chaque unité de temps. On lance une pièce de monnaie :

- ▷ Si on obtient pile, la particule se déplace d'une unité à droite.
- ▷ Si on obtient face, la particule se déplace d'une unité à gauche.

On définit X_n : la position de la particule après n jets de la pièce, et le processus aléatoire $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une marche aléatoire à temps discret et à espace d'états $E = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \mathbb{Z}$

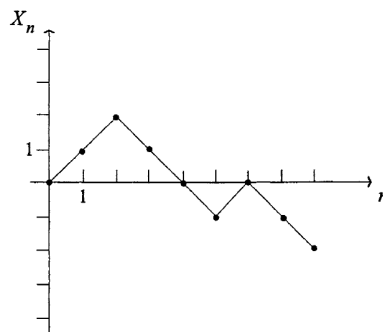


FIGURE 1.1 – Exemple d'une marche aléatoire.

Remarque 1.1.2. 1) *Le processus aléatoire peut être classé selon la dénombrabilité ou non des ensembles d'évolution \mathcal{T} et d'états E .*

Espace d'états E		Dénombrable	Non-dénombrable
Domaine d'évolution \mathcal{T}	Dénombrable	Processus à temps discret et à espace d'état discret	Processus à temps discret et à espace d'état continue
Non-dénombrable	Processus à temps continue et à espace d'état discret	Processus à temps continue et à espace d'état continue	

2) Pour t fixé, X_t est une v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $X_t(\Omega) \subseteq E$.

Par exemple :

Supposons qu'on jette ue pièce de monnaie deux fois de successive et pour chaque résultat , on assigne une des fonctions suivante

$$X(t, FP) = 3 \sin t \quad , \quad X(t, PP) = 3 \cos t$$

$$X(t, FF) = 2t \quad , \quad X(t, PF) = -2t$$

Pour $t_0 = \pi/2$, X_{t_0} est une v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $X_{t_0}(\Omega) = \{0, 3, \pi, -\pi\}$ avec les masses de probabilités 0.25 pour chacune

$$P(X(t) = 3 \sin t) = P(X(t) = 3 \cos t) = P(X(t) = 2t) = P(X(t) = -2t) = 0.25$$

3) Pour ω_0 fixé, $X_t(\omega_0)$ est une application de $\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ dite **réalisation** ou **trajectoire** du processus.

Pour l'exemple précédent, les trajectoires des fonctions $t \mapsto X(t, \omega_0)$ sont présentées dans la figure suivante :

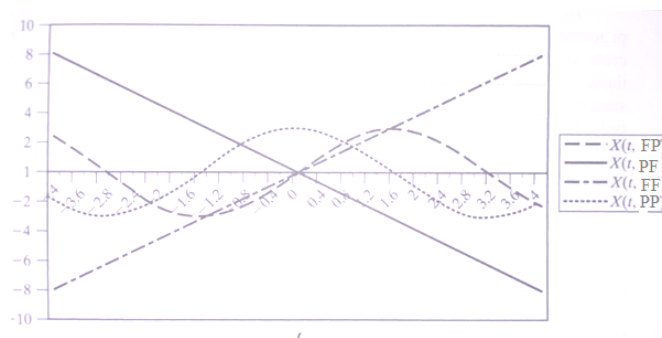


FIGURE 1.2 – Les trajectoires d'un processus stochastique.

Par contre, cette fonction n'est pas un processus stochastique :



FIGURE 1.3 – Cette fonction n'est pas un processus stochastique.

1.1.2 Filtration : l'histoire d'un processus

Définition 1.1.2. On appelle *Filtration naturelle* du processus à la suite croissante de tribus complètes $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Plus généralement, on appelle *filtration* toute suite croissante de sous-tribus de \mathcal{F} .

On dit que le processus est **adapté** si $\forall t \in \mathcal{T}, X_t$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

Remarque 1.1.3. 1) Le fait que les tribus d'une filtration soit emboîtés ($\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+\Delta t}$) reflète le fait que l'information cumulée sur le processus croît avec le temps.

2) Dans certains cas, on aura intérêt à ce que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Enfin, on désigne par $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{F}_t)$.

1.2 Distribution de probabilité d'un processus aléatoire

À première vue, il est tentant de considérer la distribution de probabilité de tout le processus. En la définissant de la même façon que pour les v.a comme suit :

$$\mathbb{P}_{\{X_t, t \in \mathcal{T}\}}(\cdot) : [\mathcal{B}(\mathbb{R})]^\mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$$

$$(B_t)_{t \in \mathcal{T}} \longmapsto \mathbb{P}_{\{X_t, t \in \mathcal{T}\}}((B_t)_{t \in \mathcal{T}}) = \mathbb{P}(\omega_i \cap \{X_t(\omega) \in B_t\})$$

Cependant ce faisant, les événements de type : $\{\omega \in \Omega, \cap_{t \in \mathcal{T}} X_t(\omega) \in B_t\}$ sont pour \mathcal{T} non dénombrable non mesurable par $\mathbb{P}(\cdot)$ définie par les axiomes de probabilité (i) et (iii).

C'est pourquoi, on a considéré des distributions d'une sous familles finies de $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ menant ainsi à ce qu'on appelle : **Distribution fini-dimensionnelle** (ou distribution d'ordre n fini).

Définition 1.2.1. (*Distribution fini-dimensionnelle*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ et pour tous boréliens B_1, B_2, \dots, B_n de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on définit les

distributions :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\cdot, \dots) : [\mathcal{B}(\mathbb{R})]^n &\longrightarrow [0, 1] \\ (B_1, B_2, \dots, B_n) &\longmapsto \mathbb{P}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(B_1, B_2, \dots, B_n) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n X_{t_i}^{-1}(B_i)) \\ &= \mathbb{P}(\omega \in \Omega, X_{t_1}(\omega) \in B_1 \wedge X_{t_2}(\omega) \in B_2 \wedge \dots \wedge X_{t_n}(\omega) \in B_n) \end{aligned}$$

Définition 1.2.2. De manière équivalente, on peut définir les fonctions de répartition fini-dimensionnelle du processus comme suit :

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\cdot, \dots) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, 1] \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1. 1) La fonction de répartition du processus $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est appelée **fonction de répartition unidimensionnelle** ou du **1^{er} ordre** de $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ si :

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}}(x_1) &= \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1) \\ &= F_X(x_1; t_1) \end{aligned}$$

2) De même, la fonction de répartition du 2^{ème} ordre (**bidimensionnelle**) :

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2) \\ &= F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) \end{aligned}$$

3) Si on connaît les lois unidimensionnelle et bidimensionnelle, on dit qu'on connaît les propriétés du processus jusqu'à 2nd ordre.

Définition 1.2.3. (suite de définition 2.2.2)

Les distributions fini-dimensionnelles d'un processus aléatoire peuvent être définies soit :

* À partir des fonctions de masses fini dimensionnelles $\mathbb{P}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\cdot, \dots)$ si les X_t sont discrètes (E est dénombrable).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\cdot, \dots) : E^n &\longrightarrow [0, 1] \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \mathbb{P}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}} = \mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) \end{aligned}$$

* À partir des densités fini dimensionnelles $f_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\cdot, \dots)$ si les X_t sont absolument continues où :

$$\begin{aligned} f_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\cdot, \dots) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1. (Suite de l'exemple de marche aléatoire)

On sait que les jets de la pièce sont indépendants. Soit $p = \mathbb{P}(\{Pile\})$ alors les fonctions de

masses de probabilité du 1^{er} ordre du $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x, n = 2) &= \mathbb{P}(X_2 = x) \\ &= \begin{cases} p(1-p) & x = 0 \\ 0 & x = \pm 1 \\ p^2 & x = 2 \\ (1-p)^2 & x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2.1 Théorème d'existence de Kolmogorov

Pour une famille de distributions fini-dimensionnelles, peut-ils exister un ou plusieurs processus aléatoires ayant comme distribution fini-dimensionnelle cette même famille ?

Si tel est le cas, sous quelles conditions sur la famille de distributions peut on avoir un tel résultat ?

Ce problème a été résolu par Kolmogorov (1933).

○ On considère les hypothèses suivantes sur la famille de distributions $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\dots), n \in \mathbb{N}^*, t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}\}$

On suppose que $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\dots), n \in \mathbb{N}^*, t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}\}$ vérifiée :

- i) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\dots)$ est une distribution de probabilité pour t_1, t_2, \dots, t_n fixé.
- ii) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_1, \dots, x_n)$ quelque soit la permutation i_1, i_2, \dots, i_n des nombres $1, \dots, n$.
- iii) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Théorème 1.2.1. (Théorème de Kolmogorov)

Soit $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\dots), n \in \mathbb{N}^*, t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}\}$ une famille de distributions définies de \mathbb{R}^n dans $[0, 1]$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un processus aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ admettant $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\dots), n \in \mathbb{N}^*, t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}\}$ comme distribution fini-dimensionnelle est que les conditions i), ii), et iii) soient vérifiées.

Sous ces conditions, on peut construire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ comme suit :

- Pour l'espace probabilisé, on prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est l'ensemble de tous les fonctions $\omega(t)$ définies sur \mathcal{T} à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \omega(\cdot) : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \omega(t) \end{aligned}$$

- \mathcal{F} est la tribu des parties de Ω (i.e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$) engendrée par les ensembles cylindriques i.e

de la forme :

$$\{\omega(t_1) \leq x_1, \omega(t_2) \leq x_2, \dots, \omega(t_n) \leq x_n\} := C_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

• \mathbb{P} est une mesure définie sur \mathcal{F} par :

$$\mathbb{P}(C_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\cdot, \dots, \cdot)$$

où : le processus $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ cherché est défini par $X_t(\omega) = \omega(t)$.

Exemple 1.2.2. Soit X une v.a positive de fonction de répartition F . Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus aléatoire définie par : $X_t = X - (t \wedge X), \forall t \geq 0$.

► Ses fonctions de répartition uni-dimension (du 1^{er} ordre) sont :

$$\begin{aligned} F_{X_t}(x) &= \mathbb{P}(X_t \leq x) = \mathbb{P}(X_t \leq x, X \leq t) + \mathbb{P}(X_t \leq x, X > t) \\ &= F_X(t) + F_X(x+t) - F_X(t) \\ &= F_X(x+t) \end{aligned}$$

► Les fonctions de répartition bi-dimension (du 2nd ordre)

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= F((x_1 + t_1) \wedge (x_2 + t_2)) + F_X((x_1 + t_1) \wedge t_2) + F_X(t_1 \wedge (x_2 + t_2)) - 2F(t_1 \vee t_2) \end{aligned}$$

1.3 Caractéristiques statistiques des processus aléatoires

1.3.1 Moments d'ordre 1 et 2 d'un processus aléatoire

Définition 1.3.1.

1) La moyenne $\mathbb{E}(X_t)$ d'un processus aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ à un instant t est la fonction :

$$\begin{aligned} m_X(\cdot) : \mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto m_X(t) = \mathbb{E}(X_t) \end{aligned}$$

2) La fonction d'auto-corrélation et d'auto-covariance d'un processus aléatoire à un point (t_1, t_2) sont définies respectivement comme suit :

$$\begin{aligned} R_X(\cdot, \cdot) : \mathcal{T} \times \mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, t_2) &\longmapsto R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) \end{aligned}$$

et

$$C_X(.,.) : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t_1, t_2) \longmapsto C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$$

3) Le coefficient de corrélation d'un processus aléatoire à un point (t_1, t_2) :

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)C_X(t_2, t_2)}}$$

Remarque 1.3.1.

1) On peut définir la fonction inter-corrélation entre deux processus aléatoires $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ et $\{Y_t, t \in \mathcal{T}\}$ comme suit :

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = \mathbb{E}(X_{t_1}Y_{t_2})$$

2) La fonction $R_X(t, t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(X_tX_t^*)$ est dite la puissance moyenne d'un processus aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$. De plus, la fonction variance d'un processus aléatoire à un temps t est : $Var(X_t) = C_X(t, t)$

3) Comme $Var(X_t) \geq 0$, on peut déduire que $\rho_X(t, t) = 1$.

4) Lorsque $m_X(t) = 0, \forall t$, le processus aléatoire est dit **centré**. Notons qu'il s'agit d'une moyenne statistique et non temporelle.

Exemple 1.3.1. Les essais indépendants dont la probabilité de succès est la même pour chacun sont appelés **les essais de Bernoulli**. Par exemple, nous pouvons rouler un dé-indépendamment un nombre infini des fois et définir un succès comme étant le roulement d'un "6".

Un processus de Bernoulli est une suite X_1, X_2, \dots de v.a associées aux essais de Bernoulli tq :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k^{\text{ème}} \text{ essai est un succès} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc : $\mathbb{E}(X_k) = p, \forall k \in \mathbb{N}^*$ tq : $0 < p < 1$ est la probabilité de succès.

o $R_X(k_1, k_2) = \mathbb{E}(X_{k_1}X_{k_2})$

$$= \begin{cases} p & \text{si } k_1 = k_2 \\ p^2 & \text{si } k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

o $C_X(k_1, k_2) = R_X(k_1, k_2) - m_X(k_1)m_X(k_2)$

$$= R_X(k_1, k_2) - p^2$$

$$= \begin{cases} p(1-p) & \text{si } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice

Soit Y une v.a tq : $Y \rightsquigarrow U_{[0,1]}$

On définit le processus aléatoire $\{X_t, t \geq 0\}$ par : $X_t = e^Y t, t \geq 0$

Calculer :

- 1) la densité du 1^{er} ordre de ce processus.
- 2) $m_X(t),$ pour tout $t > 0$
- 3) la fonction d'auto-covariance de ce processus.

1.3.2 Stationnarité

La stationnarité d'un processus aléatoire décrit un certain équilibre statistique. Il existe deux types de stationnarité : **stricte** et **faible** (du 2nd ordre).

a) Stationnarité stricte (SS)

Définition 1.3.2. Un processus $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace d'état E , est dit **strictement stationnaire** si ses distributions fini-dimensionnelles sont invariantes par translation dans \mathcal{T} . Autrement dit :

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}}(x_1, \dots, x_n), \forall h \in \mathcal{T} \text{ tq : } t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h \in \mathcal{T}$$

b) Stationnarité faible (WSS)

Définition 1.3.3. Un processus $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est dit **stationnaire du 2nd ordre** si les moments d'ordre 1 et 2 du processus sont finis c-à-d :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathcal{T}, \quad \mathbb{E}(|X_t|) < +\infty \\ \forall t \in \mathcal{T}, \quad \mathbb{E}(X_t^2) < +\infty \end{cases}$$

Exercice

Montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que : $\mathbb{E}(|X|^r) < +\infty \Rightarrow \mathbb{E}(|X|^s) < +\infty, 0 < s < r$.

Définition 1.3.4. Un processus du 2nd ordre est dit **faiblement stationnaire** si :

1. $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_{t+h}), \quad \forall t, h \in \mathcal{T} \text{ tq : } t+h \in \mathcal{T}$
2. $R_X(t, t+h) = \mathbb{E}(X_t X_{t+h})$ est indépendante de t et dépend uniquement de la différence entre t et $t+h$ c-à-d :

$$\begin{cases} R_X(t, t+h) = R_X(h) \\ R_X(t, s) = R_X(s-t) \end{cases}$$

✦ **Propriétés des processus stationnaire du 2nd ordre**

1. $C_X(t, t + h) = R_X(h) - (m_X)^2$
2. $Var(X_t) = \sigma_X^2 = R_X(0) - (m_X)^2 < +\infty$
3. $R_X(h) = R_X(-h)$ donc : la fonction d'auto-corrélation paire.
4. $R_X(0) = \mathbb{E}(X_t^2) \geq 0$, cette valeur présente la valeur moyenne de la puissance du processus.
5. D'après l'inégalité de Schwartz, on peut écrire :

$$|\mathbb{E}(X_t X_{t+h})| \leq \sqrt{\mathbb{E}(|X_t|^2)\mathbb{E}(|X_{t+h}|^2)}$$

D'ou : $R_X(0) \geq R_X(h)$, donc la fonction d'auto-corrélation est toujours bornée par sa valeur à l'origine.

6. Si $(X_t)_t$ et $(Y_t)_t$ sont deux processus aléatoires **mutuellement stationnaires** du 2nd ordre, alors : $R_{X,Y}(h) = R_{X,Y}(-h)$.
7. Dans plusieurs cas pratiques, X_t et X_{t+h} tendent à se décorrélérer lorsque $h \rightarrow +\infty$, ceci signifie que généralement le présent n'est pas influence par le passé très lointain. On peut donc dans le cas d'un processus aléatoire centré à $\lim_{h \rightarrow \infty} R_X(h) = 0$ (Si cette limite est existe).

Théorème 1.3.1. *Pour un processus du 2nd ordre, la stationnarité stricte entraine la stationnarité faible (la réciproque est fausse).*

Démonstration.

Si $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est un processus du 2nd ordre, alors :

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}}(x_1, \dots, x_n), \forall h \in \mathcal{T} \text{ tq } : t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h \in \mathcal{T}$$

En particulier, pour $n = 1$:

$$\begin{aligned} F_{X_t}(x) &= F_{X_{t+h}}(x), \forall h \\ \implies \mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}(X_{t+h}), \forall t, h, t + h \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) &= F_{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}}(x_1, x_2) \\ \xRightarrow{\text{proc de 2}^{\text{nd}} \text{ ordre}} R_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1 + h, t_2 + h) \\ R_X(t_2 - t_1) &= R_X(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Donc : ce processus est faiblement stationnaire. □

Exemple 1.3.2. Soit $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ un processus aléatoire stationnaire du 2nd ordre, on note $R_X(\tau)$ sa fonction d'auto-corrélation.

Considérons les deux processus aléatoires suivantes :

$$Y_t = X_t \cos(\omega t + \varphi)$$

$$Z_t = X_t \cos((\omega + \sigma)t + \varphi)$$

où : ω et σ sont des constantes et φ est une v.a tq : $\varphi \rightsquigarrow U_{[0,2\pi]}$ et $\varphi \perp X_t, \forall t$.

1. Montrons que $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sont WSS ?

2. Et-ce-que $H_t = Y_t + Z_t$ est WSS ?

Solution

1- $\varphi \rightsquigarrow U_{[0,2\pi]} \Leftrightarrow f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\varphi)$

Pour $Y_t = X_t \cos(\omega t + \varphi)$

$$\begin{aligned} \triangleright \mathbb{E}(Y_t) &= \mathbb{E}(X_t \cos(\omega t + \varphi)) \\ &\stackrel{\varphi \perp X_t}{=} \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(\cos(\omega t + \varphi)) \\ &= \mathbb{E}(X_t) \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega t + \varphi) \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\varphi) d\varphi \\ &= \mathbb{E}(X_t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) d\varphi \\ &= \mathbb{E}(X_t) \frac{1}{2\pi} [\sin(\omega t + \varphi)]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}(X_t) [\sin(\omega t) - \sin(\omega t)] = 0 = cte \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright R_Y(t_1, t_2) &= \mathbb{E}(Y_{t_1} Y_{t_2}) \\ &= \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \cos(\omega t_1 + \varphi) \cos(\omega t_2 + \varphi)) \\ &= \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) \mathbb{E}(\cos(\omega t_1 + \varphi) \cos(\omega t_2 + \varphi)) \\ &= R_X(t_2 - t_1) \frac{1}{2} \mathbb{E}(\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) + \cos(\omega(t_1 - t_2))) \\ &= R_X(t_2 - t_1) \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos(\omega(t_1 - t_2)) \frac{1}{2\pi} d\varphi \right] \\ &= R_X(t_2 - t_1) \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \sin(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) + 2\pi \cos(\omega(t_1 - t_2)) \right] \\ &= R_X(t_2 - t_1) \frac{1}{4\pi} [0 + 2\pi \cos(\omega(t_1 - t_2))] \\ &= \frac{1}{2} R_X(t_2 - t_1) \cos(\omega(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

posons : $t_2 - t_1 = \tau$, alors :

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos(\omega\tau) \\ &= R_Y(\tau) \end{aligned}$$

Puisque :

$$\begin{cases} m_X(t) = 0 = cte \\ R_Y(t_1, t_2) = R_Y(\tau) \quad tq : \tau = t_2 - t_1 \end{cases}$$

Alors : $(Y_t)_t$ est stationnaire du 2nd ordre.

Pour $Z_t = X_t \cos((\omega + \sigma)t + \varphi)$

$$\begin{aligned} \triangleright \mathbb{E}(Z_t) &= \mathbb{E}(X_t \cos((\omega + \sigma)t + \varphi)) \\ &\stackrel{\varphi \perp X_t}{=} \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(\cos((\omega + \sigma)t + \varphi)) \\ &= \mathbb{E}(X_t) \int_{\mathbb{R}} \cos((\omega + \sigma)t + \varphi) \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{[0, 2\pi]}(\varphi) d\varphi \\ &= \mathbb{E}(X_t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((\omega + \sigma)t + \varphi) d\varphi \\ &= \mathbb{E}(X_t) \frac{1}{2\pi} [\sin((\omega + \sigma)t + \varphi)]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}(X_t) [\sin((\omega + \sigma)t + 2\pi) - \sin((\omega + \sigma)t)] = 0 = cte \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright R_Z(t_1, t_2) &= \mathbb{E}(Z_{t_1} Z_{t_2}) \\ &= \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \cos((\omega + \sigma)t_1 + \varphi) \cos((\omega + \sigma)t_2 + \varphi)) \\ &\stackrel{\varphi \perp X_t}{=} \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) \frac{1}{2} \mathbb{E}(\cos((\omega + \sigma)(t_1 + t_2) + 2\varphi) + \cos((\omega + \sigma)(t_1 - t_2))) \\ &= R_X(t_2 - t_1) \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((\omega + \sigma)(t_1 + t_2) + 2\varphi) d\varphi + \frac{R_X(t_2 - t_1)}{2} \cos((\omega + \sigma)(t_1 - t_2)) \right] \\ &= R_X(t_2 - t_1) \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \sin((\omega + \sigma)(t_1 + t_2) + 2\varphi) \right]_0^{2\pi} + \frac{R_X(t_2 - t_1)}{2} \cos((\omega + \sigma)(t_1 - t_2)) \\ &= \frac{R_X(t_2 - t_1)}{2} \cos((\omega + \sigma)(t_1 - t_2)) \\ &\stackrel{\cos \text{ paire}}{=} \frac{R_X(t_2 - t_1)}{2} \cos((\omega + \sigma)(t_2 - t_1)) \\ &\stackrel{\tau = t_2 - t_1}{=} \frac{R_X(\tau)}{2} \cos((\omega + \sigma)(\tau)) \\ &= R_Z(\tau) \end{aligned}$$

Alors : $(Z_t)_t$ est stationnaire du 2nd ordre.

2) On a : $H_t = Y_t + Z_t$

$$\begin{aligned} \triangleright \mathbb{E}(H_t) &= \mathbb{E}(Y_t + Z_t) \\ &= \mathbb{E}(Y_t) + \mathbb{E}(Z_t) \\ &= 0 = cte \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \triangleright R_H(t_1, t_2) &= \mathbb{E}(H_{t_1} H_{t_2}) \\
 &= \mathbb{E}((Y_{t_1} + Z_{t_1})(Y_{t_2} + Z_{t_2})) \\
 &= \mathbb{E}(Y_{t_1} Y_{t_2} + Z_{t_1} Z_{t_2} + Y_{t_1} Z_{t_2} + Z_{t_1} Y_{t_2}) \\
 &= \mathbb{E}(Y_{t_1} Y_{t_2}) + \mathbb{E}(Z_{t_1} Z_{t_2}) + \mathbb{E}(Y_{t_1} Z_{t_2}) + \mathbb{E}(Z_{t_1} Y_{t_2}) \\
 &= R_Y(t_2 - t_1) + R_Z(t_2 - t_1) + R_{Y,Z}(t_1, t_2) + R_{Z,Y}(t_1, t_2)
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \bullet R_{Y,Z}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}((Y_{t_1} Z_{t_2})) \\
 &= \mathbb{E}[(X_{t_1} \cos(\omega t_1 + \varphi))(X_{t_2} \cos((\omega + \sigma)t_2 + \varphi))] \\
 &= \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) \frac{1}{2} \mathbb{E}(\cos(\omega(t_1 + t_2) + \sigma t_2 + 2\varphi) + \cos(\omega(t_1 - t_2) - \sigma t_2)) \\
 &= R_X(t_2 - t_1) \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega(t_1 + t_2) + \sigma t_2 + 2\varphi) d\varphi \right] + \frac{1}{2} R_X(t_2 - t_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\omega(t_1 - t_2) - \sigma t_2) \\
 &= \frac{R_X(t_2 - t_1)}{2} \cos(\omega(t_1 - t_2) - \sigma t_2)
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \bullet R_{Z,Y}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}((Z_{t_1} Y_{t_2})) \\
 &= \mathbb{E}[(X_{t_1} \cos(\omega + \sigma)t_1 + \varphi)(X_{t_2} \cos(\omega t_2 + \varphi))] \\
 &= \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) \frac{1}{2} \mathbb{E}(\cos(\omega(t_1 + t_2) + \sigma t_1 + 2\varphi) + \cos(\omega(t_1 - t_2) - \sigma t_1)) \\
 &= \frac{R_X(t_2 - t_1)}{2} \cos(\omega(t_1 - t_2) - \sigma t_1) \\
 \Rightarrow R_H(t_1, t_2) &= R_Y(t_2 - t_1) + R_Z(t_2 - t_1) + \frac{R_X(t_2 - t_1)}{2} \cos(\omega(t_1 - t_2) - \sigma t_2) + \frac{R_X(t_2 - t_1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\omega(t_1 - t_2) - \sigma t_1) \\
 &\stackrel{\tau=t_2-t_1}{=} R_Y(\tau) + R_Z(\tau) + \frac{R_X(\tau)}{2} [\cos(-\omega\tau - \sigma t_2) + \cos(-\omega\tau - \sigma t_1)] \\
 &\neq R_H(\tau)
 \end{aligned}$$

Alors : H n'est pas stationnaire.

Définition 1.3.5. La densité spectrale d'un processus stationnaire du 2nd ordre est la transformation de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation :

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f\omega s} R_X(s) ds$$

Remarque 1.3.2.

1. La transformation inverse de Fourier nous donne : $R_X(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{f\omega s} S_X(\omega) d\omega$.
2. Comme la fonction d'auto-corrélation d'un processus du 2nd (WSS) est une fonction paire i.e : $R_X(s) = R_X(-s)$, la densité spectrale $S_X(\omega)$ est réelle et paire. On peut écrire :

$$S_X(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} R_X(s) \cos(\omega s) ds$$

$$R_X(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_X(\omega) \cos(\omega s) d\omega$$

3. La fonction $S_X(\omega)$ est une fonction non-négative.
4. Une fonction $S_X(\omega)$ est une densité spectrale ssi elle est non-négative.
5. Supposons que pour deux processus aléatoires $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ et $\{Y_t, t \in \mathcal{T}\}$ ont la relation suivante :

$$Y_t = X_t * h_t = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t-s) h(s) ds$$

On peut interpréter $\{Y_t, t \in \mathcal{T}\}$ comme étant la réalisation d'un système linéaire tel que les données est un processus $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$, on écrit : $Y = L(X_t)$.

On suppose que $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est stationnaire du 2nd ordre. Si $m_X(t) = \mathbb{E}(X_t) = 0$, on peut démontrer que $\{Y_t, t \in \mathcal{T}\}$ est stationnaire du 2nd ordre centré tel que :

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega) |H(\omega)|^2$$

où : $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f\omega s} h(s) ds$.

Et on a aussi :

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = R_Y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \geq 0$$

1.3.3 Processus ergodiques

L'étude des caractérisations statistiques d'un processus a montré comment on pouvait attacher à une ou plusieurs v.a des quantités comme l'espérance, la variance, ..., etc permettent de préciser le comportement statistique de ces variables. Par ailleurs un processus aléatoire peut être considéré comme un ensemble de fonctions du paramètre t indexées par les événements aléatoires ω . Ceci signifie que le processus est considéré comme en tant que **"union de trajectoires"**.

Si l'on observe une seule réalisation de ce processus (c-à-d : une trajectoire associée à ω_0), est-il possible (et si oui, sous quelle hypothèses) d'estimer les paramètres de ce processus ?

◦ Considérons une seule réalisation d'un processus : $\{X_{t_n}(\omega_0), n = \overline{1, N}\}$ dans le cas d'un processus à temps discret ou $\{X_t(\omega_0), t \in [-T, T]\}$ dans le cas d'un processus à temps continu.

Définition 1.3.6. Pour ω_0 fixé, la moyenne temporelle d'ordre 1 d'un processus est définie par :

$$\bar{X}(\omega_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_{t_n}(\omega_0) \quad (\text{dans le cas discret})$$

$$\bar{X}(\omega_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_t(\omega_0) dt \quad (\text{dans le cas continu})$$

lorsque ces deux limites existent.

Remarque 1.3.3. Cette moyenne, en général dépend de l'événement aléatoire ω_0 alors $\bar{X}(\omega)$ est une v.a.

Définition 1.3.7. Un processus aléatoire est dit **ergodique d'ordre 1** si sa moyenne temporelle d'ordre 1 est indépendante à ω_0 i.e :

$$\bar{X}(\omega_0) = \bar{X} = \text{cte}, \quad \forall \omega_0 \in \Omega$$

Remarque 1.3.4. De même manière, on peut définir d'autres moyennes temporelles correspondant à des moments supérieurs.

Par exemple :

$$\bar{X}^2(\omega_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_{t_n}^2(\omega_0) \quad (\text{discret})$$

$$\bar{X}^2(\omega_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_t^2(\omega_0) dt \quad (\text{continue})$$

Définition 1.3.8. Un processus aléatoire est dit **ergodique** si toutes ses moyennes temporelles existent et ont la même valeur quelque soit la trajectoire considérée sauf pour un ensemble de trajectoire de probabilité nulle.

Remarque 1.3.5. La notion d'ergodicité est très importante du fait que pratiquement pour évaluer expérimentalement les moyennes statistiques.

On se dispose d'une trajectoire sur laquelle on effectue les moyennes temporelles.

1.3.4 Ergodicité et stationnarité du 2nd ordre

Définition 1.3.9. (*Processus de moyenne ergodique*)

Soit un processus aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$, on dit que ce processus de moyenne ergodique ssi :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_t(\omega)) = cte = \mu \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_t(\omega_0) dt = \mu \end{cases}$$

Proposition 1.3.1. Un processus aléatoire stationnaire du 2nd ordre $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est de moyenne ergodique si $C_X(0) < +\infty$ et $\lim_{|s| \rightarrow \infty} C_X(s) = 0$.

Ou si sa fonction d'auto-corrélation $C_X(s)$ est intégrable telle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} |C_X(s)| ds < +\infty$

Exemple 1.3.3. Soit $X_t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec : A et B sont deux v.a telle que :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(B) = 0 \\ \mathbb{E}(A^2) = \mathbb{E}(B^2), \quad \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Montrons que $(X_t)_t$ est un processus aléatoire de moyenne ergodique :

1) La moyenne temporelle

Soit $\omega_0 \in \Omega$ et soit la trajectoire $X_t(\omega_0) = A(\omega_0) \cos(\omega_0 t) + B(\omega_0) \sin(\omega_0 t)$

$$\begin{aligned} \bar{X}(\omega_0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_t(\omega_0) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\frac{A_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \frac{B_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \right]_{-T}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) La moyenne statistique

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \\ &= \mathbb{E}(A) \cos(\omega t) + \mathbb{E}(B) \sin(\omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_X(t) = 0 = \bar{X}(\omega_0)$$

Alors : $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est de moyenne ergodique.

1.3.5 Processus à accroissements indépendants et stationnaires

Définition 1.3.10. 1. Le processus aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est dit à des accroissements indépendants si : $\forall n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, les variables aléatoires :

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

2. Le processus aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est dit à des accroissements stationnaires si : $\forall h > 0$, les variables aléatoires : $X_{t+h} - X_t$ ont la même distribution indépendantes $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

Remarque 1.3.6.

1) la première propriété signifie que les occurrences du processus dans un intervalle sont indépendantes des occurrences du processus sur tout autre intervalle disjoint et la seconde veut dire que la distribution des occurrences du processus dans tout intervalle dépend juste de la longueur de cet intervalle.

2) Pour un processus à accroissements indépendants et stationnaires, donner la loi de $X_t - X_0$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$; ainsi que celle de X_0 suffit à caractériser entièrement le processus.

1.3.6 Processus martingales

Définition 1.3.11. (*Martingale à temps discret*)

1. Un processus aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est dit processus martingale si : $\forall n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$,

$$\mathbb{E}[X_{t_n} / X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}] = X_{t_{n-1}}$$

2. plus généralement, Une suite de variable aléatoire réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$ -martingale si :

- i) X_n est $(\mathcal{F}_n)_n$ -adaptée
- ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n est intégrable, c-à-d, $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$
- iii) $\mathbb{E}[X_n / \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$, p.s, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.3.12. (*Martingale à temps continu*)

1. Un processus aléatoire $\{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ est dit $(\mathcal{F}_t)_t$ -martingale si :

- i) X_t est \mathcal{F}_t -adaptée
- ii) $\forall t \in \mathbb{R}^+$, X_t est intégrable, c-à-d, $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$
- iii) $\mathbb{E}[X_t / \mathcal{F}_s] = X_s$, p.s, $\forall 0 \leq s \leq t$.

Exemple 1.3.4. Soit $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ un processus aléatoire centré et à accroissements indépendants.

- Montrer que ce processus est une martingale.