Université de Jijel. **Mars 2024.**
Département de Mathématiques.
3ème année maths appliquées.

Série N° 02.

Exercice 01:

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel est définie une v.a. Z de distribution

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}.$$

Considérons le processus stochastique, en temps continu, $(X_t(\omega))_{t\geq 0}$ défini par

$$X_t(\omega) = Z(\omega) \sin t\,, \qquad pour\ t \geq 0$$

- Donner les variables aléatoires et les trajectoires de ce processus.

Exercice 02:

Aujourd'hui lundi, vous avez un dinar dans votre tirelire. A partir de demain matin et ce, tous les matins jusqu'à vendredi inclusivement, vous tirer à pile ou face pour savoir si vous retirez un dinar (si possible) de la tirelire (pile) ou si vous y en mettez un (face). Modélisez l'évolution du contenu de votre tirelire en répondant aux questions suivantes :

a) Quel est l'ensemble fondamental ?

b) Définissez le processus stochastique que vous utilisez et donnez en la signification. N'oubliez pas de définir ce que vous signifiez par une période de temps.

c) Quelle tribu utilisez-vous pour construire votre espace probabilisable ?

d) Quelles sont les tribus de la filtration engendrée par le processus pour les journées de lundi, mardi, mercredi et vendredi ?

e) Interprétez, en fonction de l'information disponible, la structure d'information que vous avez construite à la question précédente pour la journée du mercredi.

f) Quelle est la distribution du contenu de la tirelire vendredi midi ?

Exercice 03

Soit $\{X(t), t > 0\}$ un processus aléatoire définie par $X(t) = e^{-Yt}, \forall t > 0$.
où Y une variable aléatoire de distribution uniforme sur l'intervalle [0, 1].

1) Déterminer l'ensemble d'évolution et celui des phases de ce processus
2) Déterminer l'ensemble de toutes les trajectoires du processus.
3) Calculer
   a. La densité du 1er ordre du processus.
   b. $E\,[\,X(t)\,]$ et var$[\,X(t)\,]$ du processus pour $t > 0$.
   c. La fonction auto covariance $C_X(\,t, t+s)$ pour : $s, t > 0$.
   d. Est-ce que c'est un processus stationnaire du second ordre ? Justifier

Exercice 04:

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v. a. définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$ où $q = 1 - p$. On note S_n la fortune après n parties de pile ou face ; on suppose que la règle de gain est telle que:

$$S_0 = a\ et\ S_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_{j-1}Y_j\ .$$

Les processus seront tous relatif à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du processus Y.

1. Calculer la probabilité $P(S_n > S_{n-1})$ et vérifier qu'elle est strictement supérieur à ½ si $p \neq q$.
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance conditionnelle $E(S_n|\mathcal{F}_{n-1})$. Quelle est la nature du processus S lorsque $p = 1/2$?
3. Etudier la convergence de la suite de terme générale $E(S_n)$

Exercice 05 :

Soit $\{X_t; t \geq 0\}$ un processus aléatoire avec des accroissements indépendantes et stationnaires et supposons que $X_0 = 0$.

- Montrer que i) $var(X_t) = \sigma_1^2 t$.

  ii) $var(X_t - X_s) = \sigma_1^2(t-s)$, $t > s$.

Où $\sigma_1^2 = var(X_1)$.

Exercice 06:

Montrer qu'un processus aléatoire qui est stationnaire à l'ordre *n* est aussi stationnaire à toute autre ordre inferieur à *n*.

Exercice 07 (pour les étudiants):

Soit le processus aléatoire $\{X_t, t \geq 0\}$. Qui a une distribution de probabilité sous certaines condition définie par :

$$\mathbb{P}(X_t = n) = \frac{(at)^{n-1}}{(1-at)^{n+1}} \ , \ si\ n = 1, 2, \ldots$$
$$= \frac{at}{1+at} \quad , \ si\ n = 0$$

- Montrer que $\{X_t, t \geq 0\}$ n'est pas stationnaire.

Exercice 08:

Soit le processus aléatoire $X_t = Acos(\omega t + \theta)$, où ω est une constante et A, θ sont des variables aléatoires indépendantes avec $\theta \sim \mathcal{U}_{[\pi,-\pi]}$.

- Montrer que $\{X_t, t \geq 0\}$ n'est pas ergodique.