

Série de TD N°1

2024-2025

Exercice 1 :

Soit $I =]-1, 1[$.

1. On considère la fonction u définie sur I par

$$u(x) = 1 - |x|, \quad x \in I.$$

Montrer que $u \in L^p(I)$ et calculer sa dérivée faible dans $L^p(I)$. En déduire que $u \in W^{1,p}(I)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

2. Même question avec la fonction u définie sur I par

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $p \in]1, +\infty[$. Montrer que les deux normes $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ et $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ définies par

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \quad \text{et} \quad \|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

sont équivalentes.

Exercice 3 :

Soient $I =]0, 1[$ et u une fonction définie sur I par $u(x) = x^\alpha$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $u \in H^1(I)$.

Exercice 4.

Soit $I =]-1, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \arctan(nx), \quad x \in I.$$

1. Montrer que la suite (f_n) est bornée dans $W^{1,1}(I)$.
2. Montrer que (f_n) converge dans $\mathcal{D}'(I)$ vers une fonction $f \in L^1(I)$ à identifier.
3. Calculer f' dans $\mathcal{D}'(I)$ et en déduire que f n'appartient pas à $W^{1,1}(I)$.

Exercice 5 :

On se place dans \mathbb{R} . Soit $a < a_1 < b_1 < b$, $I =]a, b[$, $I_1 =]a_1, b_1[$, et p un réel de $[1, +\infty]$.

(a) On considère l'application $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a_1, \quad x \geq b_1, \\ 1 & \text{si } x = \frac{a_1+b_1}{2}, \\ \frac{2}{b_1-a_1}x - \frac{2a_1}{b_1-a_1} & \text{si } x \in [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], \\ -\frac{2}{b_1-a_1}x + \frac{2b_1}{b_1-a_1} & \text{si } x \in [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]. \end{cases}$$

Montrer que u appartient à $W^{1,p}(I)$.

(b) Soit v l'application de I dans \mathbb{R} définie par

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I \setminus I_1, \\ 1 & \text{si } x \in I_1. \end{cases}$$

v appartient-elle à $W^{1,p}(I)$?

Exercice 6 :

Soit I est un intervalle borné et $1 \leq p \leq +\infty$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in W^{1,p}(I)$

$$\|u\|_{C(\bar{I})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Exercice 7 :

Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes

- (i) u est lipschitzienne ;
- (ii) il existe une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 1. Montrer l'implication facile.
 2. On suppose u lipschitzienne.
 - (a) Montrer que si $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \phi'(x) dx = - \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \phi(x) dx.$$

(b) En déduire qu'il existe une constante $0 < C < +\infty$ telle que l'on ait

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(x) \phi'(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^1}, \quad \text{pour toute } \phi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

(c) En déduire que $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et conclure.

Exercice 8 :

Dans toute la suite, nous fixons $p \in]1, +\infty[$ et considérons $u \in W^{1,p}([0, 1])$ tel que $u(0) = 0$

1. Soit $a \in]1, +\infty[$. Montrer que

$$|u(x)|^{a-1} u(x) = \int_0^x a |u(s)|^{a-1} u'(s) ds, \quad \forall x \in [0, 1].$$

2. Soit $p' \in]1, +\infty[$ et $a = 1 + \frac{p'}{q}$. En utilisant l'alinéa 1), montrer que

$$|u(x)|^a \leq a \|u\|_{L^{p'}}^{a-1} \|u'\|_{L^p}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

En déduire que

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|u\|_{L^{p'}}^{1-b} \|u'\|_{L^p}^b,$$

où $b \in]0, 1[$ est une constante à déterminer.

3. Soit $r \in]p', +\infty[$. Montrer que

$$\|u\|_{L^r}^r \leq \|u\|_{L^{p'}}^{p'} \|u\|_{\infty}^{r-p'}.$$

Indication. Remarquer que $|u(x)|^r = |u(x)|^{p'} |u(x)|^{r-p'}$.

4. En utilisant 2) et 3), déduire que

$$\|u\|_{L^r} \leq C \|u\|_{L^{p'}}^{1-c} \|u'\|_{L^p}^c,$$

où $c \in]0, 1[$ est une constante à déterminer.