

Exercices

Ex n°1: Soit X un espace de Banach et soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$
l'ensemble des opérateurs linéaires continus sur X

1) Montrer que si: $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

2) Montrer que: $e^{A(t+\lambda)} = e^{At} \cdot e^{A\lambda}; \forall t, \lambda \geq 0$

Ex n°2: Soit $X = \{f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est uniformément continue et bornée}\}$

avec la norme: $\|f\| = \sup_{x \in [0, +\infty)} |f(x)|$

Soit $\{T(t); t \geq 0\}$ une famille d'opérateurs linéaires
définie par: $T(t)f(x) = f(t+x); \forall t \geq 0 \text{ et } x \in [0, +\infty)$

1) Montrer que $\{T(t); t \geq 0\}$ est un C_0 -semigrpue de
contraction sur X

2) Trouver son générateur infinitésimal A

Ex n°3: Soit $X = L^p(\mathbb{R}); p \in [1, +\infty)$ et soit $\{T(t); t \geq 0\}$

une famille d'opérateurs linéaires définie par

$$T(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy, \quad f \in X$$

Montrer que $\{T(t); t \geq 0\}$ est un C_0 -semigrpue.

Ex n°4: Soit $\{T(t); t \geq 0\}$ un C_0 -semigrpue. Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x, \quad \forall x \in X, t \geq 0$$

Ex n°5: Soit X un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ et $T(t) = e^{At}$, $t \geq 0$.
 Montrer que pour $h > 0$ assez petit, on a :

$$A = (T(h) - I) \left(\int_0^h T(s) ds \right)^{-1}$$

Ex n°6: Soit $\{T(t); t \geq 0\}$ un C_0 -semigrpse de générateur infinitesimal A .

1) Montrer que pour tout $x \in X$ et pour tout $t > 0$, on a

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$$

2) En déduire que $x \in \overline{D(A)}$, c'est-à-dire que A est à domaine dense dans X .

Ex n°7: Soit X un espace de Banach et $\{T(t); t \geq 0\}$ un semigrpse sur X . On note A le générateur infinitesimal de $\{T(t); t \geq 0\}$.

1) Rappeler la définition de l'opérateur A

2) Dans quel cas a-t-on $A \in \mathcal{L}(X)$, c'est-à-dire que l'opérateur A est borné sur X .

3) On suppose maintenant que $\{T(t); t \geq 0\}$ est un C_0 -semigrpse. i.e $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, $\forall x \in X$

suite $\xrightarrow{3}$

on rappelle le théorème de Banach-Steinhaus (ou "principe de la borne inférieure").

Théorème de Banach-Steinhaus: si $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de $\mathcal{L}(X)$ tel que pour chaque $x \in X$; $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$.

Alors la famille $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $\mathcal{L}(X)$ c'est-à-dire $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

En considérons une suite $t_n \rightarrow 0$ et les opérateurs $T_n = T(t_n)$

correspondant, Montrer qu'il existe $\omega > 0$ et $M > 0$ tel que $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$

4) Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax$

En déduire que pour tout $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

Ex 8 Soient $T(t)$ et $S(t)$; $t \geq 0$ deux semi-groupes ayant même générateur infinitésimal A ; $D(A) \subset X \rightarrow X$

1) soit $x \in D(A)$. Montrer que la fonction

$$s \in [0, t] \rightarrow T(t-s)S(s)x \in X \text{ est constante}$$

(calculer la dérivée)

2) En déduire que $S(t)x = T(t)x$ pour tout $x \in X$

c'est-à-dire que le semi-groupe engendré par

A est unique

Ex n° 9: Soit $\{T(t); t \geq 0\}$ un C_0 -semi-groupe et A son générateur infinitésimal et soit $\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$.

On définit l'opérateur: $R: \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ espace des opérateurs linéaires bornés.

$$\text{pm: } R(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt = R(\lambda, A)$$

Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a: $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)n}$.

Ex n° 10: Soit A un opérateur défini par: $A\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2}$
 pour tout $\varphi \in D(A) = \{\varphi \in L^2(0, \pi) \mid \frac{d^2\varphi}{dx^2} \in L^2(0, \pi); \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0\}$

$X = L^2(0, \pi)$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(f, g)_X = \int_0^\pi f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2(0, \pi)$$

- 1) Vérifier que A est un opérateur linéaire
- 2) Montrer que A est auto-adjoint c.-à-d. que $A^* = A$
 (ce qui implique que A est fermé)
- 3) Démontrer que $(-A)$ engendre un C_0 -semi-groupe de contractions $\{T(t); t \geq 0\}$ sur $X = L^2(0, \pi)$.
- 4) Déterminer les valeurs propres de A et les fonctions propres associées
- 5) Donner une base de $\operatorname{Reis} Z$ de $X = L^2(0, \pi)$
- 6) Démontrer que A est un opérateur spectral de $\operatorname{Reis} Z$
- 7) Donner l'expression de $T(t)x$ pour $x \in L^2(0, \pi)$
 ainsi que l'expression de Ax pour $x \in D(A)$