3. EXERCICES :Distributions

3.1. **Exercice 1.***Distributions régulières***.** Soit $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{1}(x) = 1$$

et soit H la fonction de Heaviside c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que les distributions régulières associées à ces deux fonctions sont égales sur $]0, +\infty[$.

La distribution associée à la fonction H est la distribution T_H définie pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ par

$$< T_H, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \cdot \phi(x)dx = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \phi(x)dx.$$

(définition de la distribution associée à une fonction)

La distribution associée à la fonction $\mathbb{1}$ est la distribution $T_{\mathbb{1}}$ définie pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ par

$$< T_{\mathbb{1}}, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \phi(x)dx$$

Mais les deux distributions T_H et $T_{\mathbb{1}}$ sont égales sur $]0, +\infty[$ car elles coincident pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ nulle sur $\mathbb{R}-]0, +\infty[= \mathbb{R}^-$. En effet: pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ nulle sur $\mathbb{R}-]0, +\infty[= \mathbb{R}^-$ on a

$$< T_{\mathbb{1}}, \phi >= \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \phi(x)dx = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \phi(x)dx =< T_H, \phi > .$$

3.2. **Exercice 2.***Support d'une distribution***.** Calculer le support de δ_a et du peigne de Dirac.

Pour toute fonction de $\mathcal{D}$ nulle sur $\mathbb{R} - \{a\} =] - \infty, a] \bigcup]a, = \infty[$ (c'est bien un ouvert par réunion de deux ouverts) on a $< \delta_a, \phi >= \phi(a) = 0$ et c'est le plus grand ouvert sur lequel δ_a est nulle puisque si on prend une fonction ϕ qui n'est pas nulle en a, alors $< \delta_a, \phi >= \phi(a) \neq 0$. Le support de δ_a est donc le complémentaire de $\mathbb{R} - \{a\} = \{a\}$ (c'est bien un fermé).

Le support du peigne de Dirac est $\mathbb{Z}$ car si on prend une fonction ϕ qui est nulle $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n + 1[$, alors $< III, \phi >= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \phi(i)0$ c'est le plus grand. (sinon on devrait pouvoir ajouter au moins un $n_0 \in \mathcal{Z}$ mais pour la fonction ϕ égale à 0 partout sauf en n_0 où elle est égale à 1 (et qui appartient bien à $\mathcal{D}$on a $< III, \phi >= \phi(n_0) = 1 \neq 0$ donc $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n + 1[$ est bien le plus grand ouvert sur lequel III est nulle et $\mathbb{R} - \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n + 1[= \mathbb{Z}$ est le support de III.

3.3. **Exercice 3.** *Fonction localement intégrable.* Démontrer que la fonction $\ln |x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln |x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ il faut montrer que pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_a^b |\ln |x|\,|dx$$

est convergente. Il faut différencier les cas où $0 \notin [a, b]$ de ceux où $0 \in [a, b]$. En effet si $0 \notin [a, b]$ alors la fonction $|f|$ est continue sur le segment $[a, b]$ (composée de fonctions continues) et donc intégrable et l'intégrale $\int_a^b |\ln |x||dx$ est convergente (c'est le cas par exemple si $0 < a$ $[a, b] = [\frac{1}{2}, 3]$, mais aussi si [a,b]=[-5,-2] où l'on a $\int_{-5}^{-2} \ln(-x)dx = \int_2^5 \ln x dx$. On intègre aussi ici une fonction continue sur $[2, 5]$).

Si $0 \in [a, b]$ alors on a

$$\int_a^b |\ln |x||dx = \int_a^0 |\ln |x||dx + \int_0^b |\ln |x||dx$$

et cette intégrale converge si les deux intégrales $\int_a^0 |\ln |x||dx$ et $\int_0^b |\ln |x||dx$ convergent.

Pour b' tel que $b' \leq 1$ et $b' \leq b$, on a $\int_0^b |\ln |x||dx = \int_0^{b'} |\ln |x||dx + \int_{b'}^b |\ln |x||dx$. Alors $\int_0^{b'} |\ln |x||dx = \int_0^{b'} |\ln x|dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{b'} |\ln x|dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{b'} \ln x dx = -\lim_{\varepsilon \to 0}[x \ln x]_\varepsilon^{b'} = -b' \ln b' + \lim_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon \ln \varepsilon) = -b' \ln b' + 0 = -b' \ln b'$. Ainsi $\int_0^{b'} |\ln |x||$ converge donc $\int_0^b |\ln |x||dx$ converge (on a ajouté une intégrale convergente car d'une fonction continue sur le segment $[b, b']$) Le cas $\int_a^0 \ln |x|dx$ est similaire.

3.4. **Exercice 4.** *Vérifier qu'une fonctionnelle est une distribution.* Soit la fonctionnelle T : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par

$$T(\varphi) =< T, \varphi >= \varphi'(0)$$

Démontrer que T est une distribution.

Il faut démontrer que la fonctionnelle T est continue et linéaire.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$< T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 >= (\alpha\varphi_1 + \beta\phi_2)'(0) >$$

mais d'après la linéarité de la dérivation on a

$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)' = \alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2'$$

et $(\alpha\varphi_1' + \beta\varphi_2')(0) = \alpha\varphi_1'(0) + \beta\varphi_2'(0)$ d'où

$$< T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 >= \alpha < T, \varphi_1 > +\beta < T, \varphi_2 >$$

et T est bien linéaire.

Montrons qu'elle est continue: On rappelle qu'une fonctionnelle est continue si et seulement si pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}$, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers φ alors la suite de nombres $(< T, \varphi_n >)_n$ converge vers $< T, \varphi >$.

On considère donc une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}$, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers φ (c'est à dire que les supports des φ_n sont contenus dans un même ensemble indépendant de

n et que (φ'_n) converge uniformément vers φ', $(\varphi_n")_n$ converge uniformément vers $\varphi"$, (φ^p_n) converge uniformément vers (φ^p) ...)

Alors $| < T, \varphi_n > - < T, \varphi > | = |\varphi'_n(0) - \varphi'(0)| \leq ||\varphi'_n - \varphi'||_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$ puisque (φ'_n) converge uniformément vers φ'. Ainsi $(< T, \varphi_n >)_n$ converge vers $< T, \varphi >$ et T est donc bien continue.

3.5. **Exercice 5.** *Limite au sens des distributions.* On dit que la suite de distributions $(T_n)_n$ de $\mathcal{D}'$ converge vers la distribution T si la suite de nombres complexes $(< T_n, \varphi >)_n$ tend vers $< T, \varphi >$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$.

Soit la fonction porte

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose $g_n(x) = n\Pi(nx)$. Calculer la limite de la suite (T_{g_n}).

3.6. **Exercice 6.** *Dérivée au sens des distributions***.** Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction

(1) $f(x) = |x|$

Soit $T = T_f$ la distribution associée à la fonction f c'est à dire que pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$ on a

$$< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} < T', \varphi >= - < T, \varphi' >= & -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\varphi'(x)dx \\ & = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)dx \\ & = [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx - [x\varphi(x)]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \end{aligned}$$

Or φ est dans $\mathcal{D}$ donc à support borné et est donc nulle pour x assez petit donc $x\varphi(x)$ aussi et $\lim_{x \to -\infty} x\varphi(x) = 0$ et $[x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} = 0$. De façon similaire $[x\varphi(x)]_0^{\infty} = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} < T', \varphi >= & = -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \\ & = \int_{-\infty}^{0} -1 \times \varphi(x)dx + \int_0^{+\infty} 1 \times \varphi(x)dx \end{aligned}$$

La distribution T' est la distribution associée à la fonction g c'est à dire $T' = T_g$ où g définie par

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On la note aussi la fonction g de la façon suivante:

$$g = -1\!\!1_{]-\infty, \mathbf{0}]} + 1\!\!1_{[\mathbf{0}, +\infty[}.$$

Remarquons que T' peut-être la distribution régulière associé aussi à la fonction

$$g_a(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ a & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

(2) $f(x) = sgn(x)$ ($f(x) = 1$ pour $x > 0$, $f(x) = -1$ pour $x < 0$ et $f(0) = 0$) On procède de la manière que ci-dessus: Soit $T = T_f$ la distribution associée à la fonction f; on a alors pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$

$$< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$

Alors, avec la définition de la dérivée d'une distribution et puisque φ' est encore dans $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} < T', \varphi > &= - < T, \varphi' > \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} -\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx \\ &= [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - [x\varphi(x)]_{0}^{+\infty} \\ &= \varphi(0) - \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) - \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) + > \varphi(0) = 2\varphi(0) \\ &= 2 < \delta_0, \varphi > \end{aligned}$$

La distribution T' est donc la distribution δ_0 c'est à dire qu'ici on a un exemple de dérivée au sens des distributions d'une distribution régulière qui donne une distribution singulière.

3.7. **Exercice 7.** *Calcul d'une distribution***.** Soit ψ une fonction $\mathcal{C}^{+\infty}$.

(1) Déterminer la distribution $\psi\delta$.

La distribution produit d'une distribution par une fonction $\mathcal{C}^{+\infty}$ est par définition: pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$

$$< \psi\delta, \varphi >=< \delta, \psi\varphi >= \psi(0)\varphi(0) = \psi(0) < \delta, \varphi > .$$

Ainsi on a l'égalité de distributions

$$\psi\delta = \psi(0)\delta$$

(2) En déduire $\psi\delta$ quand $\psi(x) = x$. On a alors quand $\psi(x) = x$, $\psi\delta = 0$.