

La formulation des éléments finis consiste à définir une forme discrétisée de l'équilibre structural. Ce qui implique le passage du niveau de l'élément au niveau de la structure. Le point de départ se situe au niveau de la formulation du bilan énergétique qui est ensuite discrétisé pour définir les grandeurs élémentaires (i.e. matrice de rigidité et vecteur des forces nodales équivalentes). Les propriétés de la structure sont ainsi obtenues par assemblage des propriétés des éléments et par l'introduction des conditions de liaisons avec l'environnement, connues sous le nom de *conditions aux limites*. En final, la résolution du système permet d'obtenir les déplacements nodaux et par la suite les contraintes et les déformations en tout point de la structure.

1 Energie potentielle totale

L'énergie potentielle totale d'un système est obtenue par la combinaison de l'énergie de déformation (appelée également *énergie interne*) et du travail des forces extérieures. Pour un champ de déplacement u_i , cinématiquement admissible (i.e. continu, unique et respectant les conditions aux limites), l'énergie potentielle totale s'écrit sous la forme :

$$\Pi(u_i) = \int_V \left(\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} \right) dV - \int_V f_i^* u_i dV - \int_S f_i^* u_i dS \quad (3.1)$$

$\forall u_i$ cinématiquement admissible

avec ε_{ij} les déformations mécaniques sous l'effet du chargement, σ_{ij}^0 les contraintes initiales (thermiques ou précontraintes), C_{ijkl} le tenseur d'élasticité, f_i^* le vecteur des forces volumiques, f_i^* le vecteur des forces surfaciques, V le volume et S la surface extérieure du volume considéré. Dans cette formulation, les déformations sont obtenues par dérivation des déplacements $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u_k)$. Les conditions aux limites impliquent le respect des déplacements imposés \bar{u}_i sur la partie concernée S_u de la surface extérieure S , i.e. $u_i = \bar{u}_i$ sur S_u .

La physique est tellement bien faite pour que l'équilibre se réalise lorsque l'énergie potentielle totale est minimale (*cette loi s'applique également pour les étudiants : faire le minimum d'effort pour réussir l'examen*). Cette condition de minimalité se traduit directement par la stationnarité de l'énergie potentielle totale (figure 3.1). L'équilibre structural correspond donc à un état d'énergie stationnaire, dans lequel toute perturbation virtuelle du système ne produit aucune variation de l'énergie potentielle totale.

2 Formulation des matrices élémentaires

Pour obtenir le système matriciel du comportement élémentaire, il faut tout d'abord définir les champs intervenant dans le comportement du milieu; il s'agit des trois champs : déplacements, déformations et contraintes. On adopte ici une formulation en déplacement (ce qui est le plus utilisé dans la pratique).

2.1 Champ de déplacement

Lorsqu'un solide est soumis à des forces extérieures, il se déforme et chaque point matériel de coordonnées (x, y, z) se déplace en $(x + u, y + v, z + w)$ comme le schéma montre la figure 3.2. Bien entendu, les déplacements relatifs des points voisins génèrent des déformations ; c'est un peu comme dans une société, les divers objectifs des individus conduisent à des affinités ou à des tensions sociales ! Dans un élément, le champ de déplacement $u(x, y, z)$ est défini par l'interpolation des valeurs nodales u_i .

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(x, y, z) u_i \quad (3.2)$$

où n_e est le nombre de nœuds dans l'élément. N_i sont les fonctions de forme et u_i sont les déplacements nodaux. Dans le cas tridimensionnel, cette expression s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n_e} \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

u_i, v_i, w_i sont respectivement les déplacements au nœud i selon x, y et z ; $\{u\}$ symbolise le vecteur des déplacements qui contient les différentes composantes. Les variables sont regroupées dans un vecteur noté $\{q_e\}$.

$$\{q_e\}^t = \{ u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n \} \quad (3.4)$$

La notation matricielle permet de définir la relation 3.3 dans le cas général :

$$\boxed{\{u\} = [N] \cdot \{q_e\}} \quad (3.5)$$

$[N]$: matrice des fonctions de forme
 $(n_e \times 1)$: $(n_e \times n_{dof})$: $(n_{dof} \times 1)$

$[N]$ est la matrice des fonctions de forme, n_e est le nombre de champs et n_{dof} est le nombre de degré de liberté de l'élément; cette expression est donnée dans le cas 3D.

$$\left[\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \ \begin{bmatrix} N_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \ \dots \ \begin{bmatrix} N_{n_e} & 0 & 0 \\ 0 & N_{n_e} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \right] \cdot \{q_e\}$$

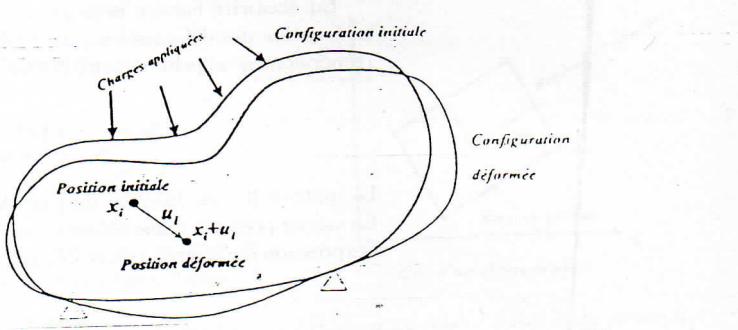


Figure 3.2 - Déformation du solide et déplacement du point matériel.

2.2 Déformations

Dans le cas élastique linéaire, les déformations sont données par les dérivées des déplacements :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7)$$

Ce qui peut être écrit sous la forme générale :

$$\{\varepsilon\} = [D] \cdot \{u\} \quad (3.8)$$

où $\{\varepsilon\}$ est le vecteur des déformations, $\{u\}$ est le vecteur des champs de déplacement et $[D]$ est la matrice des opérateurs de dérivées partielles; quelle que soit la nature du problème étudié, il est toujours possible de l'écrire sous cette forme. Dans l'exemple de l'élasticité plane, ce système matriciel est explicité par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

En remplaçant $\{u\}$ par son expression en fonction des valeurs nodales (équation 3.5), on obtient :

$$\{\varepsilon\} = [D] \cdot [N] \cdot \{q_e\} \quad (3.10)$$

$(n_e \times 1) \quad (n_e \times n_e) \quad (n_e \times n_{nod}) \quad (n_{nod} \times 1)$

où n_e est le nombre de déformations dans le problème étudié (égal à 3 pour l'élasticité plane). Ainsi, la relation liant les déformations aux déplacements nodaux s'écrit :

$$\boxed{\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{q_e\}} \quad (3.11)$$

$(n_e \times 1) \quad (n_e \times n_{nod}) \quad (n_{nod} \times 1)$

où $[B]$ est une matrice contenant les dérivées des fonctions de forme; elle est donc indépendante de l'état de déplacement de l'élément.

En élasticité linéaire isotrope, la loi de Hooke permet d'exprimer les contraintes en fonction des déformations, par l'intermédiaire de la matrice du comportement $[C]$ (généralement appelée matrice d'élasticité).

$$\boxed{\begin{array}{c} \{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \\ (n_e \times 1) \quad (n_e \times n_e) \quad (n_e \times 1) \end{array}} \quad (3.12)$$

La matrice $[C]$ est fonction du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν . En cas de présence d'une déformation initiale $\{\varepsilon^0\}$ (d'origine thermique par exemple), l'expression du comportement devient :

$$\{\sigma\} = [C] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^0\}) \quad (3.13)$$

Ainsi, la contrainte peut être calculée directement en fonction des variables nodales :

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [C] \cdot [B] \cdot \{q_e\} - [C] \cdot \{\varepsilon^0\} \\ &= [C] \cdot [B] \cdot \{q_e\} - \{\sigma^0\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec $\{\sigma^0\}$ le vecteur des contraintes initiales (souvent thermiques, ou précontraintes mécaniques) : $\{\sigma^0\} = [C] \cdot \{\varepsilon^0\}$.

2.4 Formes variationnelles

Dans les développements ci-dessus, il est possible de constater que le comportement est parfaitement défini en fonction des seules inconnues nodales $\{q_e\}$. Pour vérifier la stationnarité de l'énergie potentielle totale, il faut appliquer une variation virtuelle à travers la perturbation du champ de déplacement. Etant donné que toutes les autres quantités sont indépendantes de l'état de déplacement, l'opérateur s'applique uniquement sur les variables nodales.

$$\begin{aligned} \{\delta u\} &= [N] \cdot \{\delta q_e\} \\ \{\delta \varepsilon\} &= [B] \cdot \{\delta q_e\} \\ \{\delta \sigma\} &= [C] \cdot [B] \cdot \{\delta q_e\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

2.5 Matrices élémentaires

On a vu dans la section 1 que l'énergie potentielle totale d'un élément de solide (qui est en même temps un élément fini) est donnée par :

$$\Pi_e = \int_{V_e} \left(\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} \right) dV - \int_{V_e} f_i^e u_i dV - \int_{S_e} f_i^e u_i dS \quad (3.16)$$

où V_e et S_e sont respectivement le volume et la surface extérieure de l'élément. Cette expression peut être écrite sous une forme matricielle.

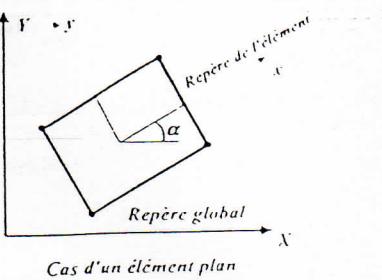
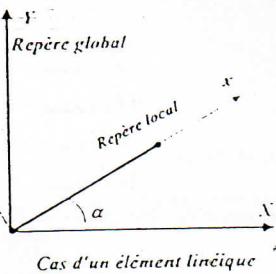


Figure 3.3 - Passage du repère local de l'élément au repère global de la structure.

4 Assemblage

Dans la pratique, une structure est modélisée par un certain nombre d'éléments. L'énergie potentielle de la structure est donnée par la somme des énergies de ses éléments.

$$\Pi = \sum_{e=1}^E \Pi_e \quad (3.28)$$

De même, la variation virtuelle de l'énergie structurale vérifie le principe de stationnarité :

$$\delta\Pi = \sum_{e=1}^E \delta\Pi_e = 0 \quad (3.29)$$

On définit un vecteur représentant les déplacements des nœuds de la structure $\{q\}$. Le vecteur des déplacements des nœuds d'un élément $\{q_e\}$ est obtenu à l'aide d'une matrice de sélection $[S_e]$, un terme de cette matrice est soit "0", soit "1" (pour les degrés de liberté sélectionnés).

$$\{q_e\} = [S_e] \{q\} \quad (3.30)$$

Cette sélection donne le vecteur $\{q_e\}$ dans le repère de la structure (repère de $\{q\}$). Il faudra donc passer au repère de l'élément, en utilisant la matrice de passage $[T_e]$.

$$\{q_e\}_{local} = [T_e] [S_e] \{q\} \quad (3.31)$$

Il reste maintenant à vérifier la stationnarité de l'énergie potentielle de la structure :

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \sum_e \{\delta q\}^t [S_e]^t [T_e]^t \left(\int_{V_e} [B]^t [C] [B] dV \right) [T_e] [S_e] \{q\} \\ &\quad - \{\delta q\}^t [S_e]^t [T_e]^t \int_{V_e} [B]^t [C] \{\varepsilon^0\} dV \\ &\quad - \{\delta q\}^t [S_e]^t [T_e]^t \int_{V_e}^t [N]^t \{f^*\} dV - \{\delta q\}^t [S_e]^t [T_e]^t \int_{S_e}^t [N]^t \{f^*\} dS \end{aligned} \quad (3.32)$$