

# Chapitre 2. Plasticité.

(02 Semaines)

1. Introduction
2. Limite d'élasticité : Problématique
3. Seuil de plasticité.
4. Les critères de plasticité;
5. Lois de comportement en plasticité ;
6. élasticité-plasticité parfaite,
7. élasticité-plasticité avec écrouissage linéaire,
8. élasticité-plasticité avec écrouissage en lois puissance.

## 1. Introduction

Malheureusement, la loi de comportement n'est plus valide pour certains cas. Elle admet des limites. La majorité écrasante des expériences montre que, lorsque les contraintes appliquées sont **trop** fortes, le matériau perd ses qualités d'élasticité et il présente des déformations qui ne se suppriment pas en supprimant les sollicitations. Des déformations permanentes s'imposent. On les appelle : **déformations plastiques**.

## 2. Limite d'élasticité.

### a. Problématique

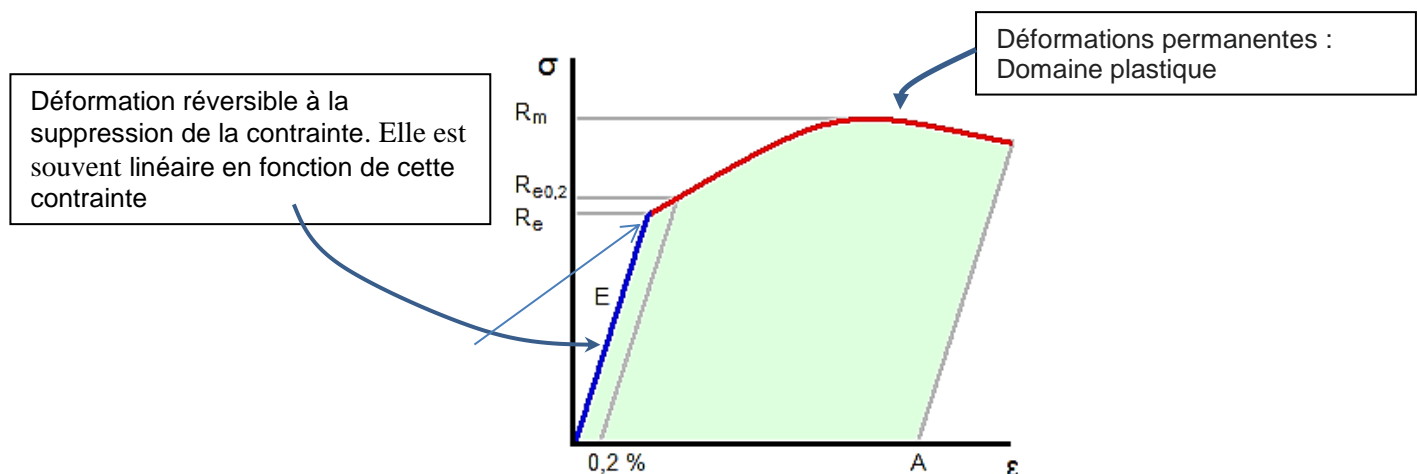
La problématique est la suivante :

**« Comment vérifier, dans un état de contrainte, que la limite élastique n'est pas dépassée ? »**

En fait, l'ingénieur utilisateur des matériaux, notamment des métaux purs ou des alliages, est soumis à la contrainte du choix du matériau, par lequel il doit assurer d'une part un prix de revient minimal et d'autre part une structure, une pièce, un appareil, ..., performant et résistant. Pour lui, alors, il est nécessaire de bien définir la frontière qui lui permet de décider. Donc, il lui faut avoir des éléments définissant cette frontière. On appelle ces éléments critères de plasticité.

### b. Définition de la limite d'élasticité

La limite d'élasticité est la contrainte à partir de laquelle un matériau cesse de se comporter comme un matériau élastique, c'est-à-dire cesse de se déformer d'une manière élastique et réversible. Il commence alors au-delà de cette contrainte de se déformer d'une manière irréversible.



Courbe schématique contrainte vs déformation. Aux faibles déformations, la pente E de la partie linéaire est le [module de Young](#). R<sub>m</sub> est la résistance mécanique.

### Remarque :

- a) Pour un matériau fragile (هش) la limite d'élasticité est la contrainte à laquelle le matériau se rompt à cause de ses microfissures internes. Cette contrainte-seuil est estimée par le critère de Griffith.

### c. Notation

La limite d'élasticité est notée par différentes notations selon le type d'essai mécanique.

Dans le cas de traction ou compression on note:

- i.  $\sigma_y$  (en raison de Yield strength),
- ii.  $f_y$  dans la norme Eurocode,
- iii.  $R_e$  ou  $\sigma_{LE}$ ,
- iv.  $\sigma_{0.2}$  ou  $\sigma_{P0.2}$  dans le cas où la transition élastique-plastique est floue (la valeur du contrainte limite laisse 0.2 % de déformation plastique lorsqu'elle est supprimée).

Dans le cas cisaillement on note  $T_y$  ou  $T_{LE}$ , ou même  $\tau$ .



### d. Cas des métaux

Dans le cas des métaux, on peut, dans une première approximation et vue de simplification, considérer la limite d'élasticité en compression  $R_{ec}$  et en traction  $R_e$ , on peut les considérer égales.

Cette considération est valable pour les aciers doux et mi-durs. Elle n'est pas valable pour les fontes. Pour cette dernière  $R_{ec}=150$  MPa et  $R_e=20$  MPa.

La limite en cisaillement,  $R_{eg}$ , vaut en général entre 0,5 et 0,8 fois la limite en traction :

$$0,5 \times R_e \leq R_{eg} \leq 0,8 \times R_e.$$

- i. Pour les aciers doux :  $R_{eg} = 0,5 \times R_e$ , avec  $R_e \leq 270$  MPa. De même pour les alliages d'aluminium ;
- ii. Pour les aciers mi-durs ( $320 \text{ MPa} \leq R_e \leq 500 \text{ MPa}$ ) :  $R_{eg} = 0,7 \times R_e$  ;
- iii. Pour les aciers durs ( $R_e \geq 600 \text{ MPa}$ ) :  $R_{eg} = 0,8 \times R_e$

En général :  $R_{eg}$  est relié à  $R_e$  par :

$$k_0 = \frac{R_e}{R_{ec}}$$

$$R_{eg} = \frac{k_0}{1 + k_0} \times R_e$$

$k_0$  : rapport entre la limite d'élasticité en traction  $R_e$  et la limite d'élasticité en compression  $R_{ec}$



ChatGPT

Les termes "aciers doux" et "aciers mi-durs" sont généralement utilisés pour décrire des nuances spécifiques d'acier en fonction de leurs propriétés mécaniques, notamment leur limite élastique et leur dureté. Voici une brève description de ces deux types d'acier :

#### 1. Aciers Doux :

- **Limite Élastique :** Les aciers doux ont généralement une limite élastique relativement basse. Elle se situe généralement entre 200 MPa et 300 MPa.
- **Dureté :** Les aciers doux sont caractérisés par leur faible dureté. Ils sont relativement faciles à usiner, former et souder.
- **Applications :** Les aciers doux sont couramment utilisés dans la construction, la fabrication de pièces de machines, la carrosserie automobile, et d'autres applications où la facilité de fabrication et la malléabilité sont importantes.

#### 2. Aciers Mi-Durs :

- **Limite Élastique :** Les aciers mi-durs ont une limite élastique plus élevée par rapport aux aciers doux, généralement entre 300 MPa et 600 MPa.
- **Dureté :** Ils présentent une dureté intermédiaire, ce qui signifie qu'ils offrent une meilleure résistance tout en restant suffisamment ductiles pour certaines applications.
- **Applications :** Les aciers mi-durs sont souvent utilisés dans des applications nécessitant une résistance accrue sans sacrifier complètement la formabilité. Des exemples d'applications comprennent les composants mécaniques, les engrenages, les axes, etc.

Il est important de noter que ces termes peuvent varier en fonction des normes et des classifications spécifiques à chaque pays ou organisme de normalisation. Les propriétés exactes des aciers doux et mi-durs peuvent également dépendre de la composition chimique spécifique de l'acier et des traitements thermiques éventuels subis par le matériau. Lorsque vous travaillez avec des matériaux, il est recommandé de se référer aux spécifications techniques spécifiques fournies par les fabricants ou les normes industrielles.



Message ChatGPT...



#### e. Dimensions et unités

D'après l'équation aux dimensions, la limite d'élasticité est homogène à une pression, ou plus précisément à une contrainte (représentation :  $ML^{-1}T^{-2}$ ).

Dans la littérature moderne, elle s'exprime en pascals (Pa), ou plus généralement en mégapascals (MPa) en raison de son ordre de grandeur. Il y a quelques années, on parlait de l'unité aujourd'hui désuète de kilogramme-force par centimètre carré ( $kgf/cm^2$ ). On rencontre aussi le newton par millimètre carré ( $N/mm^2$  ;  $1 MPa = 1 N/mm^2$ ).

f. Ques ordre de grandeurs



**Tableau de limite d'élasticité en traction de matériaux usuels**

<b>Matière</b>	<b>Nuance</b>	<b>R<sub>e</sub> (MPa)</b>
<b>Résineux courants</b>	C18 à C30	18 à 30
<b>Bois lamellé-collé</b>	GL24 à GL32	24 à 32
<b>Alliage d'aluminium</b>	Série 1000 à série 7000	90 à 470
<b>Acier de construction usuel non allié</b>	S235 à S355	235 à 355
<b>Acier au carbone trempé</b>	XC 30 (C30)	350 à 400
<b>Acier faiblement allié trempé</b>	30 Cr Ni Mo 16 (30 CND 8)	700 à 1 450
<b>Alliage de titane</b>	TA 6V	1 200
<b>Fibre de verre</b>	"E", courant	2 500
<b>Fibre de verre</b>	"R", haute performance	3 200
<b>Fibre de carbone</b>	"HM", haut module de Young	2 500
<b>Fibre de carbone</b>	"HR", haute résistance	3 200

g. Facteurs influençant cette limite

La déformation élastique se produit par déformation réversible de la structure du matériau par une modification des distances interatomiques. La déformation plastique se produit par déplacement de dislocations, qui sont des défauts cristallins. L'apparition de ces mouvements, se produisant au seuil de la limite d'élasticité, dépend de plusieurs facteurs dont les principaux sont :

- les forces de cohésion interatomiques : plus les liaisons entre atomes sont importantes, plus il est difficile de les déplacer donc plus la limite d'élasticité est élevée ;
- la structure cristalline : les glissements (les déplacements des dislocations) se font plus facilement sur les plans atomiques ayant une forte densité ; les cristaux ayant le plus de possibilités de glissement sont les cristaux de structure cubique à faces centrées ; de fait, les matériaux les plus ductiles (or, plomb, aluminium, austénite dans les aciers) possèdent ce type de structure ;
- les atomes étrangers bloquent les dislocations (nuage de Cottrell, épinglage) ; les métaux purs sont plus ductiles que les métaux alliés ;
- les dislocations sont bloquées par les joints de grain (grain boundary en anglais) ; plus il y a de joints de grain, donc plus les cristallites sont petits, plus la limite d'élasticité est élevée ;

- les dislocations se bloquent entre elles ; plus le matériau contient de dislocations, plus la limite d'élasticité est élevée (écrouissage) ;
- les atomes peuvent se réorganiser sous l'effet de l'agitation thermique (restauration et recristallisation dynamiques, montées de dislocations), la vitesse de déformation intervient donc ;
- dans le cas des produits laminé ou extrudés, on a une texture (cristallographie) et un allongement des grains dans une direction donnée, donc une anisotropie de la limite d'élasticité (la taille des cristallites et l'orientation des plans cristallographiques denses ne sont pas les mêmes selon la direction considérée) ; on parle de « fibre » (au sens figuré), la résistance est plus importante dans la direction de laminage ou d'extrusion que dans les directions transverses.

Les critères de plasticité sont des modèles mathématiques ou des conditions qui définissent le passage d'un matériau de l'état élastique à l'état plastique, c'est-à-dire le début de la déformation permanente. Voici quelques critères de plasticité couramment utilisés :

1. **Critère de Von Mises** : Le critère de Von Mises est basé sur la déformation équivalente et considère que la plasticité commence lorsque la déformation équivalente atteint une valeur critique. C'est largement utilisé pour les métaux ductiles.
2. **Critère de Tresca (ou critère de Coulomb-Mohr)** : Ce critère se base sur les contraintes principales et considère que la plasticité débute lorsque la différence entre les contraintes principales dépasse une valeur critique. Il est souvent utilisé pour des matériaux plus fragiles.
3. **Critère de Drucker-Prager** : Principalement utilisé pour les sols, ce critère combine des aspects de la théorie de la plasticité et des critères de cisaillement. Il tient compte de l'effet de la pression sur la résistance au cisaillement.
4. **Critère de Mohr-Coulomb** : Utilisé en géotechnique, ce critère s'appuie sur les contraintes de cisaillement et normales pour déterminer le début de la plasticité dans les sols.
5. **Critère de Huber-von Mises-Hencky** : C'est une variation du critère de Von Mises qui prend en compte les déformations plastiques équivalentes. Il est particulièrement utile pour les matériaux ductiles.
6. **Critère de Plasticité Associée (ou critère de la contrainte de Coulomb-Mohr)** : Utilisé pour des matériaux qui subissent des déformations importantes, il lie la contrainte de cisaillement à la pression et la contrainte de traction.
7. **Critère de Hill** : Un critère anisotrope qui prend en compte l'orientation des fibres dans des composites et est utilisé pour décrire le comportement plastique des matériaux composites.

Ces critères de plasticité sont des outils mathématiques qui aident les ingénieurs et les chercheurs à modéliser le comportement des matériaux lorsqu'ils passent de l'état élastique à l'état plastique, ce qui est essentiel pour concevoir des structures et des matériaux capables de supporter des charges sans défaillance plastique prématurée.

Pour les métaux et alliages, plusieurs critères de plasticité sont utilisés pour modéliser le comportement plastique. Voici quelques-uns des critères de plasticité couramment appliqués aux métaux et alliages :

1. **Critère de Von Mises** : Ce critère est largement utilisé pour les métaux ductiles. Il repose sur la déformation équivalente et considère que la plasticité débute lorsque la déformation équivalente atteint une valeur critique.
2. **Critère de Tresca (Critère de Coulomb-Mohr)** : Il se base sur les contraintes principales et considère que la plasticité commence lorsque la différence maximale entre les contraintes principales dépasse une valeur critique. Il est souvent appliqué à des matériaux plus fragiles.
3. **Critère de Drucker-Prager** : Utilisé pour les métaux, ce critère combine des aspects de la théorie de la plasticité et des critères de cisaillement. Il tient compte de l'effet de la pression sur la résistance au cisaillement.
4. **Critère de Hill** : Ce critère anisotrope prend en compte l'orientation des grains dans le matériau. Il est utile pour modéliser le comportement plastique des métaux polycristallins.
5. **Critère de Barlat** : Il est conçu pour prendre en compte l'écrouissage anisotrope des métaux laminés à froid. Il est utilisé pour modéliser les comportements complexes des tôles métalliques.
6. **Critère de Johnson-Cook** : Un modèle couramment utilisé pour modéliser le comportement en déformation plastique à haute température, souvent appliqué à la simulation des processus de formage à chaud.
7. **Critère de Chaboche** : Il est utilisé pour modéliser le comportement cyclique des métaux, prenant en compte les effets cumulatifs de la déformation plastique.

Ces critères sont des outils mathématiques qui aident à modéliser de manière réaliste le comportement plastique des métaux et alliages dans diverses conditions de charge. Le choix du critère dépend souvent des propriétés spécifiques du matériau, des conditions de chargement et des applications prévues.

### 3. Les critères de plasticité

#### Introduction

L'objectif de l'établissement des critères de plasticité est de répondre à la question : **comment peut-on préciser si le comportement d'un état de contrainte est encore plastique ou on est passé à l'état plastique ?** Cela conduit à l'obligation de définir, pour tout état de contrainte, la limite élastique.

La solution réside dans l'établissement de critères dits critères de plasticité et qui est une fonction mathématique tel que :

- $f(\bar{\sigma}) < 0$  correspond à l'état élastique ;
- $f(\bar{\sigma}) = 0$  correspond à l'état plastique ;

En fait il n'y a pas de critères universels englobant tous les résultats expérimentaux. En plus, la détermination d'un critère pour la détermination des différentes limites élastiques nécessite une particularité délicate qui fait appel à des machines d'essai sophistiquées extrêmement coûteuses.

La communauté de l'industrie préfère travailler avec des critères faisant appel à un ou deux essais et plus simples à mettre en œuvre.

- Dans le cas des matériaux ductiles et malléables, on se réfère à la limite élastique  $Re$ .
- Dans le cas des matériaux fragiles, on se réfère à la rupture  $Rr$  ;
- Dans le cas de contraintes bi-axiales ou même triaxiales, on se réfère à d'autres critères tels que les critères de Rankine, de Tresca et de Von Mises.

#### a. Critères de Rankine

Le critère de Rankine pour les métaux est une façon de prédire la rupture d'un matériau métallique ductile en se basant sur les contraintes principales dans un état de contrainte donné.

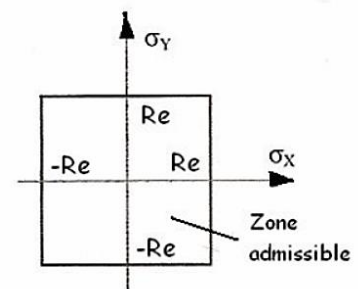
Ce critère stipule que la différence entre la contrainte principale maximale et minimale ne doit pas dépasser la limite d'élasticité du matériau. Il compare la contrainte principale maximale à la résistance à la traction du matériau.

**Enoncé :** « La contrainte normale maximale  $\sigma_{\max}$  en tout point d'un matériau doit être inférieure ou égale à la contrainte limite d'élasticité à la traction  $Re$  ( ou à la compression) :  $\sigma_{\max} \leq Re$  »

Mathématiquement, le critère de Rankine s'exprime comme suit :

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{uts}$$

où  $\sigma_{uts}$  est la limite de traction ultime du matériau.



La figure suivante montre la représentation du critère de Rankine dans le cas particulier où on a un plan de contraintes avec  $\sigma_z = 0$ .

**Remarque :** Il est important de noter que le critère de Rankine pour les métaux est une approximation simplifiée de la réalité et peut ne pas être aussi précis que d'autres critères de rupture plus avancés, comme le critère de Von Mises.

#### b. Critère de Von Mises

**Critère de von Mises :** Ce critère est couramment utilisé pour prédire le seuil de déformation plastique dans des matériaux ductiles. Il considère la somme des déformations équivalentes dans un matériau soumis à une contrainte multiaxiale.

Mathématiquement, le critère de von Mises s'exprime comme suit :

$$\sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_{ys}$$

où  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , et  $\sigma_3$  sont les contraintes principales, et  $\sigma_{ys}$  est la limite élastique en traction du matériau.

#### c. Critère de Ruine

Pour prendre en compte les phénomènes imprévus, on utilise une valeur limite pratique  $R_p$  qui est inférieure à  $R_e$ .

On définit la limite pratique  $R_p = R_e/s$  ; avec  $s$  est coefficient de sécurité.

$$R_p < R_e$$

$$\sigma_x \leq R_p$$

Le critère de Ruine indique le point au-delà duquel la défaillance est susceptible de se produire.

#### d. Critères de Guest

Pour un état de cisaillement pur on utilise le critère de Guest

$$\tau_{max} \leq R_{eg}$$

#### a. Critère de Griffith

**Critère de rupture de Griffith :** Ce critère est souvent utilisé pour expliquer la rupture des matériaux fragiles tels que la céramique. Il se base sur la présence de fissures et considère la contrainte critique nécessaire pour la propagation des fissures. Mathématiquement, il peut être exprimé comme suit :

$$\sigma = \frac{2 \cdot E \cdot \gamma}{\pi \cdot a}$$

où  $\sigma$  est la contrainte nécessaire pour la rupture,  $E$  est le module d'élasticité,  $\gamma$  est l'énergie de surface, et  $a$  est la longueur de la fissure.

## Limitations

1. **Applicabilité aux matériaux fragiles :** Le critère de Griffith est principalement conçu pour les matériaux fragiles, tels que la céramique ou le verre. Il n'est pas directement applicable aux matériaux ductiles comme les métaux.
2. **Prédiction conservatrice :** Le critère de Griffith a tendance à donner des prédictions conservatrices, surestimant la taille critique des fissures nécessaires pour entraîner une rupture. Dans la pratique, d'autres facteurs, tels que la distribution des défauts, les contraintes résiduelles, et d'autres effets locaux, peuvent influencer la rupture.
3. **Dépendance à la ténacité à la rupture :** La validité du critère de Griffith dépend fortement de la ténacité à la rupture ( $K_{Ic}$ ) du matériau, qui peut être difficile à mesurer avec précision, surtout pour des échantillons de petite taille.
4. **Néglige les processus de plasticité :** Le critère de Griffith est basé sur des considérations élastiques et néglige les processus de plasticité qui peuvent se produire dans certains matériaux fragiles avant la rupture. Les effets de la plasticité peuvent influencer la propagation des fissures.
5. **Non prise en compte des effets environnementaux :** Le critère de Griffith ne tient pas compte des effets environnementaux tels que la corrosion ou la présence de fluides qui peuvent affecter la propagation des fissures.
6. **Échelle macroscopique :** Le critère de Griffith est formulé à une échelle macroscopique et ne prend pas en compte les variations locales de la structure du matériau qui peuvent influencer la propagation des fissures.

## b. Critères de Tresca

Le critère de Tresca, également connu sous le nom de critère de cisaillement maximum, est un critère de plasticité qui prédit la rupture d'un matériau en fonction de la contrainte de cisaillement. Ce modèle a été développé par le physicien français Henri Tresca.

Il postule que la rupture se produit lorsque la contrainte de cisaillement atteint une valeur critique.

**Enoncé et formulation :** « La contrainte équivalente en tout point d'un matériau doit être inférieure ou égale à la contrainte limite d'élasticité à la traction  $R_e$  (ou à la compression) :

$$\sigma_{max} \leq R_e \quad \sigma_{eq} = 2 \tau_{max} \quad \text{soit : } 2 \tau_{max} \leq R_e.$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \leq \tau_{\max}$$

où  $\tau$  est la contrainte de cisaillement,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales et  $\tau_{\max}$  est la contrainte de cisaillement maximale admissible.

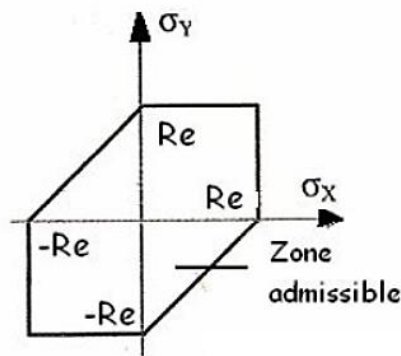
### Remarques

- Ce critère donne de bons résultats dans le cas de sollicitations composées, si le matériau satisfait au mieux à  $R_{ge} = 0,5 \cdot R_e$  ( ex. acier doux S235 ).

### Représentation graphique

Graphiquement, le critère de Tresca est représenté par une surface de rupture dans l'espace des contraintes principales. Si l'état de contrainte actuel se situe à l'intérieur de cette surface, le matériau reste élastique. Si l'état de contrainte atteint ou dépasse la surface de rupture, le matériau subit une déformation plastique.

La figure suivante montre la représentation du critère de Tresca.



### Limitations :

Bien que le modèle de Tresca soit simple et largement utilisé, il présente des limitations. Il ne tient pas compte de certains aspects du comportement plastique réel des métaux, notamment les variations de comportement en fonction de la direction de la contrainte.

### Utilisation :

Le modèle de Tresca est souvent utilisé dans le domaine de la mécanique des matériaux pour prédire le comportement plastique des métaux sous des charges complexes. Cependant, dans des applications réelles, d'autres modèles plus sophistiqués, tels que le critère de Von Mises, peuvent également être utilisés pour mieux représenter le comportement des matériaux.

**Enoncé :** On définit une contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  en tout point d'un matériau devant être inférieur à la limite élastique en traction ( ou à la compression le cas échéant ).

Le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2)} \leq Re$$

Validité : Pour un état de traction simple :  $\sigma \leq Re$

Pour un état de cisaillement pur :  $\sqrt{3} \cdot \tau \leq Re$

Ce qui impose  $\sigma_{eq} \leq \frac{Re}{\sqrt{3}} = 0,577 \cdot Re \quad (\approx 0,6 Re)$

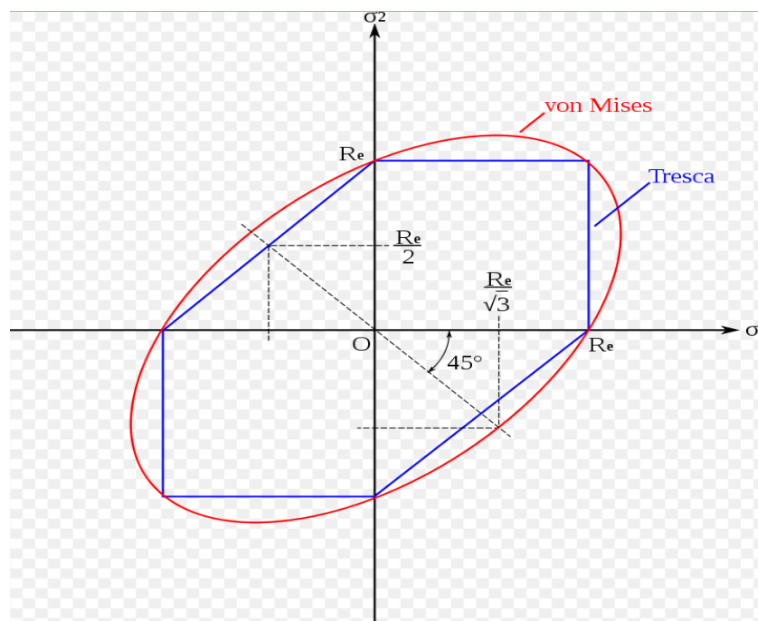
Etat plan de contrainte ( $\sigma_3 = 0$ ) : La contrainte équivalente de Von Mises se réduit à la relation

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq Re \quad (\text{ce qui représente l'équation de l'ellipse et le domaine élastique est représenté par la Fig. 8-16}).$$

**Note :**

Si on compare les deux critères précédents ( Fig. 8-16 ), on constate que c'est le critère de Tresca qui est le plus sévère .

- Pour les poutres soumises à des sollicitations normale et tangentielle :  $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq Re/s$



### Comparaison du critère de von Mises et du critère de Tresca

Le critère de cisaillement maximal est plus prudent que le critère de Von Mises, sachant que l'hexagone qui représente le critère de cisaillement est inclus dans l'ellipse représentant le critère de von Mises.

Dans le cas d'un état de cisaillement pur, le critère de Von Mises prévoit la rupture à  $(0,577 \cdot la$  limite d'élasticité), et celui de Tresca à 0,5 fois.

Toutefois, les essais de torsion pure utilisés pour ne mettre en évidence que le cisaillement pur montrent que le critère de von Mises donne des résultats plus précis que la théorie du cisaillement maximal.

- la contrainte de Tresca :

$$\sigma_e = \max(|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_{III} - \sigma_I|);$$

- la contrainte de von Mises :

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}.$$

Dans un cas de sollicitations planes, pour lequel on n'a que deux contraintes normale  $\sigma$  et de cisaillement  $\tau$ , les définitions deviennent :

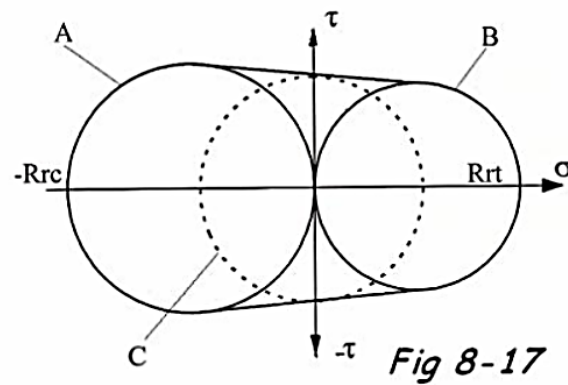
- contrainte de Tresca :  $\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$  ;
- contrainte de von Mises :  $\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ .

La frontière entre le domaine plastique et le domaine élastique est la surface  $\sigma_e = R_e$  :

- $\sigma_e < R_e$  : domaine élastique ;
- $\sigma_e > R_e$  : domaine plastique.

### 8.6.5 Critère de Mohr

Pour beaucoup de matériaux, les résistances à la rupture en traction  $R_{rt}$  et en compression  $R_{rc}$  diffèrent. Le critère de Mohr basé sur des essais expérimentaux, prend en compte cette différence (Fig.8-17 ).

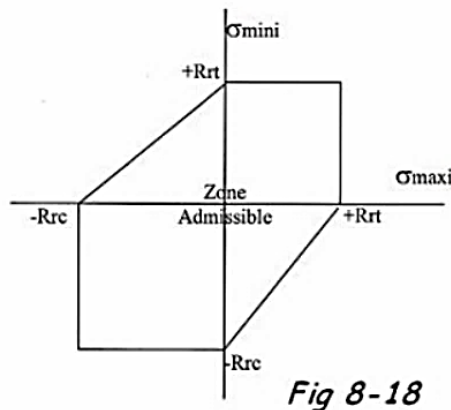


### 8.6.6 Critères pour matériaux fragiles (critère de Coulomb )

Schématiquement, lorsqu'un matériau fragile est soumis à un essai de traction, sa rupture se produit sans déformation plastique préalable.

Les contraintes maximales atteignent la limite de rupture  $R_r$ . Le critère de Coulomb ( ou de la contrainte normale maximale ) s'écrit :

$$\sigma_{max} \leq R_r \text{ et } \sigma_{min} \leq R_r$$



#### 4. Lois de comportement plastique

##### III. 4 Lois d'écoulement

Il est clair que dès que la limite d'élasticité initiale a été franchie, au cours de l'histoire de charge du matériau, l'apparition des déformations permanentes fait qu'il n'y a plus, comme en élasticité, correspondance biunivoque entre  $\sigma$  et  $\epsilon$  : la donnée de  $\sigma$  ne suffit plus à définir  $\epsilon$ .

En revanche, si l'on connaît non seulement la contrainte actuelle  $\sigma$  mais tout le trajet de charge suivi pour l'atteindre à partir de l'état initial naturel, alors la donnée d'une variation de contrainte  $d\sigma$  suffit à déterminer la variation correspondante de la déformation  $d\epsilon$ . On dit que la loi de comportement est de type incrémental.

L'incrément total de déformation se compose en général de deux parties : un incrément élastique  $d\epsilon^e$  et un incrément plastique  $d\epsilon^p$ .

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p$$

L'incrément des contraintes  $d\sigma$  est dû aux déformations élastiques et donc :

$$d\sigma = E \cdot d\epsilon^e$$

Donc le module d'élasticité est défini dans chaque état par  $(\sigma, \epsilon)$  :

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon^e}$$

Dans le cas où le point de charge serait à la limite d'élasticité actuelle on définit le « module élasto-plasticité tangent » par la relation :

$$E^{ep} = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \text{ donc } d\sigma = E^{ep} \cdot d\epsilon$$

et le module d'écrouissage du matériau étant :

$$H = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} \text{ donc } d\sigma = H \cdot d\epsilon^p$$

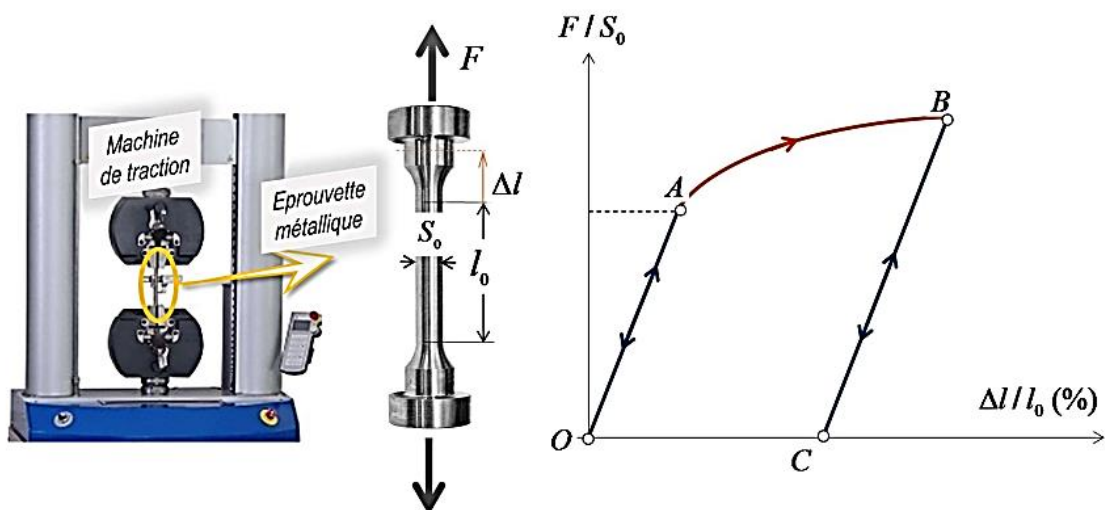
On a alors la relation évidente :

$$\frac{1}{E^{ep}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H}$$

La relation (III.27) est appelée règle d'écoulement plastique.

## 5. Elasto-plasticité (à parti de l'essai de traction simple d'une éprouvette métallique)

La figure 1 représente la courbe-type d'un *essai de traction simple* d'une éprouvette métallique, donnant l'évolution de l'effort  $F$  exercé par une machine de traction (rapporté à l'aire  $S_0$  de la section transversale initiale de l'éprouvette) en fonction de l'allongement relatif  $\Delta l/l_0$ , mesuré dans la partie centrale de l'éprouvette.



L'analyse d'une telle courbe expérimentale fait apparaître les caractéristiques suivantes :

- ✓ La *réversibilité* de la réponse de l'éprouvette dans la partie  $OA$  du diagramme effort-allongement, c'est-à-dire tant que l'effort  $F$  demeure *inférieur à un seuil* correspondant à l'ordonnée du point  $A$ , appelé *seuil d'élasticité initial*. Cette réversibilité se traduit par une relation de proportionnalité entre l'effort et l'allongement, caractéristique du comportement *élastique linéaire* du matériau constitutif.
- ✓ La *non-linéarité* de la courbe de chargement si l'on poursuit le chargement *au-delà* de ce seuil d'élasticité initial, la tangente à la courbe de chargement décroissant progressivement jusqu'à s'annuler lorsque la rupture de l'éprouvette est atteinte.
- ✓ L'*irréversibilité* de la réponse de l'éprouvette, mise en évidence lorsque l'on effectue une décharge complète ( $F \searrow 0$ ) à partir du point  $B$  jusqu'au point  $C$ . La courbe  $BC$  de décharge est différente de la courbe  $OAB$  de première charge, de sorte qu'au point  $C$  subsiste un allongement *résiduel*. C'est la manifestation du *comportement plastique* du matériau constitutif.
- ✓ Rechargeant l'éprouvette à partir de ce nouvel état déchargé, on constate que le point représentatif dans le diagramme parcourt en sens inverse le segment  $BC$  de décharge. L'ordonnée du point  $B$  représente le nouveau seuil d'élasticité, appelé *seuil d'élasticité actuel*.

## 6. Comportement élastique parfaitement plastique

### Formulation 1D du comportement élastique parfaitement plastique

La figure 5(a) ci-dessous représente le schéma général de comportement élastoplastique 1D avec écrouissage (exemple de la courbe de traction simple d'un acier), tandis que la figure 5(b) représente le cas particulier important d'un comportement *élastique parfaitement plastique* pour lequel la courbe contrainte-déformation comporte *un plateau horizontal* (exemple d'un acier doux à faible teneur en carbone). Dans ce dernier cas, le seuil d'élasticité  $\sigma_0$  demeure constant, c'est-à-dire que l'écrouissage du matériau disparaît. Ce modèle idéal du matériau élastoplastique parfait est souvent associé à la notion de *ductilité*, par opposition à celle de *fragilité* qui évoque l'idée de *rupture brutale* de l'élément de matière lorsque le seuil d'élasticité est atteint. Nous reviendrons ultérieurement sur ces notions importantes dans la seconde partie du cours portant sur la *théorie du calcul à la rupture*.

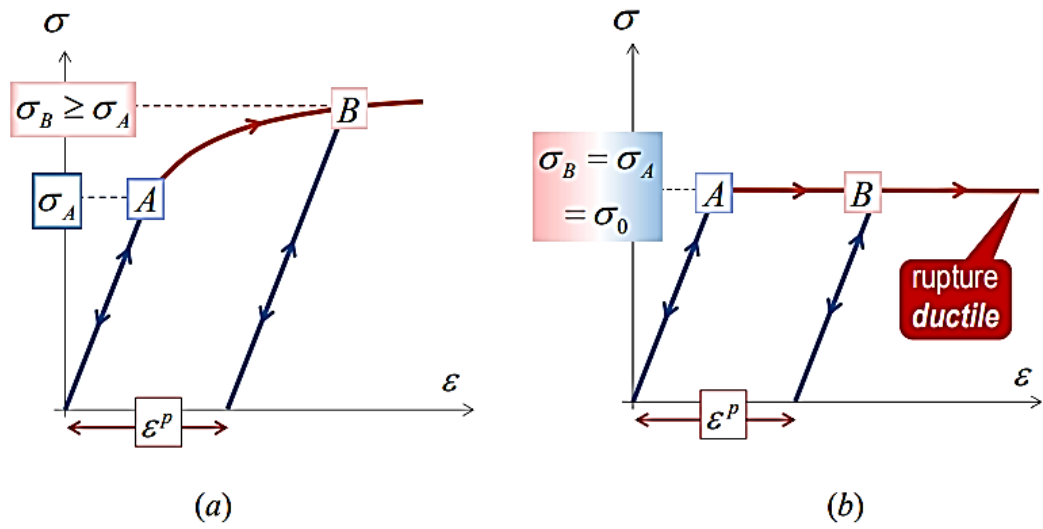


Figure 5. Schémas de comportement (a) élastoplastique avec écrouissage, (b) élastique parfaitement plastique (absence d'écrouissage).