الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique

جـــامعـــة محمد الصديق بن يحــيــــــى جيجــل

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : EFST

كليـة العلوم و التكنولوجيا
قســــم التعليم الاساسي للعلوم و التكنولوجيا

Polycopié de Cours

Dr. Ahmed Nasri

Mathematiques II

Année Universitaire 2023-2024

Table des matières

Introduction

Ce document est destiné aux étudiants de la première année tronc commun de la science et de la technologie. Il suit le programme officiel du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Le manuscrit est divisé en cinq chapitres, et généralement, nous atteignons le chapitre 4 au cours de l'année. La répartition des chapitres est la suivante

Chapitre 01 : Matrices et Déterminants :

Ce chapitre inaugure notre exploration des fondements de l'algèbre linéaire. Nous commencerons par examiner les concepts de base des matrices et des déterminants, en nous attardant sur leurs définitions et leurs opérations. Nous découvrirons également la relation étroite entre les matrices et les applications linéaires, ainsi que les techniques de changement de base et de calcul de matrices de passage.

Chapitre 02 : Systèmes d'Équations Linéaires :

Les systèmes d'équations linéaires représentent un aspect crucial de nombreuses applications mathématiques et scientifiques. Dans ce chapitre, nous aborderons les différentes méthodes de résolution de ces systèmes, notamment la méthode de Cramer, la méthode de la matrice inverse et la méthode de Gauss. Nous étudierons également les propriétés et les solutions des systèmes linéaires.

Chapitre 03 : Les Intégrales :

Le calcul intégral est un outil puissant pour analyser le comportement des fonctions et résoudre une variété de problèmes mathématiques et scientifiques. Nous explorerons les intégrales indéfinies et définies, ainsi que leurs propriétés. De plus, nous examinerons les techniques d'intégration des fonctions rationnelles, exponentielles, trigonométriques et polynomiales.

Chapitre 04 : Les Équations Différentielles :

Les équations différentielles jouent un rôle essentiel dans la modélisation et la compréhension des phénomènes dynamiques. Nous nous pencherons sur différents types d'équations différentielles, notamment les équations d'ordre 1 et 2, ainsi que les équations à coefficients constants. Ce chapitre nous permettra d'explorer diverses méthodes de résolution et d'analyse des solutions.

Chapitre 05 : Les Fonctions à Plusieurs Variables : Enfin, nous aborderons les fonctions à plusieurs variables, qui sont omniprésentes dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Nous étudierons les concepts de limite, de continuité et de dérivées partielles, ainsi que la différentiabilité des fonctions. De plus, nous introduirons les intégrales doubles et triples pour analyser les volumes et les surfaces dans l'espace.

Ce programme d'étude offrira une base solide dans ces domaines fondamentaux des mathématiques, tout en ouvrant la voie à des applications plus avancées dans divers domaines scientifiques et techniques.

Chapitre 1

Matrices et applications linéaires

On désigne par **K** le corps abélien $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Matrices et calcul matriciel

Soient m, n deux entiers, $(m \geq 1, n \geq 1)$, on appelle *matrice* $m \times n$ (ou de type(m, n)) à *coefficients* dans un corps **K** tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de **K**.

L'ensemble des matrices $(m \times n)$ à *coefficients* dans **K** est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. On convient de noter (a_{ij}) l'élément de la matrice situé sur la $i^{-ème}$ ligne et $j^{-ème}$ colonne $(1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n)$.

Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} =: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} =: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. Si $m = n$, on dit qu'on a une matrice *carrée*. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans **K** est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

2. Une matrice $m \times 1$ est appelée *matrice colonne* et une matrice $1 \times n$ est appelée *matrice ligne*.

3. La matrice *nulle*, notée $0_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

4. On appelle matrice *diagonale* toute matrice carrée $D = (d_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ pour tout $i \neq j \Rightarrow$ on a $d_{ij} = 0$. Et on note

$$D = diag\,(d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

5. La matrice *identité* d'ordre n noté $\mathbf{I}_n$ est la matrice diagonale $diag\underbrace{(1, 1, ..., 1)}_{n}$.

6. On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est

$$\begin{cases} \textit{Triangulaire supérieure} \text{ si } i \succ j \Rightarrow a_{ij} = 0 \\ \textit{Triangulaire inférieure} \text{ si } i \prec j \Rightarrow a_{ij} = 0 \end{cases}$$

7. Une matrice diagonale $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est triangulaire supérieure et inférieure (*i.e*, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$).

8. On appelle matrice *transposée* de $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$, notée ${}^tA$, la matrice $A = (a_{ji})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ obtenue en échangeant les lignes dans A en colonnes dans ${}^tA$. Bien évidemment ${}^t\left({}^tA\right) = A$.

9. Une matrice A est dite *symétrique* si ${}^tA = A$, *i.e.* si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.

10. Si A est une matrice carrée d'ordre n, on définit la *trace* de A comme la somme des éléments de la diagonale principale $tr\,(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$. Par conséquent $tr\,({}^tA) = tr\,(A)$.

Example 1.1.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$, *une matrice ligne,* $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ *une matrice colonne,*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 15 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, *alors* ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 15 \\ 9 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *une matrice carrée d'ordre* 2, $(trA = 1 + 5 = 6)$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique* $({}^tA = A)$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *une matrice Anti-symétrique* $({}^tA = -A)$,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

A une matrice triangulaire supérieure, B une matrice triangulaire inférieure,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *une matrice diagonale,*

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *la matrice identité.*

1.1.1 Opération algebriques sur les matrices

- **Addition** : Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ deux matrice de même taille, on définit la *somme* par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$$

La matrice opposé de la matrice A notée $(-A)$ est définie par $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}}$.

Example 1.2. *Soient les deux matrices A, B suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

La somme de A est B est la matrice

$$A + \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Remark 1. *La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie !*

Proposition 2. *Soient A, B et C trois matrices de même ordre, alors nous avons :*

1) $A + B = B + A$ *(commutativité),*

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associativité),*

3) ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$,

4) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

- **Produit d'une matrice par un scalaire :** Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ (une matrice $n \times m$) et λ un scalaire de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) on définit le produit d'une matrice par un scalaire comme la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}).$$

Si A et B sont deux matrices de même type, et λ un scalaire de $\mathbf{K}$ alors

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B \text{ (distributivité)}, \\ {}^t(\lambda A) &= \lambda . {}^t A. \end{aligned}$$

Example 1.3. *Soit $\lambda = \dfrac{3}{2}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, alors*

$$\lambda A = \frac{3}{2} A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3. *L'ensemble $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{K})$ des matrices (m, p) est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.*

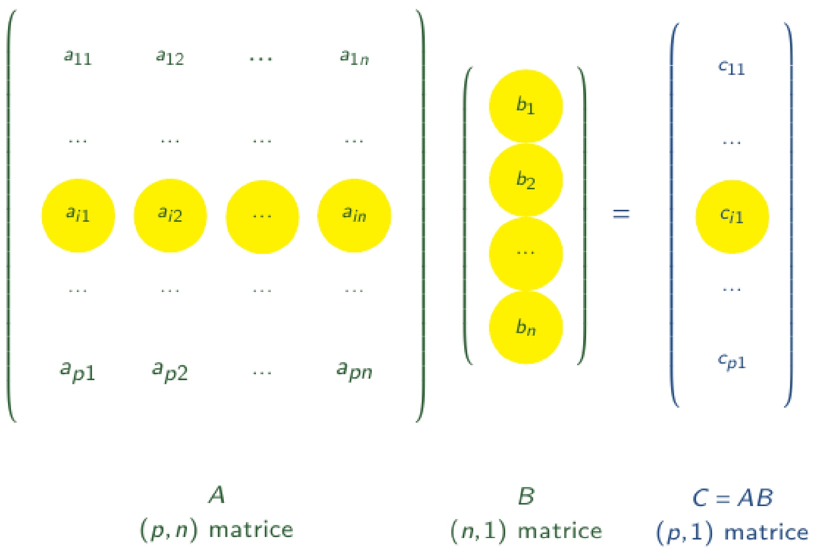
- **Produit de matrices :** Soit $A = (a_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, une matrice de type (n,m) et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbf{K})$ une autre matrice de type (m,p), on définit le produit des deu matrices A et B par

$$A \times B = \sum_{k=1}^{m} (a_{i,k} b_{k,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

C'est une matrice (n,p) dont l'élément $(AB)_{ij}$ est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de A.

Remark 4. *Le produit de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de la deuxième matrice est égal au nombre de lignes de la première et le produit d'une matrice (m,n) par une matrice (n,p) est une matrice (m,p). (c'est la relation de Chasles de telle façon).*

Example 1.4. *L'élément $C_{i,1} = a_{i,1} \times b_1 + a_{i,2} \times b_2 + ... + a_{i,n} \times b_n$.*



Example 1.5. *Soient A et B deux matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

La matrice A est de type $(2,3)$ et la matrice B est d'ordre 3, la relation de Chasles est satisfaite.

$$\begin{aligned}
A \times B = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 1\times 1+3\times 0+5\times 3 & 1\times 2+3\times 4+5\times(-2) & 1\times(-1)+3\times 2+5\times 1 \\ 0\times 1+4\times 0+(-2)\times 3 & 0\times 2+4\times 4+(-2)\times(-2) & 0\times(-1)+4\times 2+(-2)\times 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 16 & 4 & 10 \\ -6 & 20 & 6 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Le produit $B \times A$ n'est pas défini.

Remark 5. *$A \times B \neq B \times A$ en général (Le produit n'est pas commutatif).*

Prenons le cas général avec A de type (m,p) et B de type (p,n). Le produit AB est défini, c'est une matrice de type (m,n). Qu'en est-il du produit BA ? Il faut distinguer trois cas :

$*)$ Si $m \neq n$ le produit BA n'est pas défini,

$*)$ Si $m = n$ mais $p \neq n$, le produit AB est défini et c'est une matrice d'ordre (m,n) tandis que le produit BA est défini mais c'est une matrice d'ordre (p,p) donc $A\times B \neq B\times A$.

$*)$ Si $m = n = p$, A et B sont deux matrices carrées d'ordre m. Les produits AB et BA sont aussi carrées et d'ordre m mais là encore, en général, $A \times B \neq B \times A$.

Example 1.6. *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = BA.$$

Proposition 6. *Soient A, B et C trois matrices, (les dimensions sont compatibles), on a les propriétés suivantes :*

1) $A(BC) = (AB)C$ (associativité),

2) $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité),

3) $A\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n A = A$.(*élément neutre*), 3) ${}^t(AB) = {}^t B \times {}^t A$,

4) $tr(AB) = tr(BA)$.

5) Si A est une matrice carrée, on note A^p (pour $p \geq 2$) la matrice définie par $A^p = \underbrace{A \times A ... \times A}_{p\ fois}$.

Example 1.7. *Une matrice A est* ***nilpotente*** *lorsqu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p est la matrice nulle.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}\ et\ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est nilpotente d'ordre 3.

Proposition 7. (*Binôme de Newton*) *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées, avec $AB = BA$ (on dit qu'elles commutent), alors on a*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^{n-k} B^k,\ où\ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.1.2 Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite *inversible* (ou régulière) s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$) telle que

$$AB = BA = \mathbf{I}_n.$$

Si une telle matrice existe, alors elle est unique, on la note A^{-1} et on l'appelle matrice inverse de A.

- Une matrice non inversible (*i.e.* il n'existe pas A^{-1}), on dit qu'elle est singulière.
- Une matrice carrée A est dite *orthogonale* si elle est inversible et $A \times {}^t A = {}^t A \times A = \mathbf{I}_n$, *i.e.*, si ${}^t A = A^{-1}$.

Proposition 8. *Soient A et B deux matrices inversibles, alors :*

1) A^{-1} *l'est aussi et on a* $(A^{-1})^{-1} = A$,

2) ^{t}A *l'est aussi et on a* $({}^{t}A)^{-1} =^{t} (A^{-1})$,

3) AB *l'est aussi et on a*$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Example 1.8. *Considérons les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; et \; BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; donc \; A^{-1} = B.$$

$$^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \; et \; ({}^{t}A)^{-1} =^{t} (A^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = A.B = \mathbf{I}_3$$

1.1.3 Déterminant d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \leq i, j \leq n$, on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $(n-1)$ obtenue en supprimant la $i^{-ème}$ ligne et la $j^{-ème}$ colonne de A. *Le déterminant* de A, noté $\det(A)$ ou $|A|$, est défini par récurrence sur l'ordre de la matrice A :

1) Si $n = 1$: le déterminant de A est le nombre $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$.

2) Si $n \succ 1$: le déterminant de A est le nombre

$$\det A = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ quel que soit la ligne } i, \; 1 \leq i \leq n,$$

ou d'une manière équivalente

$$\det A = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \text{ quel que soit la colonne } j, \; 1 \leq j \leq n.$$

L'astuce ici est d'associer toute matrice carrée avec une autre matrice dite matrice de signe comme suit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{(-1)^{i+j}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Example 1.9. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Alors, on a d'une part

$$\det(A_{11}) = a_{22}, \det(A_{12}) = a_{21},\ \det(A_{21}) = a_{12} et \det(A_{22} = a_{11})$$

et d'autre part,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \underset{\leadsto}{(-1)^{i+j}} \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix},$$

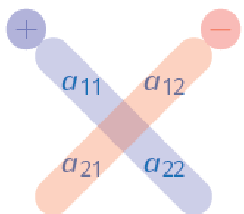
donc on peut calculer $\det(A)$ *par l'une des formules suivantes :*

$$\begin{gathered} a)\ \det A = +a_{11}\det(A_{11}) + (-a_{12})\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ (\textit{C'est le développement suivant la première ligne}) \\ \textit{ou encore} \\ b)\ \det A = +a_{11}\det(A_{11}) + (-a_{21})\det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ (\textit{C'est le développement suivant la première colonne}) \end{gathered}$$

Le développement suivant la première ligne ou la première colonne (respectivement la deuxième ligne ou deuxième colonne) donne le même résultat $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Méthode pratique (Règle de Sarrus)

*) Soit A une matrice carrée d'ordre 2



$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Example 1.10. *Determinat d'une matrice d'ordre 2*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times (-2) = 10.$$

*) Soit A une matrice carrée d'ordre 3

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

On a

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \det A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \det A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \det A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \det A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \det A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \det A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Par la méthode de Sarrus, on obtient

$$\det A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \qquad \det A_{12} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \qquad \det A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$\det A_{21} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} \qquad \det A_{22} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \qquad \det A_{23} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

$$\det A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \qquad \det A_{32} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} \qquad \det A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

donc on peut calculer le $\det A$ par un développement suivant une ligne ou une colonne, en respectant les signes.

*) En développant suivant la $1^{ère}$ ligne :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} \\ &= +a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}. \end{aligned}$$

*) En développant suivant la $1^{ère}$ colonne :

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21} + a_{31}\det A_{31} \\
&= +a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}\right) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.
\end{aligned}$$

Le calcul montre que ces formules donnent bien le même résultat.

Proposition 9. *1) Le déterminant d'une matrice triangulaire est la multiplication de ses éléments diagonaux.*

2) Le déterminant d'une matrice identité est égal à 1.

Il est pertinent d'appliquer la définition du déterminant en mettant en évidence autant de zéros que possible sur une même ligne, en tenant compte des règles suivantes :

- Si deux colonnes (ou lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors le déterminant est égal à zéro.
- Si une colonne (ou ligne) est multipliée par un scalaire λ différent de zéro, alors le déterminant est multiplié par ce scalaire λ.
- Si deux colonnes (ou lignes) sont échangées, le déterminant devient son opposé (c'est-à-dire, change de signe).
- Le déterminant n'est pas modifié si l'on ajoute à une colonne (ou ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (ou lignes).*i.e.*

$$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j \qquad (\text{resp. } L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \qquad (i \neq j \text{ et } \lambda \neq 0)$$

Example 1.11. *Calculer le déterminant*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$\det A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \qquad \det A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\det A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad \det A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Le développement par rapport la troisième colonne exige le calcul d'un seul déterminant d'ordre 2 et on a :

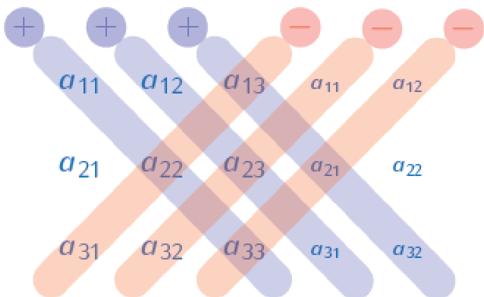
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -10.$$

On peut sinon faire apparaître encore plus de zéros dans la matrice jusqu'à obtenir une matrice triangulaire :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 2 \times (-5) = -10. \end{aligned}$$

Déterminant d'une matrice d'ordre 3 (Règle de Sarrus)

Soit A une matrice carrée d'ordre 3. Alors



$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \,.$$

Example 1.12. *Calculer avec la méthode de Sarrus le déterminant*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & & (-) & & (-) & & (-) \\ 1 & & 0 & & \mathbf{1} & & 1 & & 1 \\ & \searrow & & \left(\substack{\nearrow \\ \searrow}\right) & & \left(\substack{\nearrow \\ \searrow}\right) & & \nearrow & \\ 0 & & \mathbf{2} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \nearrow & & \left(\substack{\nearrow \\ \searrow}\right) & & \left(\substack{\nearrow \\ \searrow}\right) & & \searrow & \\ \mathbf{5} & & 3 & & 0 & & 5 & & 0 \\ & & & & (+) & & (+) & & (+) \end{vmatrix} = -10.$$

Ou encore

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & & 0 & & \mathbf{1} & \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & 0 & & \mathbf{2} & & 0 & \\ & & \left(\substack{\nearrow \\ \searrow}\right) & & \left(\substack{\nearrow \\ \searrow}\right) & & \\ & \mathbf{5} & & 3 & & 0 & \\ (-) & & \left(\substack{\nearrow \\ \searrow}\right) & & \left(\substack{\nearrow \\ \searrow}\right) & & (+) \\ & 1 & & 0 & & 1 & \\ (-) & & \nearrow & & \searrow & & (+) \\ & 0 & & 2 & & 0 & \\ (-) & & & & & & (+) \end{vmatrix} = -10.$$

Remark 10. *la règle de Sarrus pour développer un déterminant n'est plus valable pour* $n \geqslant 4$
.

Theorem 11. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

$$A \text{ est inversible si et seulement si } \det A \neq 0.$$

Proposition 12. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

1) $\det{}^t A = \det A$

2) $\det(AB) = \det A \det B$

3) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Calcul de la matrice inverse Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible $(\Leftrightarrow \det A \neq 0)$, pour obtenir A^{-1}, on calcul d'une part, la matrice des *cofacteurs* des éléments de A, appelée co matrice de A, ensuite, on transpose la co matrice de A et on la multiplie par $\frac{1}{\det A}$.

Theorem 13. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t ComA.$$

Example 1.13. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer l'inverse de la matrice A.

On sait que $\det A = -10 \neq 0$ *ceci équivalent à dire que la matrice A est inversible et on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t ComA.$$

$$ComA = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det A_{11} & (-1)^{1+2}\det A_{12} & (-1)^{1+3}\det A_{13} \\ (-1)^{2+1}\det A_{21} & (-1)^{2+2}\det A_{22} & (-1)^{2+3}\det A_{23} \\ (-1)^{3+1}\det A_{31} & (-1)^{3+2}\det A_{32} & (-1)^{3+3}\det A_{33} \end{pmatrix},$$

$$ComA = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 3 & -5 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^{t}ComA = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -10 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}.$$

Une vérification rapide, nous assure le résultat

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{-3}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.4 Rang d'une matrice

Definition 14. *Le rang d'une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, noté $rg(A)$, est égal au plus grand entier tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée inversible (c'est-à-dire de déterminant non nul). Il représente le nombre maximum de vecteurs colonnes de A linéairement indépendants (ou, ce qui est équivalent, le nombre maximum de vecteurs lignes linéairement indépendants)*

Proposition 15. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, alors*

$$0 \leq rg(A) \leq \min(n, m),$$

et $rg(A) = 0$ si et seulement si tous les élément de A sont nuls.

Example 1.14. *Soit A la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}),$$

Le rang de A est 2 car :

- *A est de type $(2,3)$ donc $0 \leq rg(A) \leq \min(2,3)$ $0 \leq rgA \leq 2$, i.e., $s = 0, 1$ ou 2.*
- *Il existe au moins un élément de A différent de zéro, donc $rgA \neq 0$,*
- *Comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul, on ne peut pas conclure !*
- *Comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $rgA = 2$.*

Example 1.15. *Soit A et B es deux matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

- *Le rang de A est* 3 *car,* $\det A \neq 0$.
- *Le rang de B est* 2
- *d'une part* $\det B = 0$, $rg(B) \neq 3$, *et d'autre part, il existe au moins un élément de B différent de zéro, donc* $rgB \neq 0$.
- *le déterminant de la sous matrice* $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *(matrice extraite de B) est différent de zéro, donc* $rgB' = rgB = 2$.

1.2 Application linéaires

Dans le paragraphe suivant, nous désignons par E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbf{K}$. Habituellement, nous considérons un espace vectoriel comme une structure algébrique munie de deux opérations : l'une interne, qui se conforme aux propriétés d'un groupe abélien, et l'autre externe, qui suit certaines lois algébriques naturelles.

Un espace vectoriel de dimension finie est un espace auquel on peut attribuer une base. Le cardinal de cette base, appelée la dimension de l'espace. L'existence d'une base est utile car elle permet d'écrire chaque élément de l'espace vectoriel de manière unique en fonction des éléments de la base. Toutefois, cette définition est regrettablement exclue du nouveau programme.

Definition 16. *(Application linéaire)*

Une application $f : E \to F$ est dite linéaire (ou homomorphisme) de E vers F si

$$\begin{aligned} &\forall (u,v) \in E^2, \quad f(u+v) = f(u) + f(v), \\ &\forall u \in E \text{ et } \forall \alpha \in \mathbf{K}, \quad f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v), \forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2$$

Remark 17. *On peut déduire de la définition que si l'on pose* $y = 0 \in E, \quad f(0) = 0_F \in F$.

On a également $f(-x) = -f(x)$, *et plus généralement* $f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i f(u_i)$ *pour tout* $(u_1, u_2, ..., u_n) \in E^n$.

Example 1.16. *Soit les applications :*

$$1)\ f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto f(x, y) = (x, x - y, x + 3y)$$

$$2)\ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x - 2z, x + y, x + 3y - z)$$

$$3)\ f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto f_3(x, y) = (x + 1, x - y, x + 3y)$$

$$4)\ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f_4(x) = x^2 + x$$

f_3 *n'est pas une application linéaire car* $f_3(0, 0) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$.

(Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *sont les applications* $x \mapsto ax$ *(à ne pas confondre avec les applications affines).*

f_4 *n'est pas une application linéaire car par exemple* $f_4(3) = 12 \neq 6 = 3f_4(1)$.

Definition 18. *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire.*

- *Si* $f : E \to F$ *est bijective, on dit que* f *est un isomorphisme de* E *sur* F.
- *Si* $F = E$, *on dit que* $f : E \to F$ *est un endomorphisme de* E.
- *Si* $F = E$ *et* $f : E \to F$ *est bijective, on dit que* f *est un automorphisme de* E.
- *Si* $F = \mathbb{R}$, *on dit que* $f : E \to F$ *est une forme linéaire..*

Example 1.17. *L'application nulle*

$$\begin{aligned} f &: E \to F \\ x &\mapsto f(x) = 0_F \end{aligned}$$

est linéaire.

L'application identique

$$\begin{aligned} f &: E \to E \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

est un automorphisme.

Notation 19.
- *L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E,F)$ ou $Hom(E,F)$.*
- *l'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $Isom(E,F)$.*
- *L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.*
- *L'ensemble des automorphismes de E est noté $Aut(E)$.*

Proposition 20. *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\alpha \in \mathbf{K}$, alors on a*

- $f + g \in \mathcal{L}(E,F)$,
- $\alpha f \in \mathcal{L}(E,F)$,
- $h \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$, *lorsque* $h \in \mathcal{L}(F,G)$,
- $f \in Isom(E,F)$, *alors,* $f^{-1} \in Isom(F,E)$.

1.2.1 Matrice associée d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbf{K}-$espaces vectoriels, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ une base de F (càd $\forall x \in E, \exists\,(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n; x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ et aussi $\forall x \in F, \exists\,(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \in \mathbf{K}^m; x = \sum_{k=1}^{m} \beta_k e_k$) .

Definition 21. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F la matrice $m \times n$ dont la $j^{-\text{ème}}$ colonne est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$*

$$\boxed{A = mat_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall j \in 1,...,n;\ A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \ldots\ldots & f(e_j) & \ldots\ldots & f(e_n) \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ & & \cdots & & \\ a_{i1} & \ldots\ldots\ldots & a_{ij} & \ldots\ldots\ldots & a_{in} \\ & & \cdots\cdot & & \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \cdots \\ e'_i \\ \cdots \\ e'_m \end{array}}$$

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + ... + a_{ij}e'_i + ... + a_{mj}e'_m$$

Remark 22. *Une matrice d'une application linéaire d'un espace de dimension n vers un espace de dimension m est de type $(m \times n)$ et non $(n \times m)$*

Proposition 23. *La connaissance des images des vecteurs d'une base de l'espace de départ caractérise entièrement une application linéaire.*

Notation 24. *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ (un endomorphisme de E),on prend en général la même base pour E en tant qu'espace de départ, et pour E en tant qu'espace d'arrivée et on note $A = mat_{(\mathcal{B})}(f)$.*

Example 1.18. *Soit l'application linéaire*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto f(x, y) = (x, x - y, x + 3y)$$

,

avec $\mathcal{B} = \left\{e_1\binom{1}{0}, e_2\binom{0}{1}\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = \{e'_1(1,0,0), e'_1(0,1,0), e'_1(0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

La matrice associée à f aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est

$$A = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}, \quad A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

En général, la matrice d'une application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^m$ relativement aux bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$ est appelée la *matrice canonique* de cette application.

Example 1.19. *La matrice canonique de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto f(x, y) = (ax + by, cx + dy, ex + fy)$ s'écrit :*

$$\begin{array}{llll} f : \mathbb{R}^2 & & \to \mathbb{R}^3 & \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ ex + fy \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} & \text{est} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}). \end{array}$$

Remark 25. *La matrice associée à une application linéaire n'est pas unique, elle dépend des bases choisies dans les espaces E et F.*

Proposition 26. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ une matrice $m \times n$, E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel de dimension m. Quelles que soient les bases choisies de E et F, le rang de l'application linéaire $f : E \to F$ associée à A est toujours le même et est égale au rang de la matrice A.*

Remark 27. *On définit le rang d'une application linéaire en l'associant à une matrice plutôt qu'au rang de l'application elle-même. La définition du rang d'une application linéaire est exclue du nouveau programme, tout comme celle du noyau d'une application linéaire.*

1.2.2 Applications linéaires et matrices associées

On sait que $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, .)$ a une structure de espace vectoriel de dimension $n \times p$ (Admis !)

Theorem 28. *Soient E $(\dim E = n)$ et F $(\dim F = p)$ deux $\mathbf{K}-$espaces vectoriels de dimension fini, les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ sont isomorphes.*

$$\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) = \dim \mathcal{L}(E, F) = n \times p.$$

Proposition 29. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, telle que $\mathcal{B}$ une base de E $(\dim E = n)$, $\mathcal{C}$ une base de F $(\dim F = m)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a*

$mat_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f + g) = mat_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f) + mat_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(g)$
$mat_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(\lambda f) = \lambda mat_{(\mathcal{B},\mathcal{C})}(f)$

Le produit des matrices va être défini de sorte qu'au *produit* de deux matrices corresponde la *composée* des applications linéaires associées.

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors la composée

$$g \circ f : E \underset{f}{\rightarrow} F \underset{g}{\rightarrow} G$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{B} = (e_1, ..., e_n) \text{ base de } E & \\ \mathcal{C} = (f_1, ..., f_p) \text{ base de } F & \text{On a} \left\{ \begin{array}{l} A = \mathcal{M}at(f) \in M_{p,n}(\mathbf{K}) \\ B = mat_{(\mathcal{C},\mathcal{D})}(g) \in M_{q,p.}(\mathbf{K}) \\ C = mat_{(\mathcal{B},\mathcal{D})}(g \circ f) \in M_{q,n}(\mathbf{K}) \end{array} \right. \\ \mathcal{D} = (g_1, ..., g_q) \text{ base de } G & \end{array}}$$

Example 1.20. *On considère les applications linéaires suivantes :*

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (y, x + z)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = (2x, x + y, x - y)$$

1. *Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.*

2. *Déterminer les applications linéaires $2f$,$g \circ f$ et $f \circ g$.*

Réponse *: Soient $\mathcal{B}_c\left(\mathbb{R}^3\right) = \{e_1(1,0,0), e_2(0,1,1), e_3(0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_c\left(\mathbb{R}^2\right) = \{e'_1(1,0), e'_2(0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice associée à f dans les deux base $\mathcal{B}_c\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $\mathcal{B}_c\left(\mathbb{R}^2\right)$ s'écrit :*

$$A = M_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3),\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^2)}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ 0 & 1 & 0 & e'_1 \\ 1 & 0 & 1 & e'_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (0,1) = 0e'_1 + 1e'_2, \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,0) = 1e'_1 + 0e'_2, \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,1) = 0e'_1 + 1e'_2. \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}), \text{ \textit{Fait attention} } \begin{cases} 2 = \dim \mathbb{R}^2, & \text{\textit{l'espace d'arrivé (nombre de lignes)}} \\ 3 = \dim \mathbb{R}^3, & \text{\textit{l'espace de départ (nombre de colonne)}} \end{cases}$$

De la même manière pour l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y) \mapsto g(x,y) = (2x, x+y, x-y)$

$$B = M_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^2),\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)}(f) = \begin{pmatrix} g(e_1) & gf(e_2) & \\ 2 & 0 & e'_1 \\ 1 & 1 & e'_2 \\ 1 & -1 & e'_3 \end{pmatrix}$$

De manière générale, pour les bases canoniques de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée, on écrit :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x+z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y) \mapsto g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Détermination des applications linéaires $2f$,$g \circ f$ et $f \circ g$.

$$2f(x,y,z) = f(x,y,z) + f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x+z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2x+2z \end{pmatrix}$$

d'une manière équivalente

$$2f \text{ est l'application correspandente au matrice } 2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \underset{f}{\to} \mathbb{R}^2 \underset{g}{\to} \mathbb{R}^3$$
$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$
$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y, z) &= g(f(x, y, z)) = g(y, x + z) = (2y, x + y + z, y - x - z) \\ g \circ f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ x \mapsto (g \circ f)(x, y, z) = (2y, x + y + z, -x + y - z) \end{aligned}$$

$$f \circ g : \mathbb{R}^2 \underset{g}{\to} \mathbb{R}^3 \underset{f}{\to} \mathbb{R}^2;$$
$$x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x, y) &= f(g(x, y)) = f(2x, x + y, x - y) = (x + y, 3x - y) \\ f \circ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad x \mapsto (f \circ g)(x) = (x + y, 3x - y) \end{aligned}$$

3. Les matrices associées à $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

$$M_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)}(g \circ f) = B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$M_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^2)}(f \circ g) = A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

En général, on peut affirmer que $f \circ g \neq g \circ f$, tout comme le produit matriciel $A \times B \neq B \times A$.

1.2.3 Changements de bases et applications linéaires

Matrice de passage d'une base à une autre

Definition 30. *la matrice de passage d'une base (dite ancienne base) à une autre (dite nouvelle base) est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne.*

Si E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E, et

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

alors

$$P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} = (p_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} e'_1 & & e'_j & & e'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & p_{1j} & & \\ & & \cdots & & \\ p_{i1} & \cdots\cdots\cdots & p_{ij} & \cdots\cdots\cdots & p_{in} \\ & & \cdots\cdot & & \\ & & p_{nj} & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \cdots \\ e_i \\ \cdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice de l'identité de E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$

$$P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} = mat_{(\mathcal{B}',\mathcal{B})}\left(id_E\right)$$

Proposition 31. *Soient $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ deux bases dans un $\mathbf{K}-$espace vectoriel, alors on a :*

1. $P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}'')} = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')} \times P_{(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')}$ *(relation de Chasles),*
2. $P_{(\mathcal{B},\mathcal{B})} = I_n$,
3. $\left(P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}\right)^{-1} = P_{(\mathcal{B}',\mathcal{B})}$

Example 1.21. *Soit $\mathcal{B}_c\left(\mathbb{R}^3\right)$ la base canonique dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{u_1\left(2,1,1\right), u_2\left(3,2,1\right), u_3\left(-1,0,0\right)\}$ une nouvelle base dans $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage est*

$$P_{(\mathcal{B},\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avant de continuer sur les matrices de passages, on définit brièvement les bases d'un espace vectoriel.

Definition 32. *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel, $\mathcal{B}$ un sous ensemble de E.*

$$\mathcal{B} \text{ une base de } E \text{ ssi } \begin{cases} 1)\ \mathcal{B} \quad \text{génératrice} \\ 2)\ \mathcal{B} \quad \text{libre} \end{cases}$$

Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ un sous ensemble de E.

- La famille $\mathcal{B}$ est dite génératrice si tous les vecteurs de l'espace E s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$

$$\forall x \in E, \exists\, (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n / \qquad x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i u_i$$

- La famile E est dite libre ou encore $u_1, u_2, ..., u_n$ sont linéairement independent si toute combinaison linéaire nulle donne la solution nulle, autrement dit

$$\forall\, (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n / \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

- La famille $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $u_1, u_2, ..., u_n \in E$. Autrement dit

$$\forall x \in E \quad \exists!\, (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n, \quad x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n.$$

Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{K}$ s'appellent les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 33. *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E ssi*

$$\begin{cases} 1)\ \mathcal{B} & \textit{génératrice} \\ 2)\ \mathcal{B} & \textit{libre} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \mathcal{B} & \textit{génératrice} \\ 2)\ \mathcal{B} & \textit{cardinal } E = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \mathcal{B} & \textit{cardinal } E = n \\ 2)\ \mathcal{B} & \textit{libre} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \mathcal{B} & \textit{cardinal } E = n \\ 2)\ \mathcal{B} & \det \mathcal{B} \neq 0 \end{cases}$$

Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.

Proposition 34. *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E et $P = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}$ la matrice de passage, on a*

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i \in E, \textit{ ou encore } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Les matrices colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. Alors :

$$X = PX'$$

Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire.

Proposition 35. *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1,...,e'_n)$ deux bases de E , $P = P_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}$ et $P^{-1} = P_{(\mathcal{B}',\mathcal{B})}$ les matrice de passages associées. On note :*

$$A = mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B})}(f), \quad D = mat_{(\mathcal{B}',\mathcal{B}')}(f)$$

Alors

$$D = P^{-1}AP$$

Definition 36. *Deux matrices sont dites semblables si ce sont les matrices de la même application linéaire dans deux bases différentes.*

$$A \sim D \Leftrightarrow \begin{cases} A = mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B})}(f) \\ D' = mat_{(\mathcal{B}',\mathcal{B}')}(f) \end{cases}$$

Proposition 37. *Soit $A, D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ deux matrices semblables, alors*

$$rang\ A = rang\ D \ et \ \det A = \det D.$$

Example 1.22. *Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel., dont la base canonique est $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.*

On pose $v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$. Pourquoi est-on sûr que $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ est inversible ? Calculer son inverse.

3) On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = -y+z, \frac{1}{2}(-x-y+3z), \frac{1}{2}(x-y+3z)$$

Montrer que f est linéaire et calculer ses matrices représentatives dans la base canonique puis dans la

base $\mathcal{B}$.

Réponse : *Soit E un $\mathbf{K}-$espace vectoriel $(\dim E = n)$, $\mathcal{B}$ est constitue une base ssi*

$$\begin{cases} \mathcal{B} \text{ génératrice} \\ et \\ \mathcal{B} \text{ libre} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{B} \text{ génératrice} \\ et \\ Cardinal\mathcal{B} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Cardinal\mathcal{B} = n \\ et \\ \mathcal{B} \text{ libre} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Cardinal\mathcal{B} = n \\ et \\ \det\{\mathcal{B}\} \neq 0. \end{cases}$$

Comme le cardinal de $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = 3$, *et*

$$\det\{\mathcal{B}\} = \det\{v_1, v_2, v_3\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0,$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$.

2) La matrice de passage $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ *de la base canonique* $\mathcal{B}_c$ *(de* $\mathbb{R}^3$*) à la base* $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \\ 1 & 0 & 1 & e_1 \\ 1 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 1 & 1 & e_3 \end{pmatrix} \text{ La matrice de passage de } \mathcal{B}_c \text{ à } \mathcal{B},$$

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = P^{-1}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & v_1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & v_2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & v_3 \end{pmatrix} \text{ La matrice de passage de } \mathcal{B} \text{ à } \mathcal{B}_c,$$

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \frac{1}{\det P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}} {}^{t}ComP_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage est régulière (ou inversible) car elle représente l'application identité entre les deux bases $\mathcal{B}_c$ *et* $\mathcal{B}$

3) On considère l'application f *de* $\mathbb{R}^3$ *dans lui-même définie par*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \left(-y + z, \frac{1}{2}(-x - y + 3z), \frac{1}{2}(x - y + 3z)\right).$$

On montre que f *est linéaire et on calcule ses matrices représentatives dans la base canonique, puis dans la base* $\mathcal{B}$

$$f \text{ est linéaire} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall X, X' \in \mathbb{R}^3, f(X + X') = f(X) + f(X') \\ \text{et} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; f(\lambda X) = \lambda f(X) \end{cases}$$

Soient $X, X' \in \mathbb{R}^3$ *où* $X = (x, y, z)\,,\ X' = (x', y', z')$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(X + X') &= f((x, y, z) + (x', y', z')) = f(x + x', y + y', z + z') \\
&= \begin{pmatrix} -(y + y') + (z + z')\,, \frac{1}{2}(-(x + x') - (y + y') + 3(z + z')) \\ , \frac{1}{2}(x + x' - (y + y') + 3(z + z')) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [-y + z] + [-y' + z']\,, \left[\frac{1}{2}(-x - y + 3z)\right] + \left[\frac{1}{2}(-x' - y' + 3z')\right] \\ , \left[\frac{1}{2}(x - y + 3z)\right] + \left[\frac{1}{2}(x' - y' + 3z')\right] \end{pmatrix} \\
&= f(X) + f(X')\,,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(\lambda X) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \left(-\lambda y + \lambda z, \frac{1}{2}(-\lambda x - \lambda y + 3\lambda z)\,, \frac{1}{2}(\lambda x - \lambda y + 3\lambda z)\right) \\
&= \left(\lambda(-y + z)\,, \lambda\frac{1}{2}(-x - y + 3z)\,, \lambda\frac{1}{2}(x - y + 3z)\right) = \lambda\left(-y + z, \frac{1}{2}(-x - y + 3z)\,, \frac{1}{2}(x - y\right. \\
&= \lambda f(x, y, z) = \lambda f(X)\,.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que l'application f *est linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans lui-même.*

D'une part, on écrit la matrice associée à f *dans la base canonique, et on note*

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \end{array},$$

et d'autre part, on écrit la matrice associée à f *dans la nouvelle base* $\mathcal{B}$ *notée*

$$D = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

.

En effet

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= f(1, 1, 0) = (-1, -1, 0) = (-1)\,v_1 = (-1)\,v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\
f(v_2) &= f(0, 1, 1) = (0, 1, 1) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 \\
f(v_3) &= f(1, 0, 1) = (1, 1, 2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = ??
\end{aligned}$$

Pour la dernière, on cherche α, β *et* γ

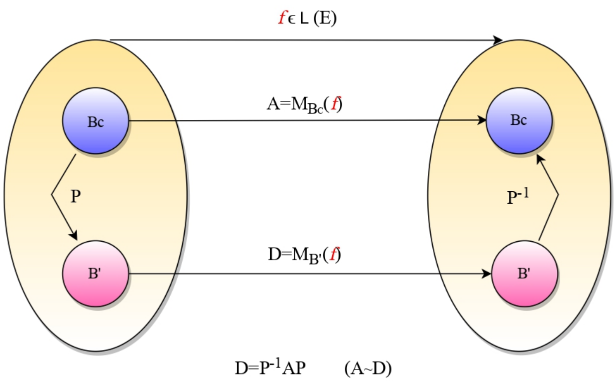
$$\begin{aligned}(1,1,2) &= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \Leftrightarrow (1,1,2) = \alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,1) + \gamma\,(1,0,1)\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1= & \alpha+\gamma \\ 1= & \alpha+\beta \\ 2= & \beta+\gamma \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta=\gamma=1 \\ \alpha=0 \end{array}\right.\end{aligned}$$

donc $f\,(v_3) = f\,(1,0,1) = (1,1,2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3.$

La matrice D *s'écrit encore sous la forme suivante*:

$$D = P^{-1}AP$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



(A et D sont semblables)

1.2.4 Feuille de TD

Exercise 38. *On considère les matrices à coefficients réels suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Parmi les expressions suivantes, dire celles qui ont un sens et les calculer le cas échéant

$$A^2, AB, BA, BD, BC,^t E,^t D,^t (ED), ABCDE, D +^t E.$$

Exercise 39. *1) Calculer les déterminant suivant*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2) Calculer, en utilisant les techniques de calcul des déterminants

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad N = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Exercise 40. *1) Indiquer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Que vaut le rang de A, B et C.

Exercise 41. *Calculer le rang des deux matrices M_t et N_t où t est un paramètre réel.*

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \qquad N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 42. *On considère les applications linéaires suivantes :*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (y, x + z)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = (2x, x + y, x - y)$$

1. Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les applications linéaires $2f$,$g \circ f$ et $f \circ g$.

3. Donner leurs matrices dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

4. Que remarque-t-on ?

Exercise 43. *On pose $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 0, 1)$.*

1) Montrer que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Ecrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$. Pourquoi est-on sûr que $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ est inversible ? Calculer son inverse.

3) On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \left(-y + z, \frac{1}{2}(-x - y + 3z), \frac{1}{2}(x - y + 3z)\right)$$

Montrer que f est linéaire et calculer ses matrices représentatives dans la base canonique puis dans la

base $\mathcal{B}$.

Exercise 44. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)$.

Déterminer la matrice de f *dans la base* $(1,0,-1),(0,1,1)$ *et* $(1,0,1)$.

Exercise 45. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe* $p \geq 1$ *tel que* $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. *Démontrer que la*

matrice $(\mathbf{I}_n - A)$ *est inversible, et déterminer son inverse.*

Exercise 46. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } B = A - \mathbf{I}_3.$$

1) Calculer B, B^2, B^3. *En déduire l'expression de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que A^3 *est combinaison linéaire de* A^2, A *et* $\mathbf{I}_3$.

3) En déduire que A^n *est combinaison linéaire de* A^{n-1}, A^{n-2} *et* A^{n-3} *si* $n \geq 3$.

Chapitre 2

Système d'équations linéaires

———————————————————————————————————

Un système linéaire $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues (n, $p \geq 1$ des entiers) de la forme :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & ...... & +a_{1p}x_p = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & ...... & +a_{2p}x_p = & b_2 \\ \quad ... & ...... & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & ...... & +a_{np}x_p = & b_p \end{cases}$$

- *Les coefficients (a_{ij}) et les secondes membres (b_i) sont des éléments donnés de $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*
- *Les inconnues $x_1, x_2, ..., x_p$ sont à chercher dans $\mathbf{K}$.*
- *Une solution de (S) est un $p-$uplet $(x_1, x_2, ..., x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.*
- *Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solutions.*
- *Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.*
- *Deux systèmes sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.*
- *Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les (b_i) par 0.*

- *Le système* (S) *sous la forme abrégée suivante*

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

- *Notre système* (S) *est équivalent aussi à l'écriture matricielle*

$$A\vec{X} = \vec{B} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ ... & ...... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{np} \end{pmatrix}, \ \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_p \end{pmatrix}.$$

- *Un système* (S) *est carré lorsque* $n = p$.

- *Si on ajoute le vecteur-colonne des seconds membres* $\vec{B}$ *à la matrice des coefficients* A, *on obtient ce qu'on appelle la matrice augmentée que l'on note* $\left[A|\vec{B}\right]$

2.1 Système linéaire carrée

2.1.1 Système linéaire carrée et matrice inverse

Tout système linéaire de n *équations à* n *inconnues peut s'écrire sous la forme matricielle* $A\vec{X} = \vec{B}$, *où* A *est une matrice carrée d'ordre* n, $\vec{X}$ *et* $\vec{B}$ *sont des vecteurs colonnes de type* $(n, 1)$, $\vec{X}$ *est l'inconnue et* $\vec{B}$ *un vecteur donné.*

Si A *est inversible alors ce système possède une unique solution* $\vec{X}$ *donnée par* $\vec{X} = A^{-1}\vec{B}$.

Example 2.1. *Considérons le système*

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$$

On écrit sous la forme matricielle le système (S)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = 8 - 9 = -1 \neq 0$, *donc la matrice* A *est inversible, on cherche donc à calculer* A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^{t}ComA = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

La solution du système (S) est donné par $\vec{X} = A^{-1}\vec{B}$, (i.e),

$$\vec{X} = A^{-1}\vec{B} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Système de Cramer

Soit (S) un système d'équations linéaires dont la matrice associée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (Carrée).

Definition 47. *Un système est dit de Cramer ssi* $\det A \neq 0$.

Proposition 48. *Soit (S) un système d'équations linéaires ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$). Le système est de Cramer si une des conditions équivalentes suivantes est remplie*

1. *A est inversible,*
2. *$rgA = n$,*
3. *Le système homogène $A\vec{X} = \vec{0}$, admet seulement la solution nulle.*

Méthode de Cramer : *La solution d'un système de Cramer d'écriture matricielle $A\vec{X} = \vec{B}$ est donnée par*

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \qquad j = 1, ..., n$$

où A_j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $j-$ème colonne par la colonne de second membre $\vec{B}$.

Remark 49. *La formule de Cramer est d'une utilité pratique limitée à cause du calcul des déterminants qui est très couteux.*

Example 2.2. *Soit le système linéaire*

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y = -1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{B}}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-6}{2} = -3, \; y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

2.2 Système échelonné

Un système (S) est en escalier, ou échelonné, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant. Il est échelonné réduit si en plus :

- *le premier coefficient non nul d'une ligne vaut* 1,
- *et c'est le seul élément non nul de sa colonne.*

Example 2.3.

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -5x_4 & = 1 \\ & -x_2 & +x_3 & & = 0 \\ & & & -6x_4 & = -1 \end{cases} \quad \text{est échelonné (mais pas réduit),}$$

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -5x_4 & = 1 \\ & -x_2 & +x_3 & & = 0 \\ & & +2x_3 & -6x_4 & = -1 \end{cases} \quad \text{n'est échelonné (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au-dessus.}$$

La résolution d'un système linéaire $A\vec{X} = \vec{B}$ échelonné est simple car, la matrice lui associée étant triangulaire supérieure, on utilise la relation de récurrence (dite par remontée)

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\Big) \quad \text{pour } i = n-1, n-2, ..., 1 \end{cases}$$

Example 2.4. *Résolution du système triangulaire supérieur*

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x-y+2z=2 \\ y-z=-1 \\ 2z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{B}}$$

En utilisant la formule précédente :

$$\left\{\begin{array}{c} z=\dfrac{1}{2} \\ x_i=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) \\ \textit{pour } i=2,1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} z=x_3=\dfrac{1}{2} & \\ y=x_2=\frac{1}{a_{22}}\left(b_2-a_{23}x_3\right) & =-\dfrac{1}{2} \\ x=x_1=\frac{1}{a_{11}}\left(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3\right) & =\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

2.3 Méthode du pivot de Gauss

2.3.1 Opérations éIémentaires sur les lignes et les colonnes

On appelle opération éIémentaire sur les lignes d'une matrice l'une des opérations suivantes :

1. *Permutation de la $i^{-\text{ème}}$ et de la $j^{-\text{ème}}$ ligne, notée $L_i \leftrightarrow L_j$,*
2. *Multiplication de Ia $i^{-\text{ème}}$ ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$, notée $L_i \longleftarrow \lambda L_i$,*
3. *Ajout du produit de Ia $j^{-\text{ème}}$ ligne par λ à la $i^{-\text{ème}}$ ligne $(i \neq j)$, notée $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$*
4. *On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes, notées respectivement*

$$C_i \leftrightarrow C_j, \quad C_i \longleftarrow \lambda C_i \text{ et } C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$$

Theorem 50. *Les opérations élémentaires sont des multiplications par certaines matrices inversibles !*

Proposition 51. *Le système obtenu à partir de (S) à l'aide d'une opération élémentaire sur les lignes est équivalent à*

(S') c'est à dire que les deux systèmes ont même ensemble de solutions.

2.3.2 Algorithme du pivot de Gauss

Cet algorithme performant utilise des opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations pour le transformer en un système équivalent échelonné (ou triangulaire), c'est-à-dire avec des coefficients nuls en dessous de la diagonale principale ($a_{ij}=0$ pour $i \succ j$).

Dans un système d'équations linéaires, un pivot est un coefficient non nul sur la diagonale principale de la matrice des coefficients.

L'algorithme du pivot de Gauss, également connu sous le nom de méthode d'élimination de Gauss, permet de transformer une matrice en sa forme échelonnée. Voici les étapes de l'algorithme :

1- Choix du Pivot *: Sélectionnez comme pivot le coefficient non nul le plus à gauche de la ligne la plus haute.*

2- Échange de lignes *: Si le pivot est nul, échangez cette ligne avec la ligne la plus basse ayant un coefficient non nul dans la même colonne.*

3- Élimination *: Effectuez des opérations élémentaires sur les lignes pour éliminer tous les coefficients en dessous du pivot, en utilisant la formule :*

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

Répétez les étapes 1 *à* 3 *pour le sous-ensemble de la matrice situé sous le pivot. Continuez à appliquer l'algorithme sur le sous-ensemble restant de la matrice jusqu'à atteindre la forme échelonnée.*

Pour obtenir la forme échelonnée réduite, effectuez des opérations élémentaires supplémentaires pour diviser chaque coefficient diagonal par son propre coefficient, afin d'obtenir une diagonale composée uniquement de 1*.*

Example 2.5. *Soit le système linéaire*

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ 4x - y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{B}}$$

Résolution par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ 4x - y + 2z = 1 \end{cases} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \underset{Etape01}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3y - 5z = -5 \\ 3y - 6z = -7 \end{cases} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{1} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - \frac{4}{1} L_1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{Etape02}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3y - 5z = -5 \\ -z = -2 \end{cases} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{3} L_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = 2 \end{cases}$$

Example 2.6. *Soit le système (S) avec deux paramètres α et c*

$$(S)\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x+6y-z=2 \\ 2x+\alpha y+z=c \end{cases}$$

Nous avons 3 équations donc il faut effectuer 2 étapes de la méthode de Gauss :

$$(S)\begin{cases} x+5y+z=0 & L_1 \\ x+6y-z=2 & L_2 \\ 2x+\alpha y+z=c & L_3 \end{cases} \underset{Etape01}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+5y+z=0 & \mathbf{L}_1 \\ y-2z=2 & L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{1}\mathbf{L}_1 \\ (\alpha-10)\,y-z=c & L_3 \leftarrow L_3-\frac{2}{1}\mathbf{L}_1 \end{cases}$$

$$\underset{Etape02}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+5y+z=0 & L_1 \\ y-2z=2 & \mathbf{L}_2 \\ (2\alpha-21)\,z=c-2\,(\alpha-10) & L_3 \leftarrow L_3-\frac{(\alpha-10)}{1}\mathbf{L}_2 \end{cases}$$

La dernière équation donne

$$(2\alpha-21)\,z=c-2\,(\alpha-10)$$

1. *Si $\alpha \neq \dfrac{21}{2}$, alors $z=\dfrac{c-2\,(\alpha-10)}{(2\alpha-21)}$, et on trouve y puis x en remontant : il existe une et une seule solution.*
2. *Si $\alpha = \dfrac{21}{2}$, on destingue deux cas ;*

   1) *Si $c-2\,(\alpha-10)=0$ $(i.e.c=1)$, alors $z=\beta\in\mathbb{R}$(une valeure arbitraire) et on trouve y puis x en remontant (il existe une infinité de solutions).*

   2) *Si $c-2\,(\alpha-10)\neq 0$, $(i.e.c\neq 1)$, alors il n'y a aucune solution.*

2.3.3 Méthode de Gauss pour calculer le rang d'un système linéaire

La méthode de Gauss est souvent utilisée pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. Cependant, elle peut également être utilisée pour calculer le rang d'un système linéaire en effectuant des opérations élémentaires sur les équations du système. On écrit le système linéaire sous forme matricielle $A\vec{X}=\vec{B}$, où A est la matrice des coefficients des inconnues et B le second membre.

L'objectif de la méthode de Gauss est de transformer la matrice des coefficients des inconnues (matrice A) en une forme échelonnée. Si une ligne de cette matrice est remplie de *zéros, elle peut être supprimée. Le nombre de lignes restantes après cette étape correspond au rang du système linéaire.*

Example 2.7. *Calculer le rang de la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} [L_1 \leftrightarrow L_2] \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & \mathbf{5} & 11 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{-14} & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ 3L_3 - 4L_2 \end{array}$$

Finalement

$$rgA = 3$$

Remark 52. *Pour toute matrice* $A \in M_{n,p}(\mathbf{K})$, $rgA \leq \min(n, p)$.

2.3.4 Algorithme du pivot pour la recherche de A^{-1} (Méthode de Gauss-Jordan)

La matrice A est inversible si et seulement si on peut obtenir une matrice triangulaire supérieure sans zéros sur la diagonale par des opérations élémentaires sur les lignes de A. Autrement dit, si la matrice échelonnée obtenue par des opérations élémentaires sur A a des coefficients non nuls sur sa diagonale.

Si A est inversible, on peut effectuer les mêmes opérations élémentaires sur les matrices A et I_n *pour obtenir la matrice identité* I_n *à gauche de la matrice échelonnée. À ce moment-là, la matrice A sera transformée en la matrice identité, ce qui signifie qu'elle est inversible.*

$$[A|I_n] \rightsquigarrow [I_n|A^{-1}],$$

$$Soit\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), A\ est\ inversible\ ssi\ rgA = n$$

Example 2.8. *Calculer s'il existe l'inverse de la matrice la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
[A|I_3] &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \mathbf{L}_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{L}_1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \\ \frac{L_2}{2} \\ L_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\mathbf{L}_2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \frac{\mathbf{L}_3}{2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + \mathbf{L}_3 \\ L_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = [I_3|A^{-1}] \text{ , donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.4 Résolution d'un système d'équations linéaire

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Notons par : $r = rg(A)$ le rang de la matrice A du système Et $r' = rg[A|\vec{B}]$, le rang de la matrice augmentée $[A|\vec{B}]$ du système.

Theorem 53.
- *Si $r < r'$ le système est dit incompatible c'est-à-dire l'ensemble des solutions $S = \varnothing$.*
- *Si $r = r'$ le système est dit compatible et dans ce cas on a deux possibilités :*

1) si $r = n$ on a une solution unique.

2) si $r < n$ on a une infinité de solutions.

Example 2.9. *Soit le système linéaire à une parametre suivant :*

$$
(S) \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = -2 \\ x - 2y + mz = -1 \end{cases}
$$

On a

$$[A|\vec{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & m & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & m+2 & -2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{L}_1 \end{array}\right]$$

$$[A|\vec{B}] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & m-1 & -8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3\mathbf{L}_1 \end{array}\right]$$

Si $m \neq 1$, *alors* $rgA = 3 = rg[A|\vec{B}] \quad (r = r' = 3)$,

1) $r = r' = 3$, *veut dire que le système est compatible*

2) $r = n = 3$, *on a donc une solution unique*

Si $m = 1$, $rgA = r = 2$, *et* $r' = rg[A|\vec{B}] = 3$

3) $r \prec r'$, *le système est incompatible et* $S = \varnothing$

Pour $m \neq 1$, *cherchons cette solution unique et pour cela on rend la matrice sous la forme reduite*

échelonné de Guass-Jordan

$$\begin{aligned}
[A|\vec{B}] \quad &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & m & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{m-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \frac{L_3}{m-1} \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{1-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{1-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \end{array}\right] \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{8}{1-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 + \frac{8}{1-m} \\ 0 & 1 & 0 & -2 + \frac{8}{1-m} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{8}{1-m} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + \mathbf{L}_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \mathbf{L}_3 \\ \mathbf{L}_3 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

La solution est

$$S = \left\{ 3 + \frac{8}{1-m}, -2 + \frac{8}{1-m}, \frac{8}{1-m} \right\}, \quad m \neq 1.$$

Example 2.10. *Soit le système linéaire*

$$(S)\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
[A|\vec{B}] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}\mathbf{L}_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{L}_1 \end{bmatrix} \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} L_1 \\ 2L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \\
&\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} L_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$r = rgA = 2 = rg[A|\vec{B}]$, *mais* $n = 3$, *alors*

1) $r = r' = 2$, *veut dire que le système est compatible*

2) $r = 2 \prec 3 = n$, *on a donc une infinité de solutions.*

on pose $z = a \in \mathbb{R}$, *et on écrit* x *et* y *en fonction de* a, *en effet*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3y - 5z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3 - 2a}{3} \\ y = \dfrac{3 + 5a}{3} \end{cases}$$

La solution est

$$S = \left\{\frac{3 - 2a}{3}, \frac{3 + 5a}{3}, a\right\}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Lorsque, le système admet une infinité de solutions. On fixe $(n-r)$ *inconnues et on résout les autres inconnues en fonctions de celles qui sont fixées. En général en fixe les inconnues correspondant aux colonnes qui ne contiennent pas de pivot.*

2.5 Feuille de TD

Exercise 54. *Résoudre les systèmes d'équations linéaires :*

$$\begin{cases} x - z = & 1 \\ 4x - y - 2z = & 2 \\ -2x + z = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z = & 0 \\ 4x - y - 2z = & 0 \\ -2x + z = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = & 1 \\ x - y - 2z = & 2 \\ 2x - y - z = & 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z = & 1 \\ 4x - y - 2z = & 2 \\ -2x + 2z = & 0 \end{cases}$$

Exercise 55. *Discuter et résoudre les systèmes d'inconnue* $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ *et de paramètre* $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + ay + (a-1)\,z = & 0 \\ 3x + 2y + az = & 3 \\ (a-1)\,x + ay + (a+1)\,z = & a \end{cases} \qquad \begin{cases} (1+a)\,x + y + z = & 0 \\ x + (1+a)\,y + z = & 0 \\ x + y + (1+a)\,z = & 0 \end{cases} [Supp]$$

Exercise 56. *Résoudre le système linéaire en discutant suivant la valeur du paramètre* $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + z + w & = 0 \\ ax + y + (a-1)\,z + w & = 0 \\ 2x + ay + z + 2w & = 0 \\ x - y + 2z + aw & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by + z & = 1 \\ x + aby + z & = b \\ x + by + az & = 1 \end{cases}$$

Chapitre 3

Intégrale de Riemann et calcul de primitives

L'intégrale d'une fonction f sur un segment $[a, b]$ doit correspondre à l'aire algébrique de la portion de plan située entre le graphe de f, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$, en comptant positivement l'aire de la région située au-dessus de l'axe des abscisses et négativement l'aire de la région située au-dessous de l'axe des abscisses.

Le but de ce chapitre est de définir en premier temps la théorie de l'intégration (au sens de Riemann) et développer ensuite les techniques de calcul des primitives.

3.1 Intégration de Riemann

3.1.1 Intégration des fonctions en escalier

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, définie et bornée sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition 57. [*Subdivision*] *Soit $[a, b]$ un intervalle compact (c'est -à- dire fermé et borné) de $\mathbb{R}$. Une subdivision $[a, b]$ est une suite finie et strictement croissante de points de $[a, b]$ dont le premier terme est a et le dernier b.*

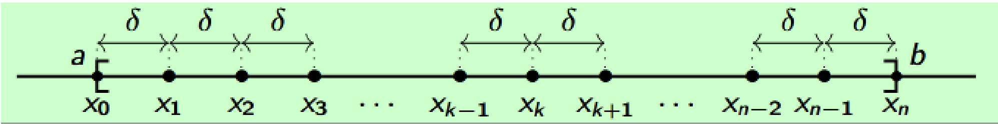
Une subdivision sera notée $d = (a = x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_n = b)$, dont le pas est le nombre

$$\delta = \max_{1 \leq k \leq n} |x_{k-1} - x_k|$$

1. *Une subdivision d'un intervalle est un découpage de l'intervalle $[a, b]$.*

2. *La subdivision homogène est issue d'un découpage équidistant de $[a, b]$ en n intervalles disjoints $]x_{k-1}, x_k[$ de même longueur $\delta = \dfrac{b-a}{n}$, et dans ce cas les points de subdivision sont donnés par $x_k = a + \left(k \times \dfrac{b-a}{n}\right)$ $(0 \leq k \leq n)$ (ils sont répartis selon une progression arithmétique de raison δ) i.e*

$$\left(a, a + \left(1 \times \frac{b-a}{n}\right), a + \left(2 \times \frac{b-a}{n}\right), ..., a + \left(n \times \frac{b-a}{n}\right) = b\right).$$

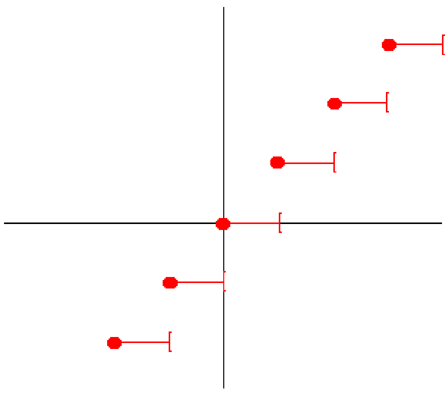


Soient d et d' deux subdivision de $[a, b]$, la subdivision d' est dite plus fine que d si tous les points d appartiennent à d'.

3.1.2 Fonctions en escalier

Definition 58. *Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.Une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $d = (a = x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[\,(1 \leq i \leq n)$.*

Example 3.1. *La fonction $x \mapsto [x]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x, est en escalier sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.*



3.1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Definition 59. *Soit f un fonction en escalier sur $[a, b]$; et pour chaque subdivision $d = (a = x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_n = b)$ de $[a, b]$ associée à f,*

$$I(f, d) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i,$$

où f_i désigne la valeur constante de f sur l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.

L'intégrale de f sur $[a, b]$ noté

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

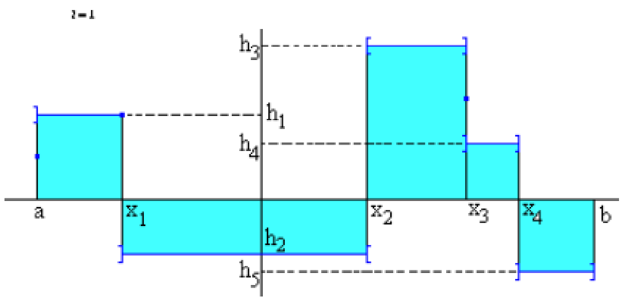
est

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i.$$

Remark 60. *On notera que l'intégrale de f ne dépend que des valeurs prises par f à l'intérieur des intervalles de la subdivision, et non des valeurs prises par f aux points de la subdivision.*

Example 3.2. *Si la fonction* f *prend les valeurs $h_1, h_2, ..., h_5$ sur ces intervalles (voir la figure ci-dessous), l'intégrale de f est par définition le nombre*

$$I(f, d) = (x_1 - a)\, h_1 + (x_2 - x_1)\, \mathrm{h}_2 + (x_3 - x_2)\, \mathrm{h}_3 + (x_4 - x_3)\, \mathrm{h}_4 + (b - x_4)\, \mathrm{h}_5$$



Dans l'intégrale, chaque aire de rectangle est comptée avec le signe de h_i : positivement si h_i est positif, négativement sinon.

3.1.4 Intégrale de Riemann

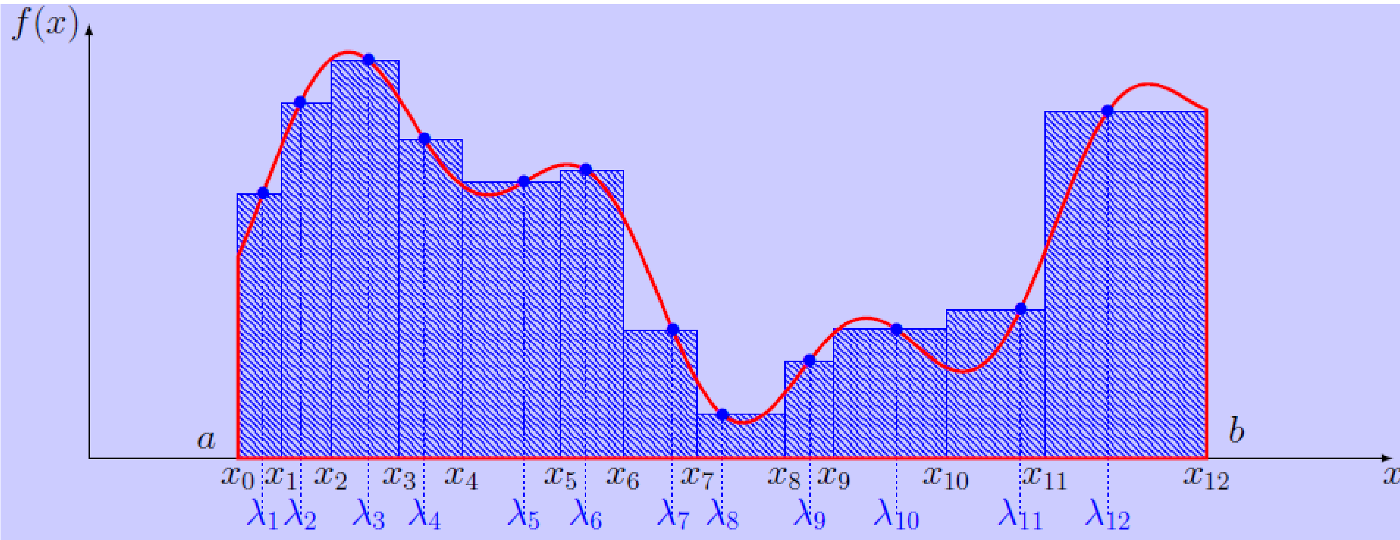
Definition 61. *(Somme de Riemann) Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $d = (a = x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$, et $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ une famille de réels tels que :*

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \qquad \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

On appelle somme de Riemann de la fonction f associée à d et à Λ le nombre

$$S(f, d, \Lambda) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\lambda_i)$$

Ce nombre représente l'aire de la réunion des rectangles de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur $f(\lambda_i)$.



Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $d = (a = x_0 \prec x_1 \prec ... \prec x_n = b)$ une subdivision de $[a, b]$.

Introduisons les valeurs "extrémales" relatives à chacun des sous-intervalles de la subdivision d.

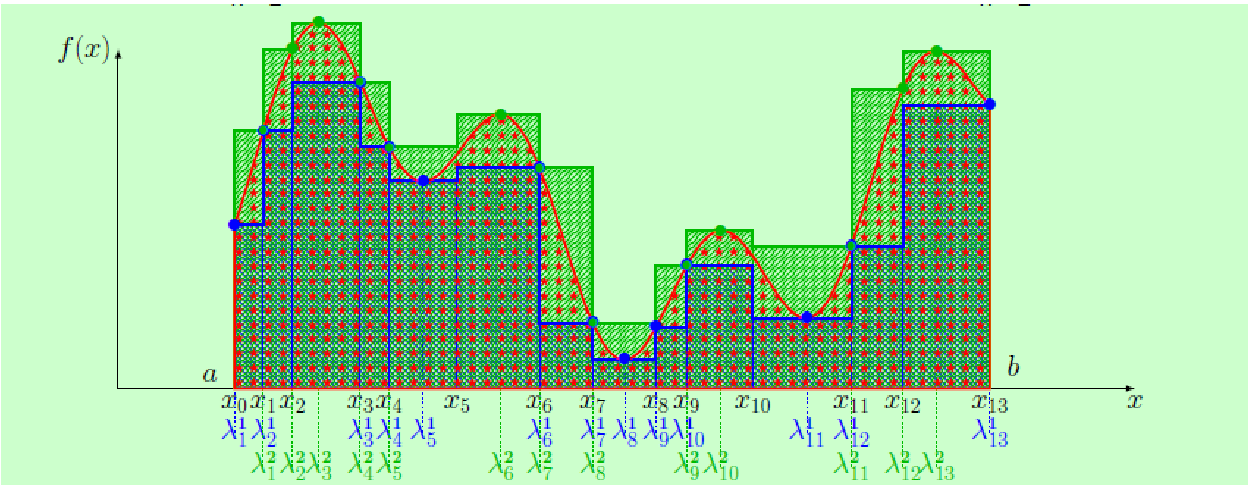
$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \quad m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f \qquad \text{et} \qquad M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

La fonction f étant continue (atteint ses bornes), il existe donc des λ_k^1,λ_k^2 dans $[x_{k-1}, x_k]$ tels que :

$$f\left(\lambda_k^1\right) = m_k \text{ et } f\left(\lambda_k^2\right) = M_k.$$

Les sommes de Riemann correspondant aux familles $\Lambda_1 = (\lambda_1^1, \lambda_2^1, ..., \lambda_n^1)$ et $\Lambda_2 = (\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_n^2)$ sont appelées *sommes de Darboux* .

$$S_1 (f, d, \Lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, m_k \quad \text{et} \quad S_2 (f, d, \Lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, M_k$$



Remark 62. *Toutes les sommes de Riemann compris entre S_1 et S_2*

Definition 63. *La fonction f est dite intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann, si les sommes de Darboux s_n et S_n tendent vers une limite commune $\mathbf{I}$ quand $n \to \infty$. Cette limite est alors appelée intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ et notée :*

$$\mathbf{I} = \int_a^b f(x) \, dx$$

La valeur de $\mathbf{I}$ représente l'aire située sous le graphe de f et délimitée par l'axe des abscisses et les verticales $x = a$ et $x = b$.

Une définition équivalente de l'intégrale de Rieamnn est la suivante.

Definition 64. *Si pour toute suite de subdivisions, dont le pas δ tend vers 0 (pour $n \to \infty$), et pour tout choix de points λ_k dans le $[x_{k-1}, x_k]$, la limite ci-dessous existe et tend vers une même valeur $\mathbf{I}$, alors*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \, f(\lambda_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \times f(\lambda_i) \qquad (= \mathbf{I})$$

est appelée l'intégrale définie de f sur $[a, b]$. f est alors dite intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$.

Fonctions intégrables

Theorem 65. *Les fonctions continues (respectivement monotones) sur un intervalle compact $[a, b]$ sont Riemann intégrable.*

Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors les propriétés principales de l'intégrale sont les suivantes.

1. Soit $c \in [a, b]$, on a
$$\int_c^c f(x)\, dx = 0.$$
2. Pour tout point $c \in [a, b]$
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \text{ [Relation de Chasles]}$$
3. Pour tous points c, d de $[a, b]$
$$\int_c^d f(x)\, dx = -\int_d^c f(x)\, dx.$$
4. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a
$$\int_a^b [\lambda f + \mu g](x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b f(x)\, dx.$$
5. Si f est une fonction paire, pour tout intervalle $[-c, c]$ inclus dans $[a, b]$ on a :
$$\int_{-c}^c f(x)\, dx = 2\int_0^c f(x)\, dx.$$
6. Si f est une fonction impaire, pour tout intervalle $[-c, c]$ inclus dans $[a, b]$ on a :
$$\int_{-c}^c f(x)\, dx = 0.$$
7. L'intégrale conserve les inégalités, c'est-à-dire que
$$\text{Si } f \geq 0 \text{ sur } [a, b], \text{ alors} \int_a^b f(x)\, dx \geq 0,$$
$$\text{Si } f \leq g, \text{ sur } [a, b], \text{ alors} \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

8. Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors la fonction $|f|$ l'est aussi et

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Theorem 66. (*de la moyenne*). *Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors il existe un point c de cet intervalle tel que :*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

le second membre est appelé valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

3.2 Intégrale indéfinie et Primitive

Definition 67. *On appelle primitive d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$, toute fonction F dérivable sur $[a,b]$, telle que*

$$F' = f.$$

On la note $\int f(x)\,dx$.

autrement dit, lorsque f est continue $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. C'est le théorème fondamental de calcul

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, bend left, "\text{dériver}"] & & F' = f \arrow[ll, bend left, "\text{chercher la primitive}"] \end{tikzcd}$$

Remark 68. *Pour toute primitive G $(\neq F)$ de la fonction f sur $[a,b]$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$.*

Example 3.3. *La fonction* $\ln x$ *est une primitive de* $\dfrac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *et de même, la fonction* $\ln 5x$ *est une primitive de* $\dfrac{1}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$ *(car* $\ln 5x = \ln x + \ln 5$).

Theorem 69. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$. Si F est une primitive quelconque de la fonction f sur $[a,b]$, alors on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b\,.$$

Example 3.4.

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \arctan 1 - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Theorem 70. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive, donnée par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.*

3.2.1 Primitives usuelles

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{c}\ (n \neq -1)$	e^x	$\mathrm{e}^x + \mathrm{c}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + \mathrm{c}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \mathrm{arc\,tg}\, x + \mathrm{c} \\ -\mathrm{arc\,ctg}\, x + \mathrm{c}' \end{cases}$
$\cos x$	$\sin x + \mathrm{c}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \mathrm{arg\,cth}\, x + \mathrm{c} \\ \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + \mathrm{c}, \quad \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$
$\sin x$	$-\cos x + \mathrm{c}$		
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{c}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \mathrm{arg\,th}\, x + \mathrm{c} \\ \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \mathrm{c}, \quad \lvert x\rvert < 1 \end{cases}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + \mathrm{c}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\begin{cases} \mathrm{arg\,sh}\, x + \mathrm{c} \\ \ln\lvert x + \sqrt{x^2+1}\rvert + \mathrm{c} \end{cases}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x + \mathrm{c}$		
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x + \mathrm{c}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \mathrm{arc\,sin}\, x + \mathrm{c}, \quad \lvert x\rvert < 1 \\ -\mathrm{arc\,cos}\, x + \mathrm{c}', \quad \lvert x\rvert < 1 \end{cases}$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th}\, x + \mathrm{c}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \mathrm{arg\,ch}\, x + \mathrm{c} \\ \ln\lvert x + \sqrt{x^2-1} + \mathrm{c} \\ \quad \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$
$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$-\mathrm{cth}\, x + \mathrm{c}$		

3.2.2 Calcul des primitives

Lorsque la fonction f est la dérivée d'une autre fonction bien connue, $\int f$ devient facile à résoudre. Malheureusement on ne connait pas les primitives de la plupart des fonctions. Nous présentons deux techniques d'intégration qui permettent calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et l'intégration par un changement de la variable.

Intégration par parties

Theorem 71. *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

Notation 72. $f(x)\,g(x)|_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$.

Example 3.5. *Calculer* $\mathbf{I}_1 = \int_0^1 x^2 \exp(x)\,dx$ *et* $\mathbf{I}_2 = \int \arcsin x dx$.

Posons pour $\mathbf{I}_1$:

$$\begin{cases} f(x) = x^2, & \textit{alors} \quad f'(x) = 2x \\ g'(x) = \exp(x), & \textit{alors} \quad g(x) = \exp(x) \end{cases}$$

On obtient :

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^1 x^2 \exp(x)\,dx = x^2 \exp(x)\big|_0^1 - 2\int_0^1 x.\exp(x)\,dx$$

Posons encore

$$\begin{cases} f(x) = x, & \textit{alors} \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = \exp(x), & \textit{alors} \quad g(x) = \exp(x) \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \int_0^1 x^2 \exp(x)\,dx = x^2 \exp(x)\big|_0^1 - 2\int_0^1 x.\exp(x)\,dx \\ &= x^2 \exp(x)\big|_0^1 - 2\left(x\exp(x)|_0^1 - \int_0^1 \exp(x)\,dx \right) \\ &= \exp 1 - 2\left(\exp(1) - \exp(x)|_0^1\right) = \exp 1 - 2. \end{aligned}$$

Pour $\mathbf{I}_2$, *on pose* $\mathbf{I}_2 = \int \arcsin x dx = \int 1 \times \arcsin x dx$.

$$\begin{aligned} f(x) = \arcsin x, &\quad \textit{alors} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = 1, &\quad \textit{alors} \quad g(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \int 1 \times \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \mathbf{I}_2 &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Remark 73. *L'intégrale* $\mathbf{I}_1$ *représente la surface compris entre la fonction* $f(x) = x^2 \exp(x)$, $y = 0$ *et les deux axes* $x = 0$ *et* $x = 1$, *tandis que, l'intégrale* $\mathbf{I}_2$ *représente une fonction primitive de la fonction* $f(x) = \arcsin x$.

Changement de la variable

Theorem 74. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$, et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\varphi(c) = a$ et $\varphi(b) = b$, on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Example 3.6. *Calculer* $\mathbf{I}_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

$$\mathbf{I}_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx, \text{ posons } x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_3 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t.dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3.2.3 Intégration des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fonction $\mathbf{R}(x)$, quotient de deux fonctions polynômes et on écrit souvent : $\mathbf{R}(x) = P(x)/Q(x)$, où P et Q sont deux fonctions polynômes réelles avec Q non nul.

Pour calculer la primitive d'une fraction rationnelle, on procède d'abord à la décomposition de $\mathbf{R}(x)$ en éléments simples de premier espèce et de second espèce dans $\mathbb{R}$.

La décomposition en éléments simples [**DES**] sur $\mathbb{R}$ est l'opération qui brise une fraction rationnelle compliquée à coefficients réels en une somme de morceaux simples à coefficients réels.

La décomposition s'effectue donc de la manière suivante :

Première étape : En utilisant la division euclidienne pour déterminer la partie entière de la fraction $\mathbf{R}(x)$.

Example 3.7. *Soit la fraction rationnelle*

$$\mathbf{R}(x) = \frac{2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 18x - 5}{x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2}$$

On effectue la division euclidienne , on a donc

$$\mathbf{R}(x) = \frac{2x^6+3x^5-3x^4-3x^3-3x^2-18x-5}{x^5+x^4-2x^3-x^2-x+2} = 2x+1+\frac{x^3-21x-7}{x^5+x^4-2x^3-x^2-x+2}$$
$$= 2x+1+\frac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)}$$

Deuxième étape : décomposer le dénominateur en facteurs irréductibles, décrire la décomposition et déterminer les coefficients.

Definition 75. *Les polynômes irréductibles (sur $\mathbb{R}$) sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (c'est-à-dire ax^2+bx+c avec $\Delta = b^2-4ac \prec 0$).*

Remark 76. *Un polynôme est dit unitaire (monic) si et seulement si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.*

Theorem 77. *Soit une fraction rationnelle $\mathbf{R}(x) = P(x)/Q(x)$, le polynôme $Q(x)$ se décompose de manière unique en un produit de la forme*

$$Q(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}\ldots(x-\alpha_p)^{m_p}\left(x^2+a_1x+b_1\right)^{n_1}\ldots\left(x^2+a_qx+b_q\right)^{n_q}$$

c'est à dire d'une constante a qui est le coefficient du terme de plus haut degré de P, et de polynômes irréductibles unitaires : $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,p}$ sont les racines (distinctes) de P, m_i leurs multiplicités, et les facteurs de degré 2 sont sans racine réelle (c'est-à-dire avec $\Delta = b^2-4ac \prec 0$).

La fraction peut être décomposée de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(x) &= \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a(x-\alpha_1)^{m_1}\ldots(x-\alpha_p)^{m_p}(x^2+ax+b)^{n_1}\ldots(x^2+a_qx+b_q)^{n_q}} \\
&= \textit{Partie entière} + \frac{A_1}{(x-\alpha_1)}+\ldots+\frac{A_{m_i}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{A_2}{(x-\alpha_2)}+\ldots+\frac{A_{m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} \\
&\quad +\ldots+\frac{A_{m_p}}{(x-\alpha_p)}+\ldots+\frac{A_{m_p}}{(x-\alpha_p)^{m_p}}+\frac{B_1x+c_1}{(x^2+a_1x+b_1)}+\ldots+\frac{B_1x+c_1}{(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}} \\
&\quad +\ldots+\frac{B_qx+c_q}{(x^2+a_qx+b_q)}+\ldots+\frac{B_qx+c_q}{(x^2+a_qx+b_q)^{n_q}}.
\end{aligned}$$

Definition 78. *On appelle élément simple de premier espèce (d'ordre m) une fraction rationnelle de la forme*

$$\frac{c}{(x-a)^m}, \quad (c,a)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } m\in\mathbb{N}^*.$$

(Le nombre $a\in\mathbb{R}$ est un pôle simple lorsque $m=1$)

On appelle élément simple de seconde espèce une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{\alpha x+\beta}{\left(x^2+cx+d\right)^m},\quad (\alpha,\beta,c,d)\in\mathbb{R}^4 \text{ et } m\in\mathbb{N}^* \text{ avec } x^2+cx+d \text{ est irréductible.}$$

La fraction rationnelle $\mathbf{R}(x) = P(x)/Q(x)$ s'écrit comme combinaison linéaire des éléments simples de premier et de second espèce

Example 3.8. *Décomposer la fraction suivante et calculer l'intégrale*

$$\mathbf{R}(x)=\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$$

En vertu de la formule précédente on aura

$$\mathbf{R}(x)=\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A_1}{(x+1)^3}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)}+\frac{B}{(x-2)}.$$

Par identification on obtient

$$A_1=-1\qquad A_2=\frac{1}{3}\qquad A_3=-\frac{2}{9}\qquad B=\frac{2}{9}$$

$$\mathbf{R}(x)=\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

Par suite

$$\int\mathbf{R}(x)\,dx=\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=\int\left[\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}\right]dx$$

$$\begin{aligned}\int\mathbf{R}(x)\,dx &= \int\frac{-1}{(x+1)^3}dx+\int\frac{1}{3(x+1)^2}dx-\int\frac{2}{9(x+1)}dx+\int\frac{2}{9(x-2)}dx\\ &= \frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C^{te}.\end{aligned}$$

Example 3.9. *Décrire les éléments simples de*

$$\mathbf{R}(x)=\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}.$$

D'une part, la partie entière est nulle comme $\deg(1)\prec\deg\left((x+2)(x-1)^2\right)$.

Et d'autre part on a :

- Le pôle $x = 1$ de multiplicité 2 $\rightsquigarrow$ 2 éléments simples de premier espèce

$$\frac{A_1}{(x-1)} \text{ et } \frac{A_2}{(x-1)^2},$$

- Le pôle $x = -2$ de multiplicité 1 $\rightsquigarrow$ 1 éléments simple de premier espèce

$$\frac{A_3}{(x+2)}.$$

et on a

$$\mathbf{R}(x) = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)}$$

Maintenant pour trouver le coefficient qui correspond aux éléments simples de premier et de seconde espèces ; nous proposons, l'identification entre les deux membres de l'équation, mais nous suggestions souvent les méthodes pratiques pour trouver ces coefficients.

$*$) $A_2 =?$ *et* $A_3 =?$

Il suffit de multiplier les deux membres de l'équation par $(x-1)^2$ *et* $(x+2)$ *respectivement on obtient*

$$(x-1)^2\left[\frac{1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)}\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{(x+2)} = A_1(x-1) + A_2 + \frac{A_3(x-1)^2}{(x+2)}\right]$$

Pour $x = 1$, on obtient

$$A_2 = \frac{1}{3}$$

$$(x+2)\left[\frac{1}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)}\right]$$
$$\left[\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{A_1(x+2)}{(x-1)} + \frac{A_2(x+2)}{(x-1)^2} + A_3\right]$$

Pour $x = -2$, on obtient

$$A_3 = \frac{1}{9}$$

$**$) $A_1 =?$ *Multiplions les deux membres de l'équation par* $(x-1)$

$$(x-1)\left[\frac{1}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)}\right]$$

$$\left[\frac{1}{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)} = A_1 + \frac{A_2}{(x-1)} + \frac{A_3(x-1)}{(x+2)}\right]$$

En fait tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$A_1 + A_3 = 0 \Leftrightarrow A_1 = \frac{-1}{9}$$

La fraction devient

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)^2} = -\frac{1}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{1}{9(x+2)}$$

Example 3.10. *Calculer la fonction primitive de f*

$$f(x) = \frac{x^4+x^3-1}{x(x+1)^2}.$$

La fonction f s'écrit sous forme d'une fraction polynomiale $\frac{P}{Q}$ avec :

$$\deg P(x) = \deg\left(x^4+x^3-1\right) = 4 \succ 3 = \deg\left(x\left(x^2+1\right)\right) = \deg Q(x)$$

.

$$f(x) = \frac{x^4+x^3-1}{x(x+1)^2} = \underbrace{\underset{(\textit{Partie entière})}{(x-1)}} + \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{x}}_{\textit{Eléments simples}}$$

C'est grace à la décomposition en éléments simple qu'on a

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{x^4+x^3-1}{x(x+1)^2}dx = \int \left[(x-1) + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{x}\right] dx \\
F(x) &= \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{(x+1)} + 2\ln|x+1| - \ln|x| + c^{te}.
\end{aligned}$$

Example 3.11. *Calcul de $\mathbf{I} = \int \frac{dx}{x^3+1}$.*

La fraction rationnelle se décompose en élément simple sous la forme

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{(x^2-x+1)} \; [\Delta \prec 0]$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{(x^2-x+1)}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\mathbf{I}_1$$

Pour calculer $\mathbf{I}_1 = \int \frac{x-2}{(x^2-x+1)}dx$*, nous écrivons*

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ [\textit{Méthode de quadrature}]}$$

On pose $X = x - \frac{1}{2}$*. Nous avons* $x - 2 = X - \frac{3}{2}$ *.*

$$\frac{x-2}{(x^2-x+1)} = \frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{X - \frac{3}{2}}{X^2 + \frac{3}{4}} = \frac{X}{X^2 + \frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\frac{1}{X^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\mathbf{I}_1 = \int \frac{X}{X^2 + \frac{3}{4}}dX - \frac{3}{2}\int \frac{1}{X^2 + \frac{3}{4}}dX = \mathbf{I}_2 - \frac{3}{2}\mathbf{I}_3$$

la primitive

$$\mathbf{I}_2 = \int \frac{X}{X^2 + \frac{3}{4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2X}{X^2 + \frac{3}{4}}dX$$

est de la forme $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx$ *où* $u(x) = x^2 + \frac{3}{4}$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2X}{X^2 + \frac{3}{4}}dX = \frac{1}{2}\ln\left|X^2 + \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + 1\right)$$

la primitive

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_3 &= \int \frac{1}{X^2 + \frac{3}{4}}dX = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X\right)^2 + 1\right)}dX = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

En revenant à

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 - \frac{3}{2}\mathbf{I}_3 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + 1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

et on obtient finalement

$$\mathbf{I} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\mathbf{I}_1 = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2 - x + 1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Intégration des éléments simples

1) $\int \frac{dx}{x-a}$	$= \ln\lvert x-a\rvert + c^{te}$	
2) $\int \frac{dx}{(x-a)^k}$	$= \frac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + c^{te}$	$(k \geq 2)$
3) $\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)}dx$	$= \frac{\alpha}{2}\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)}dx + \int \frac{\beta - \frac{a\alpha}{2}}{(x^2+ax+b)}dx$	x^2+ax+b $(\Delta \prec 0)$
	$= \frac{\alpha}{2}\ln\lvert x^2+ax+b\rvert + \left(\beta - \frac{a\alpha}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)}$	
	$= \frac{\alpha}{2}\ln\lvert x^2+ax+b\rvert + \left(\beta - \frac{a\alpha}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + c^2\right)}$	*Méthode de quadrature*
	$= \frac{\alpha}{2}\ln\lvert x^2+ax+b\rvert + \frac{\left(\beta - \frac{a\alpha}{2}\right)}{c}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{c}\right)^2 + 1\right)}\frac{dx}{c}$	$c^2 = b - \frac{a^2}{4}$
	$= \frac{\alpha}{2}\ln\lvert x^2+ax+b\rvert + \frac{\left(\beta - \frac{a\alpha}{2}\right)}{c}\arctan\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{c}\right)$	
4) $\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^k}dx$		**Exercice**

3.2.4 Intégration des fonctions trigonométriques

L'intégration des fonctions rationnelles de fonctions trigonométriques $\int F(\cos x, \sin x)\, dx$ (F rationnelle) peut être ramenée à l'intégration de fonctions rationnelles à l'aide de substitutions bien choisies.

* Le calcul se simplifie avec un changement de variable plus simple, suivant les règles de Bioche, posons $\omega(x) = F(x)\, dx$ l'intégrande (avec l'élément différentiel). Alors,

1 Si $\omega(-x) = \omega(x)$, on pose $t = \cos x$,

2 Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on pose $t = \sin x$,

3 Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on pose $t = \tan x$.

Example 3.12. *Soit à calculer l'intégrale*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

Avec les notations précédentes, on a $\omega(x) = \dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$, *qui vérifie* $\omega(-x) = \omega(x)$.

On pose donc $t = \cos x$, de sorte que

$$\sin^3(x)\,dx = \sin^2(x)\sin(x)\,dx = -\left(1-t^2\right)dt.$$

Le calcul donne alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx &= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)}{1+t^2}dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{(1-t^2)}{1+t^2}dt \\
&= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dt - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{2}{1+t^2}dt = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

** La substitution $t = \tan\dfrac{x}{2}$ ramène toutes les intégrales du type étudié à des intégrales de fonctions rationnelles.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \text{et } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Remark 79. *Pour les intégrales* $\int R(\cos x, \sin x))\,dx$, *il faut prendre garde que ce changement d variable n'est valable que sur les intervalles sur lesquels les fonctions* $R(\cos x, \sin x))$ *et* $\tan\dfrac{x}{2}$ *sont définies, donc sur les sous intervalles de* $]-\pi, +\pi[$ *ne contenant pas de singularité de la fonction à intégrer.*

Example 3.13. *Soient* α, β *deux constante réelles, le changement de variable* $t = \tan\dfrac{x}{2}$, *nous donne*

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta\cos x} = \int \frac{2dt}{\alpha(1+t^2) + \beta(1-t^2)}$$

Achevons le calcul en supposant $\alpha \succ 0$ *et* $|\beta| \prec \alpha$. *La fonction* $\dfrac{dx}{\alpha+\beta\cos x}$ *est alors partout continue, et on a sur* $]-\pi, +\pi[$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\alpha+\beta\cos x} &= \int \frac{2dt}{\alpha(1+t^2)+\beta(1-t^2)} = 2\int \frac{dt}{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)t^2} \\
&= \frac{2}{(\alpha-\beta)}\int \frac{dt}{\frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)} + t^2} = \frac{2}{(\alpha-\beta)}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)}}\right)^2 + t^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)}}t\right) + Cte \\
&= \frac{2}{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + Cte
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on en déduit la formule souvent utile :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{\alpha + \beta \cos x} = 2\int_{0}^{+\pi} \frac{dx}{\alpha + \beta \cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}} \; (\alpha \succ 0 \text{ et } |\beta| \prec \alpha)$$

Formule de Taylor avec reste intégrale

Theorem 80. *Soit $[a,b]$ un intervalle, c un élément de $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors, pour tout x appartenant à $[a,b]$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-c)^k}{k!} f^{(k)}(c) + \int_c^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

3.3 Feuille TD

Exercise 81. *Calculer les primitives et les intégrales suivantes*

$$\int \left(x^2 + x - \frac{1}{x}\right) dx \qquad \int \frac{2x}{2x^2+3} dx \qquad \int \frac{x^2}{x^2+3} dx \qquad \int (\cos x \times \sin x)\, dx$$

$$\int \sin^2 x dx \qquad \int \frac{3}{\sqrt{5x+1}} dx \qquad \int_{-1}^{1} \sinh(x)\, dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx$$

1) $\int_0^1 (x^3 - 7x + 15)\, dx$ 2) $\int_0^1 x\,(x^2+1)^5\, dx$ 3) $\int_{-2}^{2} \sqrt{x+2} dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$

Exercise 82. *Calculer à l'aide d'un changement de la variable ou par parties les intégrales suivantes*

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^2} \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \qquad \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \qquad \int \ln(x)\, dx$$

$$\int x^2 \exp(x)\, dx \qquad \int \arctan x dx \qquad \int \sin(\ln x)\, dx \qquad \int \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \qquad \int x \sin(x)\, dx$$

Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes

$$\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+1} dx \qquad \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx \qquad \int \frac{dx}{1+x^3}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+x+2} dx \qquad \int \frac{3x^5+2}{(x-1)^3 (x^2+1)} dx \qquad \int \frac{5x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)} dx$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x^2+x+1)^2} dx \qquad \int \frac{1}{x^2+x+2} dx$$

Exercise 83. *Calculer les primitives suivantes*

$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \qquad \int \frac{dx}{1+\cos} \qquad \int \tan^2 x dx \qquad \int \frac{dx}{\cos^4 x} \qquad \int \frac{\sin x \cos x}{1-\cos x} dx$

$\int \frac{\cosh x dx}{\sinh 4x} \qquad \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx \qquad \int \sqrt{x^2+4x+3} dx \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}} \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$\int \sin^5 x \cos^3 x dx \qquad \int \frac{1+\cos x}{\sin x - 1} dx \qquad \int \ln(1+t^2)\, dx \qquad \int \sqrt{\exp x - 1} dx$

$\int \frac{dx}{1+\sin x \cos x} \qquad \int \arcsin x dx \qquad \int \frac{1}{x+\sqrt{x+1}} dx \qquad \int \frac{dx}{(x^2-1)^p}\ (p \in \mathbb{N}^*)$

Chapitre 4

Eqautions différentielles linéaire (EDO)

Dans l'exploration de divers problèmes physiques, il est souvent nécessaire de trouver une fonction inconnue qui satisfait une équation reliant cette fonction à ses dérivées successives. Cette relation entre une fonction d'une seule variable réelle et ses dérivées est ce qu'on appelle une équation différentielle. Traditionnellement, on désigne par y la fonction inconnue dans cette équation et par x la variable réelle sur laquelle la solution de l'équation différentielle dépend. L'ordre le plus élevé de dérivation de la fonction inconnue présente dans l'équation différentielle est appelé l'ordre de cette équation.

4.1 Préminilaires

Une *équation différentielle d'ordre* n est une équation faisant intervenir une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n. On écrit souvent

$$F\left(x, y\left(x\right), y'(x), ..., y^{(n)}\left(x\right)\right) = 0$$

- Une équation différentielle dont la fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable est dite *ordinaire*.
- L'*ordre* d'une équation différentielle correspond au degré de la dérivée la plus élevée présente dans cette équation.
- Une *solution* d'une telle équation sur un intervalle $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation différentielle.

- Une équation différentielles est dite *linéaire* si toutes les fonctions inconnues $y(x)$ et ses dérivées apparaissent de manière linéaire.

$$a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + ... + a_n(x)\,y^{(n)} = f(x) \qquad \text{(EDO}(n))$$

- On distingue entre deux types d'EDO linéaires : celles de coefficients *constants* et celles de coefficients *variables* dans l'expression $(EDO\,(n))$.

- L'équation est dite *homogène* si le second membre est nul pour tout x, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de terme indépendant de $y(x)$ ni de ses dérivées.

Example 4.1.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dx} + 3y = 2x, & (EDO,\ du\ 1^{er}\, ordre) \\ x^2y'' - 2xy' + x^3y = \exp x \sin x, & (EDO,\ du\ 2^{nd}\, ordre\ linéaire\ à\ coefficients\ variables) \\ y' + x\sqrt{y} = \cos x, & EDO,\ du\ 1^{er}\, ordre\ non\ linéaire \end{array}$$

Remark 84. *On s'intéresse uniquement, dans ce chapitre, à l'étude de deux types d'équations linéaires : les équations différentielles linéaires d'ordre* 1 *ainsi que les équations différentielles d'ordre* 2 *dont les coefficients sont des constantes.*

4.2 Structure de la solution

La solution générale d'une équation différentielle désigne l'ensemble complet des solutions possibles. Une solution particulière est une solution spécifique de cette équation différentielle.

Theorem 85. *Soit l'équation différentielle linéaire* $(EDO\,(n))$

$$a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + ... + a_n(x)\,y^{(n)} = f(x).$$

L'ensemble S *des solutions de cette équation s'exprime sous la forme :*

$$S = S_0 + y_0,$$

où S_0 *est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée*

$$a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + ... + a_n(x)\,y^{(n)} = 0.$$

et y_0 *une solution particulière de l'équation.*

La recherche d'une solution particulière peut se faire en plusieurs temps, si $f(x)$ se décompose en somme de fonctions plus simples.

Proposition 86. ***(Principe de superposition)***

Si $f = f_1 + f_2$, pour trouver une solution particulière y_0 de l'équation $(EDO(n))$, il suffit de trouver :

- *Une solution particulière y_1 de $(E_1) : a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = f_1(x)$,*
- *Une solution particulière y_2 de $(E_2) : a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = f_2(x)$.*

Une solution particulière de (E) est alors $y_1 + y_2$.

4.3 Équations différentielles du 1^{er}ordre

4.3.1 Equations différentielles à variables séparées

Une équation différentielle de 1^{er} ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)y' = g(x).$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement. En effet, on écrit $y' = \dfrac{dy}{dx}$, puis

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow f(y)\,dy = g(x)\,dx,$$

On intègre alors les deux côtés de l'équation :

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C,$$

Il est alors nécessaire de trouver d'abord les primitives F et G de f et de g, respectivement, puis d'exprimer y en fonction de de x (et de$C$) :

Il s'agit donc d'abord de trouver des primitives F et G de f et de g, et ensuite d'exprimer y en terme de x :

$$F(y) = G(x) + C \Rightarrow y = F^{-1}(G(x) + C)$$

C'est pour cette raison que l'on utilise également le terme *intégrer* pour désigner la résolution d'une équation différentielle.

Example 4.2. *Résoudre l'équation différentielle homogène du* 1^{er} *ordre suivante*

$$y' - xy = 0$$

On a

$$y' - xy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = xdx \text{ (équation à variables.séparées)}$$

dont la solution est donnée par :

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = k\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad (k = \pm\exp(c))$$

4.3.2 Résolution des équations différentielles du 1^{er}ordre

Nous nous intéressons ici aux équations différentieles linéaires d'ordre 1 sur un intervalle $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$, dont la forme générale est :

$$a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' = f(x)\,,$$

où a_0, a_1 sont des fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On se restreint ici au cas où la fonction a_1 ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbf{I}$ considéré, et où les fonctions a_1, a_0 et f sont continues, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Ainsi, en divisant par a_1 et en isolant le terme y', on est ramené à une équation *sous forme normale*

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{f(x)}{a_1(x)} \Leftrightarrow y' = \alpha(x)\,y + \beta(x)\,,$$

où α et β sont deux fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

L'équation homogène associée est

$$y' = \alpha(x)\,y.$$

Solutions de l'équation homogène

Theorem 87. *(Résolution de l'équation $y' = \alpha(x)\,y$ (α continue))*

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = \alpha(x)\,y$ est :

$$S_0 = \{y : x \mapsto k\exp(A(x))\}$$

où A est une primitive de la fonction (continue) α, et k est une constante.

En effet

$$y' = \alpha(x)\, y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \alpha(x)\, y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \alpha(x)\, dx (\text{équation à } v.s)$$

On intègre les deux membres

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \alpha(x)\, dx \Rightarrow \ln|y| = \int \alpha(x)\, dx + C \Rightarrow y = \exp\left[\int \alpha(x)\, dx + C\right] \\ y &= \pm \exp[C] \exp\left[\int \alpha(x)\, dx\right] = k \exp\left[\int \alpha(x)\, dx\right] = k \exp(A(x)). \\ \text{où } A(x) &= \int \alpha(x)\, dx \text{ et } k = \pm \exp[C]. \end{aligned}$$

Example 4.3. *Résoudre sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *l'équation différentielle homogène suivante :*

$$\sin x\ y' - \cos x\ y = 0$$

$$\sin x y' - \cos x y = 0 \Leftrightarrow \sin x y' = \cos x y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

On obtient

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

La solution de l'équation homogène est donc

$$y = K \sin x, \qquad K \in \mathbb{R}\,(K = \pm \exp(k))$$

Remark 88. *La constante d'intégration K est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ donnée, on ait une valeur donnée de $y(x) = y(x_0) = y_0$. (On parle d'un problème aux valeurs initiales).*

Solution particulière par variation de la constante

On cherche la solution particulière sous la forme $y = k \exp(A(x))$, avec k une fonction (depend de x) à déterminer (*variation de la constante*). Revenons à l'exemple précédent avec $f(x) = x$

Example 4.4. *Résoudre sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *l'équation différentielle homogène suivante :*

$$\sin x\ y' - \cos x\ y = x$$

On sait que la solution de l'équation homogène est donnée par

$$y = K \sin x, \qquad K \in \mathbb{R}\,(K = \pm \exp(k))$$

D'après la méthode de la variation de la constante, on peut écrire

$$y = K(x)\sin x$$

on obtient

$$\sin x\ y' - \cos x\ y = x \Leftrightarrow \sin x\ \left(K(x)\sin x\right)' - \cos x\ K(x)\sin x = x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\ \left(K'(x)\sin x + K(x)\cos x\right) - \cos x\ K(x)\sin x = x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\ K'(x) + K(x)\sin x\ \cos x - K(x)\cos x\ \sin x = x \Leftrightarrow \sin^2 x\ K'(x) = x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\ K'(x) = x \Leftrightarrow K'(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$$

et finalement

$$K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx$$

On intègre par partie, en posant

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1, g(x) = \frac{-1}{\tan x}$$

$$K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx = \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}dx = \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos}{\sin x}dx = \frac{-x}{\tan x} + \ln|\sin x| + c$$

Sur $\mathbf{I}$*,* $\sin x \succ 0$*, une solution particulière est donc obtenue pour* $c = 0$ *est donnée par*

$$y = K(x)\sin x = \left(\frac{-x}{\tan x} + \ln|\sin x|\right)\sin x = -x\cos x + \sin x \ln(\sin x)$$

et la solution générale de (E) *est donné par*

$$y = K\sin x + -x\cos x + \sin x\ln(\sin x)\,,\ \ K \in \mathbb{R}$$

Remark 89. *De façon générale, pour résoudre une équation différentielle du* 1^{er} *ordre, il n'est pas toujours possible de trouver une équation différentielle à variables séparées. Cependant, la méthode de la variation de la constante est une technique couramment utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires inhomogènes, qui ne sont pas à variables séparées.*

Changement de variable

Dans certains cas, il est possible de trouver un changement de variable qui permet de transformer une équation différentielle quelconque pour y en une équation différentielle linéaire pour une nouvelle fonction u. Cette nouvelle équation est souvent plus simple à résoudre que l'équation différentielle initiale pour y.

Une équation différentielle de *Bernoulli* est de la forme :

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)\,y^{\alpha}$$

où a et b sont des fonctions continues de α une constante réelle différente de 0 et 1 (en effet pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ l'équation est linéaire !). La solution évidente ne sera pas retenue. Pour les valeurs de où le coefficient ne s'annule pas, nous pourrons diviser sur $a(x)$

$$y' + A(x)\,y = B(x)\,y^{\alpha}$$

Soit le changement de la variable

$$z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$$

L'équation de Bernoulli devient une équation différentielle linéaire. En effet, divisons les deux membres de l'équation par $y^{\alpha} \neq 0$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + A(x)\,\frac{y}{y^{\alpha}} = B(x) \Leftrightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{A(x)}{y^{\alpha-1}} = B(x)$$

Comme

$$z = \frac{1}{y^{\alpha-1}} \Rightarrow z' = \left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y' = \frac{(1-\alpha)}{y^{\alpha}}y',$$

transforme l'équation proposée en une équation différentielle linéaire :

$$\frac{z'}{(1-\alpha)} + A(x)\,z = B(x)$$

La résolution de celle-ci donne $z(x)$ puis la solution de l'équation différentielle de Bernoulli : $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Example 4.5. *Soit l'équation*

$$xy' + y = y^2 \ln x$$

L'équation est de Bernoulli.

On écrit sous forme normale notre équation

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{\ln x}{x},$$

Le changement de la variable $z = \dfrac{1}{y}$, *transforme l'équation en une équation difféerntielle linéaire, en effet :*

$$-z' + \frac{1}{x}z = \frac{\ln x}{x}.$$

La solution de cette équation devient facile.

4.4 Équations différentielles du 2^{nd}ordre

Une équation differentielle linéaire du second ordre à coefficient constant est de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

où a, b, c sont des *constantes* et $f(x)$ une fonction de x.

L'équation homogène associée est :

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

Propriétés des solutions de l'équation homogène

Si y_1, y_2 sont deux solutions particulières de l'équation homogène, ses solutions sont dites linéairement indépendantes s'il n'est pas possible de trouver deux constantes C_1 et C_2 différentes de zéros et telles que

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0.$$

Supposons les deux solutions particulièresy_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, on montre que la fonction :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

est une solution particulière de l'équation homogène.

Nous avons en effet par hypothèse

$$\begin{aligned} ay_1'' + by_1' + cy_1 &= 0, \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 &= 0. \end{aligned}$$

"Multiplions la première équation par C_1 et la seconde par C_2, et additionnons les deux équations terme à terme.

$$a(C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + b(C_1 y_1' + C_2 y_2') + c(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0,$$

soit

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

C_1, C_2 étant deux constantes arbitraires

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

représente l'intégrale générale de l'équation homogène.

4.4.1 Résolution de l'équation homogène

Cherchons la solution de l'équation homogène sous *la forme* $y = \exp(rx)$, on obtient $y = r\exp(rx)$ et $y = r^2\exp(rx)$.

Reportons ces valeurs dans l'équation homogène, il vient :

$$ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \exp(rx)(ar^2 + br + c) = 0,$$

et puisque $\exp(rx) \neq 0$, pour tout x,

$$ar^2 + br + c = 0.$$

L'équation obtenue est appelée équation *caractéristique* de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

La résolution de l'équation caractéristique conduit à la solution générale cherchée.

1. ^{er} **cas** $b^2 - 4ac \succ 0$,

   L'équation caractéristique à deux racines réelles distinctes. Si r_1, r_2 sont ces racines, les fonctions :
   $$y_1 = \exp(r_1x)$$
   $$y_2 = \exp(r_2x)$$
   sont deux solutions particulières linéairement indépendantes. La solution générales de l'équation homogène est donc :

   $$y = C_1\exp(r_1x) + C_2\exp(r_2x),$$

   C_1, C_2 sont deux constantes arbitraires.

2. ^{eme} **cas** $b^2 - 4ac = 0$,

   L'équation caractéristique à une racine double qui vaut $r = \dfrac{-b}{2a}$, cherchons pour l'équation homogène une solution de la forme

   $$y = z\exp(rx),$$

   où z est une fonction de x.

   on a
   $$y' = z'\exp(rx) + rz\exp(rx),$$
   $$y'' = z''\exp(rx) + 2rz'\exp(rx) + r^2z\exp(rx).$$

Portons ces valeurs dans l'équation homogène, il vient :

$$\exp(rx)\left[a\left(z'' + 2rz' + r^2 z\right) + b(z' + rz) + cz\right] = 0.$$

Soit

$$\exp(rx)\left[az'' + (2ar + b)\, z' + \left(ar^2 + br + c\right) z\right] = 0.$$

Or $2ar + b = 0$ puisque $r = \dfrac{-b}{2a}$, et $ar^2 + br + c = 0$, r étant une racine de l'équation caractéristique. Puisque $\exp(rx) \neq 0$, pour tout x, on en conclut :

$$z'' = 0$$

d'où

$$z' = C_1, \quad C_1 \text{ une constante,}$$

et

$$z = C_1 x + C_2, \quad C_2 \text{ une constante}$$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$y = (C_1 x + C_2) \exp(r_1 x).$$

3. ^{e} **cas** $b^2 - 4ac \prec 0$.

   L'équation caractéristique à deux racines complexes. Si $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines conjuguées de cettte équation, les fonctions :

$$y_1 = \exp((\alpha + i\beta)\, x) = \exp(\alpha x)(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$
$$y_2 = \exp((\alpha - i\beta)\, x) = \exp(\alpha x)(\cos \beta x - i \sin \beta x),$$

   sont donc deux solutions particulières de l'équation homogène. Il en est de même des fonctions :

$$Y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \exp(\alpha x)(\cos \beta x),$$
$$Y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = \exp(\alpha x)(\sin \beta x),$$

   Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendantes, et la solution générale de l'équation homogène est :

$$y = \exp(\alpha x)\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right),$$

   où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

4.4.2 Résolution de l'équation complète

Supposons que la fonction $u(x)$ est une solution particulière de l'équation complète (c'est l'équation avec le second membre)

$$au'' + bu' + cu = f(x).$$

Posons

$$y = u(x) + z(x),$$

alors

$$y' = u'(x) + z'(x), \qquad y'' = u''(x) + z''(x).$$

Portons ces valeurs dans l'équation complète et tenons compte de l'équation $au'' + bu' + cu = f(x)$, il vient

$$az'' + bz' + cz = 0.$$

On en conclut que y représentera la solution générale de l'équation complète si $z(x)$ est une solution générale de de l'équation sans second membre.

La solution générale de l'équation complète $ay'' + by' + cy = f(x)$,s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$ une solution particulière quelconque de l'équation complète.

Example 4.6. *Soit l'EDO de second ordre*

$$y'' + 4y = x^2 + 1$$

L'équation sans second membre à pour solution

$$y_1 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Cherchons une solution particulière y de l'équation complète : le second membre étant un polynôme de second degré, y est également du second degré.

Soit $y = ax^2 + bx + c$, alors $y' = 2ax + b$ et $y'' = 2a$, d'où

$$2a + 4\left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 + 1.$$

On en conclut que $a = \dfrac{1}{4}$ et $c = \dfrac{1}{8}$ et la solution de l'équation complète est

$$y_1 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}.$$

Nous avons vu précédemment un exemple avec $f(x) = P(x)$, un polynôme de degré n en x. Pour trouver une solution particulière $u(x)$ de l'équation complète, nous posons $u(x) = Q(x)$, un polynôme également de degré n.

Pour récapituler

1 Si f est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

2 Si $f(x) = A\exp(\lambda x)$, on cherche une solution particulière sous la forme :

- $B\exp(\lambda x)$ si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique,
- $Bx\exp(\lambda x)$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique,
- $Bx^2\exp(\lambda x)$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.

3 Si $f(x) = B\cos(wx)$, on cherche une solution sous la forme $y(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx)$ sauf si l'équation homogène $y'' + w^2y = 0$. Dans ce cas, on cherche une solution sous la forme $y(x) = ax\sin(wx)$.

4 Si $f(x) = B\sin(wx)$, on cherche une solution sous la forme $y(x) = a\cos(wx) + b\sin(wx)$ sauf si l'équation homogène est $y'' + w^2y = 0$. Dans ce cas, on cherche une solution sous la forme $y(x) = ax\cos(wx)$.

5 Plus généralement, si$f(x) = P(x)\exp(\lambda x)$, avec P un polynôme, on cherche une solution sous la forme $Q(x)\exp(\lambda x)$.

Méthode de variation des constantes

Une autre procédé général pour trouver la solution de l'équation complète est celui de la variation des constantes.

Une fois trouvé la solution générale de l'équation sans second membre (l'équation homogène associée)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

on considère que C_1 et C_2 sont fonction de x;

$$y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2.$$

En dérivant et en prenant pour équation supplémentaire $C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0$, l'équation complète devient

$$C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = f(x).$$

On obtient alors C_1', C_2' par le système si-dessus et C_1', C_2' par intégration.

Example 4.7. *Soit l'équation différentielle*

$$y'' + y = \tan x,$$

l'équation caractéristique de l'équation homogène associée $y'' + y = 0$ est

$$r'' + r = 0,$$

et par concéquent, la solution générale de cette dernière équation est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

On a

$$y' = C_1'(x) \cos x - C_1(x) \sin x + C_2'(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

On impose de plus que : $C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$

$$y'' = -C_1'(x) \sin x - C_1(x) \cos x + C_2' \cos x - C_2(x) \sin x$$

En portant dans l'équation complète, nous obtenons :

$$y''+y = \tan x \Leftrightarrow -C_1'(x) \sin x - C_1(x) \cos x + C_2'(x) \cos x - C_2(x) \sin x + C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x. = \tan x$$

$$y'' + y = \tan x \Leftrightarrow -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x$$

Les deux équations

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \tan x, \end{cases}$$

conduisent à

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\sin x \tan x = \dfrac{-\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \dfrac{1}{\cos x}, \\ C_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & \tan x \end{vmatrix}}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos x \tan x = \sin x \end{cases}$$

et en intégrant

$$\begin{cases} C_1(x) = \int \left(\cos x - \dfrac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin x)}{1-\sin x)} \right| + K_1 \\ C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + K_2 \end{cases}$$

4.5 Feuille de TD

Exercise 90. *On considère l'équation différentièlle*

$$xy' + (x-1)\,y = f\,(x)\,.$$

Trouver la solution générale de l'équation sans second membre.

Résoudre l'équation complète lorsque :

$$f\,(x) = x^3 + x^2.$$

$$f\,(x) = x^2 \cos x.$$

$$f\,(x) = \frac{\exp\,(-x)}{x+1}.$$

$$f\,(x) = xy^3.$$

Exercise 91. *Intégre les équations différentièlles*

$$y'' + 3y - 4y = 0 \qquad y'' + 3y - 4y = 2x - \cos x$$

$$4y'' + 4y' + y = 0 \qquad 4y'' + 4y' + y = 2\sinh x$$

$$y'' + 4y = 0 \qquad y'' + 4y = \exp\,(-x)\sin x$$

Chapitre 5

Fonctions de plusieurs variables

Les fonctions à plusieurs variables, telles que celles définies dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, sont fondamentales dans la modélisation de phénomènes complexes. Dans cette section, nous généralisons ces concepts analytiques pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, en explorant les notions de limites, continuité, différentiabilité et intégration. Dans ce contexte étendu, l'intégration devient double ou triple. Bien que les notions topologiques abordées soient souvent liées à des applications physiques, nous nous concentrons ici sur quelques concepts clés, essentiels à la compréhension de l'intégration. Les fonctions que nous examinerons auront la forme suivante :

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad X = (x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n)$$

où $n \geq 1$ est un entier naturel. En d'autres termes, les éléments de l'ensemble de départ E seront des n-uplets tels que $(x_1, ..., x_n)$, que l'on peut considérer comme des vecteurs, et les éléments de l'ensemble d'arrivée seront des nombres réels.

5.1 Notions topologiques de $\mathbb{R}^n$

Voici quelques rappels de topologie dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

- Le *produit scalaire* usuel de $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$, noté $\langle x \mid y \rangle$ (ou bien parfois $x.y$), est défini par

$$\langle x \mid y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

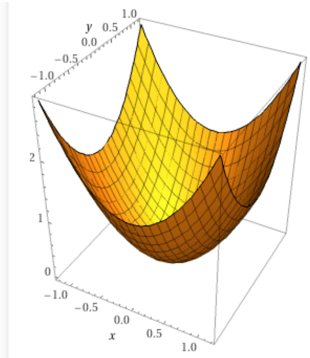
- La *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^n$ est la norme associée à ce produit scalaire. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne de x, notée $\|x\|$, est définie par
$$\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$
- La *distance* entre le point $A = (a_1, ..., a_n)$ et le point $M = (x_1, ..., x_n)$ est
$$\|M - A\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2}.$$
- La *boule ouverte* de centre $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \succ 0$, notée $B_r(A)$, est l'ensemble suivant :
$$B_r(A) = \{M \in \mathbb{R}^n / \|M - A\| \prec r\}$$
- Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est un *voisinage* de A si $\mathcal{U}$ contient une boule ouverte centrée en A.
- On dit que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si, pour tout point $A \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ contient une boule ouverte centrée en A.
- Partie *bornée* : Une partie P de est bornée lorsqu'elle est incluse dans une boule. Autrement dit, Une partie P de est bornée si et seulement si :
$$\exists R \succ 0, \quad \forall X \in P, \qquad \|X\| \leq R.$$
- *Compact* de $\mathbb{R}^n$: Toute partie K de non vide, fermée et bornée est dite compacte.

5.2 Graphe

Definition 92. *Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ associe à tout $(x_1, ..., x_n)$ de E un seul nombre réel $f(x_1, ..., x_n)$.*

Example 5.1.
$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$
$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad (x, y, z) \mapsto 2(xy + yz + xz)$$
$$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

Si dessous le graphe de la fonction de deux variables $f_1(x, y) = x^2 + y^2$.



5.3 Limites et continuité

Les notions de limite et de continuité des fonctions d'une seule variable se généralisent en plusieurs variables

sans complexité supplémentaire : il suffit de remplacer la valeur absolue par la norme euclidienne.

Soit f une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie au voisinage de $X_0 \in \mathbb{R}^n$, sauf peut-être en X_0.

Definition 93. *La fonction f admet une limite l lorsque X tend vers X_0 si :*

$$\forall \epsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0, \quad \forall X \in E, \quad 0 \prec \|X - X_0\| \prec \delta \Rightarrow |f(X) - l| \prec \epsilon.$$

et on écrit $\lim_{x \to X_0} f(X) = l$ *ou* $f(X) \underset{X \to X_0}{\to} l.$

Definition 94. *La fonction f est continue en $X_0 \in E$ si* $\lim_{X \to X_0} f(x) = f(X_0)$.

La fonction f est continue sur E si elle est est continue en tout point de E.

Example 5.2. *Montrer que*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Rappellons La définition de la limite

$$\forall \epsilon \succ 0, \exists \delta \succ 0, \quad \forall X \in E, \quad 0 \prec \|X - X_0\| \prec \delta \Rightarrow |f(X) - l| \prec \epsilon,$$

et montrons par définition que la limite est 0!;

On suppose qu'il exist $\epsilon \succ 0$, *et montrons l'existence de* $\delta \succ 0$, *telleque*

$$si\ 0 \prec \sqrt{x^2+y^2} \prec \delta,\ \text{ceci imlique } |f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \prec \epsilon,$$

comme $x \leq \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $y^2 \leq x^2+y^2$, *on obtient :*

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2},$$

il suffit de choisir : $\epsilon = \delta$, *et on aura*

$$|f(x,y)| \leq \epsilon.$$

Example 5.3. *Discuter la limite suivante :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

d'une part, si l'on choisit le chemin $y = x$, *on a :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{2} = 0$$

et d'autre part,si l'on choisit le chemin $y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{1+x^2} = 0.$$

On choisit encore les coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (r \geq 0)$$

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{(r\cos\theta)^2\,(r\sin\theta)}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin\theta,$$

lorsque $(x,y) \to (0,0)$, $r \to 0$ *et la limite devient* 0.

Remark 95. *Dans* $\mathbb{R}$, *il n'y a qu'un seul chemin pour aller de* x *à* a. *En revanche, dans* $\mathbb{R}^n$, *faire tendre* X *vers* A *signifie*

que toutes les coordonnées de X *tendent simultanément et indépendamment vers celles de* A. *Il existe donc une infinité de chemins possibles, rendant la définition parfois difficile à appliquer.*

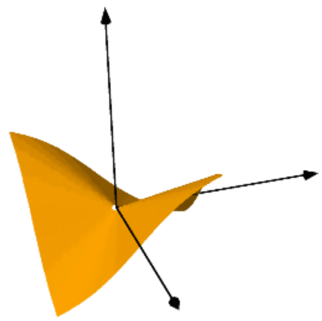
En pratique, on utilise la définition ou des méthodes comme le changement de variables (par exemple, les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$) ou le développement limité pour chaque variable afin d'étudier les limites.

Pour montrer qu'une limite n'existe pas, on choisit deux chemins différents pour calculer deux limites distinctes. Si les deux limites diffèrent, cela prouve que la limite n'existe pas, car une limite, si elle existe, doit être unique.

Remark 96. *Les propriétés relatives aux limites et à la continuité sont tout aussi pertinentes pour les fonctions de plusieurs variables que pour les fonctions d'une seule variable, y compris la notion de prolongement par continuité.*

Example 5.4. *Les applications définies par* $(x, y) \mapsto x + 2y$, $(x, y) \mapsto 2xy$, $(x, y) \mapsto \exp(2xy)$ *sont continues* $\mathbb{R}^2$.

Example 5.5. *Soit la fonction de deux variables* $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ *définie sur* $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$. *Est-il possible de prolonger* f *par continuité en* $(0, 0)$ *? Sur la figure ci-dessous, la question devient simplement : est-il possible de boucher le trou au milieu de la surface en rajoutant juste un point ?*



Lmite à l'origine : comme $|x| \le \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$ donc

$$|f(x, y)| = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \sqrt{x^2 + y^2} \to (0, 0) \text{ lorsque } (x, y) \to (0, 0).$$

On note par

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de la fonction $f(x, y)$.

5.4 Dérivées Partielles et Différentielle

La fonction différentiable étend le concept de dérivabilité d'une fonction à plusieurs variables. Contrairement à la définition basée sur les taux d'accroissement, qui ne peut être directement appliquée (puisque diviser par un vecteur n'a pas de sens), la caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité d'ordre 1 est généralisée à toutes les dimensions.

5.4.1 Dérivées Partielles

Rappelons la notion de dérivée. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une seule variable. La dérivée de f en $x_0 \in \mathbb{R}$, si elle existe, est :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Example 5.6. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est dérivable, de dérivée $f'(x_0) = 2x_0$. En effet, lorsque h tend vers 0, on a :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0.$$

Definition 97. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_i au point $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ si la fonction d'une variable*

$$x_i \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$$

est dérivable au point a_i. Autrement dit, on définit la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $x_0 = (a_1, a_2, ..., a_n)$ par

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}$$

si cette limite existe.

Notation 98. *Cette limite se note*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

C'est la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point x_0. Le symbole (∂) se lit (d rond). Une autre notation est $\partial_{x_i} f(x_0)$. Il y a donc n dérivées partielles au point x_0.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

Example 5.7. *Calculer les dérivées partielles premières de la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = x^2 y^3.$$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$*, qui est la dérivée partielle de* f *par rapport à* x*, on considère que* y *est une constante et on dérive* x^2y^3 *comme si c'était une fonction de* x *:*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^3.$$

Pour l'autre dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$*, on considère que* x *est une constante et on dérive* x^2y^3 *comme si c'était une fonction de* y *:*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

Interprétation géométrique : Pour une fonction d'une variable, la dérivée en un point est la pente de la tangente au graphe de la fonction en ce point (le graphe est ici une *courbe*). Pour une fonction de *deux variables*, les dérivées

partielles indiquent les pentes au graphe de f selon certaines directions (le graphe est ici une *surface*). Plus précisément :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ est la pente au graphe de f en (x_0,y_0) suivant la direction de l'axe (Ox). En effet, cette pente est celle de la tangente à la courbe $z = f(x,y_0)$ et est donnée par la dérivée de $x \mapsto f(x,y_0)$ en x_0. C'est donc bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ est la pente au graphe de f en (x_0,y_0) suivant la direction de l'axe (Oy).
- Plus généralement, si v est un vecteur *unitaire* (*i.e.*, de norme 1) alors $D_v f(x_0,y_0)$ est la pente de la tangente suivant la direction v.
- Puisqu'en general, les dérivees partielles d'une fonction $f(x,y)$ sont aussi des fonctions de x et y, on pent les deriver partiellement une seconde fois par rapport a x et par rapport a y. On appelle ces derivees les secondes derivees partielles de f et on les note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} == f_{yy}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}.$$

Remark 99. *Pour une fonction réelle à une seule variable, la dérivabilité en un point garantit la continuité en ce point. En revanche, pour une fonction à plusieurs variables, l'existence des dérivées partielles en un point ne garantit pas la continuité en ce point !.*

5.4.2 Différentielle

La différentielle représente une méthode permettant d'unifier toutes les dérivées partielles au sein d'une seule fonction.

Pour une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ d'une seule variable, une autre façon d'écrire qu'elle est dérivable en x_0 est de vérifier qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\ell h}{h}=0.$$

Et on note ce ℓ par $f'(x_0)$, de sorte que l'on a $f(x_0+h)\simeq f(x_0)+f'(x_0).h$ (pour h réel, assez petit). Autrement dit, on approche l'application $h\mapsto f(x_0+h)-f(x_0)$ par une fonction linéaire $h\mapsto f'(x_0).h$.

Nous allons faire ce même travail en dimension supérieure.

Definition 100. *Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. La fonction f est différentiable en $x_0\in\mathbb{R}^n$ s'il existe une application linéaire*

$$\ell:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

telle que :

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\ell(h)}{\|h\|}=0.$$

L'application ℓ est la différentielle de f en x_0 et se note $\mathbf{d}f(x_0)$

Proposition 101. *Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est différentiable en $x_0\in\mathbb{R}^n$, alors ses dérivées partielles existent et on a :*

$$\mathbf{d}f(x_0)(h)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)+...+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0),$$

où $h=(h_1,...,h_n)$.

Remark 102. *En particulier, lorsqu'elle existe, la différentielle est unique.*

Example 5.8. *Étudier la différentiabilité en tout point de la fonction f définie par :*

$$f(x,y)=x-3y+\frac{x^4}{x^2+y^2}\ \textit{si}\ (x,y)\neq(0,0)\ \textit{et}\ f(0,0)=0.$$

En dehors de $(0,0)$, la fonction f est différentiable, car f est une somme, produit, inverse de fonctions différentiables (car x^2+y^2 ne s'annule qu'à l'origine). on étudions la différentiabilité en $(0,0)$.

Dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+h^2}{h}=1.$$

Dérivée partielle par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-3k}{k}=-3.$$

Le différentielle est

$$\ell(h,k)=h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h-3k$$

On aura

$$0\leq\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\ell(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h^4}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{h^4}{|h|^3}=|h|\to_{(h,k)\to(0,0)}0$$

Donc f est différentiable au point $(0,0)$ et $\mathbf{d}f(0,0)(h,k)=h-3k$.

5.5 Intégrale Double

Tout comme pour l'intégrale simple, on va se servir des fonctions étagées (lesquelles généralisent les fonctions en escalier) pour associer deux grandeurs à une fonction bornée. Si ces grandeurs sont égales, on dira que la fonction est intégrable. Pour cela, il nous faut définir les subdivisions d'un pavé.

Subdivision d'un pavé de $\mathbb{R}^2$

Soit f une fonction de deux variables définie et continue sur un pavé $[a,b]\times[c,d]$ de $\mathbb{R}^2$. Soient n et m deux entiers strictement positifs. On considère :

– Une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ et n sous-intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$, on écrit :

$$x_i=a+i\frac{b-a}{n},\ i=0,...,n,\qquad I_i=[x_i,x_{i+1}],\quad i=1,..,n$$

– Une subdivision de l'intervalle $[c,d]$ et m sous-intervalles de même longueur $\frac{d-c}{m}$, on écrit :

$$y_j=a+j\frac{d-c}{m},\ j=0,...,m,\qquad I_i=[x_j,x_{j+1}],\quad j=1,..,n$$

On en déduit une subdivision du rectangle $R = [a,b] \times [c,d]$ en nm sous-rectangles (cellules).

Definition 103. *(Fonctions étagées) Une fonction f est étagée sur $[a,b] \times [c,d]$ si elle est* ***bornée*** *sur $[a,b] \times [c,d]$, et s'il existe une subdivision S de $[a,b] \times [c,d]$ telle que f soit constante sur chacune des cellules de S. On dira qu'une telle subdivision est adaptée à f.*

Definition 104. *(Intégrale d'une fonction étagée sur un pavé). Soient Φ une fonction étagée sur $[a,b] \times [c,d]$ et S une subdivision adaptée. On note $\Phi_{i,j}$ la valeur de Φ sur chacune des nm cellules $P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [x_{j-1}, x_j]$ de S. On définit alors son intégrale sur $[a,b] \times [c,d]$, notée $\int \int_{[a,b]\times[c,d]} \Phi(x,y)\, dydx$*

$$\int \int_{[a,b]\times[c,d]} \Phi(x,y)\, dydx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1})\, \Phi_{ij}.$$

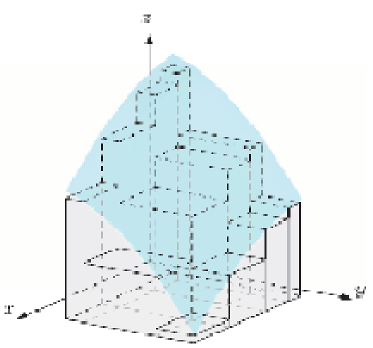
Intégrale d'une fonction intégrable sur un pavé

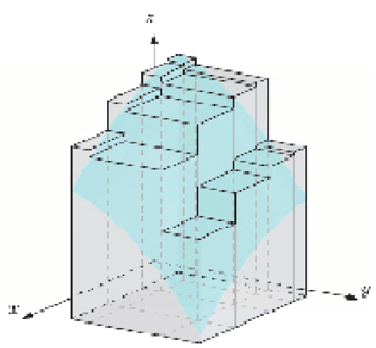
Definition 105. *(Intégrale d'une fonction sur un pavé). Soit f une fonction* ***bornée*** *sur $[a,b] \times [c,d]$. On note*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_-(f) &= \sup_{\Phi \text{ étagée sur } [a,b]\times[c,d]} \int \int_{[a,b]\times[c,d]} \Phi(x,y)\, dydx \qquad (\Phi \leq f) \text{ et} \\ \mathcal{I}_{-+}(f) &= \inf_{\Psi \text{ étagée sur } [a,b]\times[c,d]} \int \int_{[a,b]\times[c,d]} \Psi(x,y)\, dydx \qquad (\Psi \geq f). \end{aligned}$$

f est dite intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b] \times [c,d]$ ssi $\mathcal{I}_-(f) = \mathcal{I}_+(f)$, et l'on note alors

$$\int \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dydx = \mathcal{I}_-(f) = \mathcal{I}_+(f).$$





La proposition suivante montre que, comme dans le cas unidimensionnel, on retrouve ainsi toutes les fonctions continues.

Proposition 106. *Toute fonction continue sur* $[a,b] \times [c,d]$ *est Riemann intégrable sur* $[a,b] \times [c,d]$.

Calcul de Volume sur un pavé de $\mathbb{R}^2$

La méthode de base est donnée par Fubini consiste à intégrer sur les *tranches* correspondant aux interssections entres les droites qui forement le pavé $[a,b] \times [c,d]$. et la fonction f.

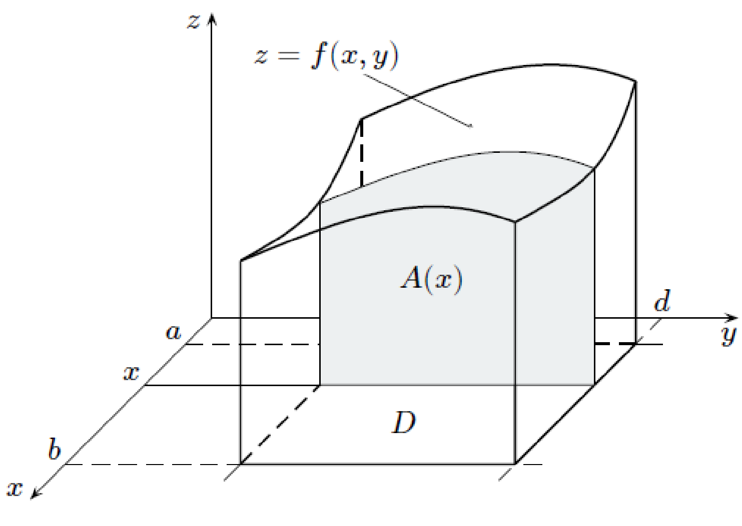
Le volume V sous la surface $z = f(x,y)$, où $f(x,y)$ est supposée continue, peut être calculé soit en intégrant d'abord sur y puis sur x soit en intégrant d'abord sur x puis sur y.

Intégration sur y puis sur x. On a

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \text{ avec } A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy,$$

donc

$$V = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

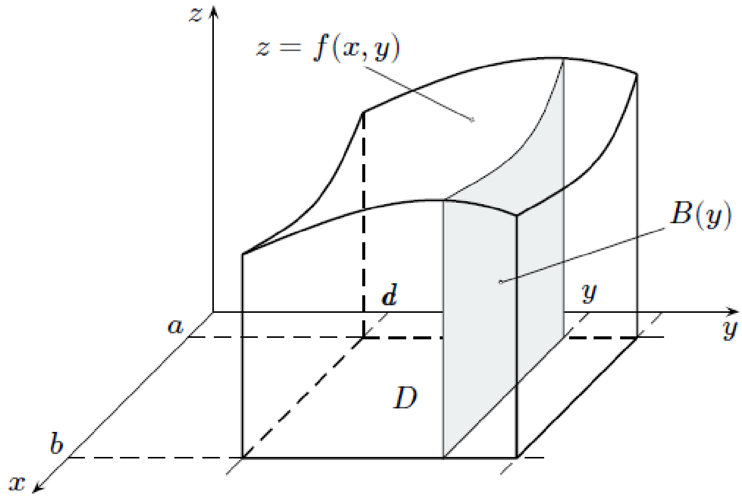


Intégration sur x puis sur y. On a

$$V = \int_c^d B(y)\,dy \text{ avec } B(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

donc

$$V = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx \right) dy,$$



Notations

On parle de l'intégrale (double) de $f(x, y)$ sur le pavé (rectangulaire) D et on note aussi :

$V = \int\int_D f(x, y)dxdy$ ou encore $V = \int\int_D f(x, y)ds$; où $ds = dxdy$ est l'élément d'aire

Proposition 107. *Soient* $f, g : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues*

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$\int\int_D (\alpha f + \beta g)(x, y)dxdy = \alpha \int\int_D f(x, y)dxdy + \beta \int\int_D g(x, y)dxdy.$$
- $$\left| \int\int_D f(x, y)dxdy \right| \leq \int\int_D |f(x, y)|\,.$$
- *Si* $f \geq 0$:
$$\begin{aligned} a) \int\int_D f(x, y)dxdy &\geq 0. \\ b) \int\int_D f(x, y)dxdy &= 0 \Leftrightarrow f = 0. \end{aligned}$$

- *Si* $f \geq g$

$$\begin{aligned} a) \int\int_D f(x,y)dxdy &\geq \int\int_D g(x,y)dxdy. \\ b) \int\int_D f(x,y)dxdy &= \int\int_D g(x,y)dxdy \Leftrightarrow f \equiv g. \end{aligned}$$

- $$Aire\ D = \int\int_D dxdy = (b-a)(d-c).$$

Proposition 108. *(Théorème de la moyenne) Soit*

$$f : D = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$$

une fonction continue. Alors, il existe au moins un élément (x_0, y_0) *de* D *pour lequel on a*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)Aire\ D.$$

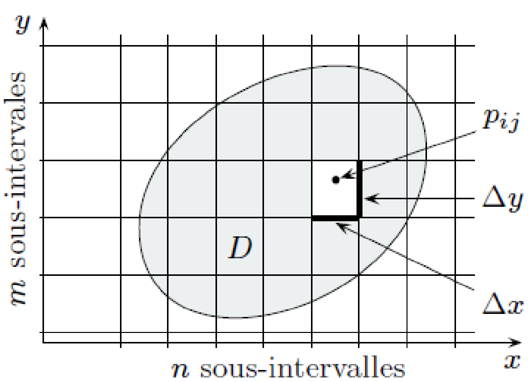
Fonction intégrable sur une partie bornée D de $\mathbb{R}^2$

Supposons que la fonction f est positive. Notons S le graphe de f au-dessus de D. Cette surface et les parallèles à Oz menées par les points de D limitent un domaine V dans $\mathbb{R}^3$

On définit les sommes de Riemann par :

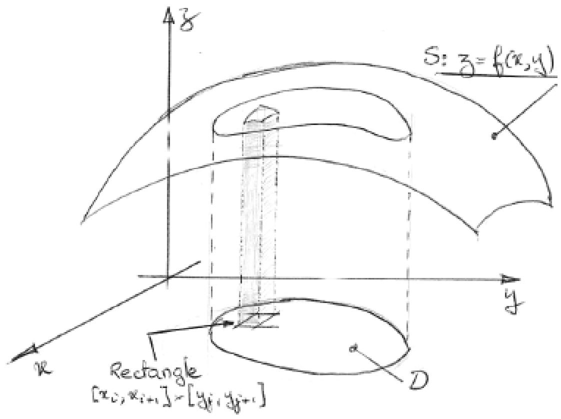
$$S_{n,m} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(p_{ij}) \Delta x \Delta y.$$

Si la limite existe, on l'appelle intégrale double de f sur le domaine D :



$$V = \int\int_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty, m\to\infty} S_{n,m}.$$

L'intégrale double $\int\int_D f(x,y)dxdy$ est le volume de ce domaine. En effet, le volume limité dans V par le rectangle $\Delta x \times \Delta y$ et les plans parallèles à Oz qui s'appuient sur D . (Voir le schéma ci dessous)



5.5.1 Calcul d'intégrale double (Théorème de Fubini)

Tout cela est assez théorique et ne permet pas, en pratique, le calcul d'une intégrale double. Il est en effet fort peu aisé de construire explicitement des fonctions étagées ayant les bonnes propriétés, et plus encore de chercher à évaluer leurs intégrales. On va plutôt, en pratique, se ramener à des calculs d'intégrales unidimensionnelles. On va en effet montrer qu'en général, une intégrale double peut être vue et calculée comme une intégrale d'intégrale.

On va commencer par examiner le cas où on intègre sur un pavé.

Calcul d'intégrale double sur un pavé

Proposition 109. *Soit f une fonction continue sur $D = [a,b] \times [c,d]$, alors on a*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

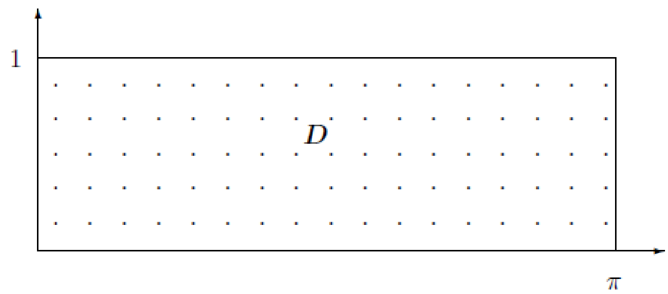
Remark 110. *Le calcul d'une intégrale double sur un pavé s'obtient par le calcul de deux intégrales simples.*

Un cas particulier important d'application de la proposition précédente est donné par le résultat suivant.

Proposition 111. *Si f et g sont deux fonctions intégrables respectivement sur $[a,b]$ et $[c,d]$, la fonction h définie sur $D=[a,b]\times[c,d]$ par $h(x,y)=f(x)\,g(y)$ est intégrable sur $D=[a,b]\times[c,d]$ et*

$$\int\int_D h(x,y)dxdy=\int_a^b f(x)\,dx\int_c^d g(y)\,dy.$$

Example 5.9. *Calculer $I=\int\int_D f(x,y)dxdy$, où D est le rectangle de sommets O, $A(\pi,0)$, $B(0,1)$, $C(\pi,1)$ et $f(x,y)=2y\sin x$.*



Comme on intégre sur un rectangle une fonction dont les variables se séparent, on a immédiatement

$$I=\int\int_D 2y\sin x dxdy=\int_0^\pi \sin x dx\int_0^1 2ydy=-\cos x|_0^\pi\times y^2\big|_0^1=2.$$

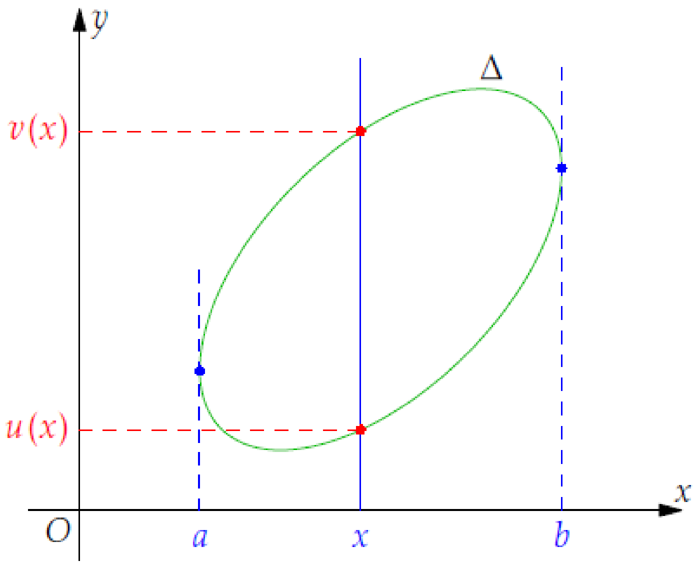
Fonction intégrable sur une partie bornée D de $\mathbb{R}^2$

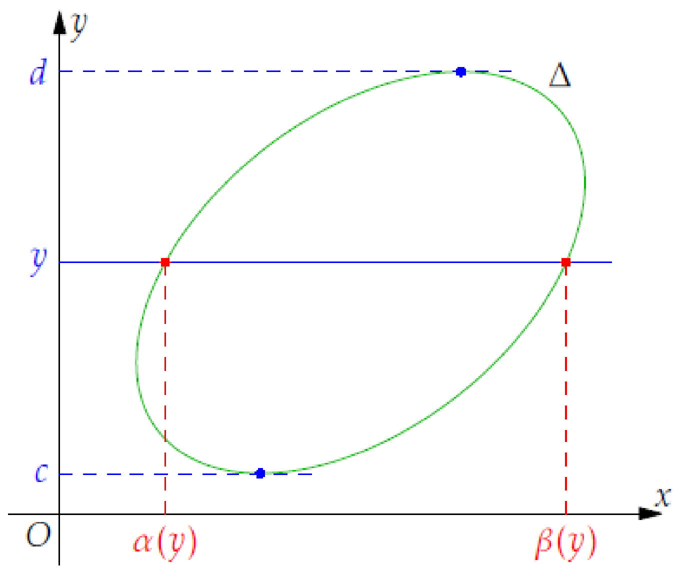
Puisque l'intégrale sur une partie bornée D se ramène à une intégrale sur au moins un demi pavé, les propositions précédentes doivent aussi permettre le calcul effectif pour l'intégrale sur D. On ne va pas traiter le cas le plus général, mais, dans la pratique, on pourra toujours se ramener à la proposition suivante.

Proposition 112. *Soit f une fonction continue sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale double $\int\int_D h(x,y)dxdy$ se calcule par l'une des deux méthodes suivante*

$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/u(x)\le y\le v(x),a\le x\le b\}$, *alors* $\int\int_D h(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right]dx$,

$D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\alpha(y)\le x\le\beta(y),c\le y\le d\}$, *alors* $\int\int_D h(x,y)dxdy==\int_c^d\left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right]dy$





Example 5.10. *(Calcul de l'aire du disque unité).*

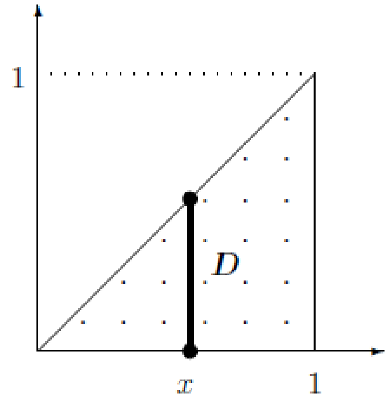
On considère le disque unité $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$. *On peut écrire*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [-1, 1] \ \ et \ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq +\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

D'après le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned}\int\int_D 1dxdy &= \int_{-1}^{+1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy\right)dx = \int_{-1}^{+1} 2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi} 2\sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 2\sin^2\theta d\theta = \pi\end{aligned}$$

Example 5.11. *Calculer* $I = \int\int_D f(x,y)dxdy$, *où* D *est le rectangle de sommets* O, $A(1,0)$, $B(1,1)$ *et* $f(x,y) = x - y$



La droite (OB) a pour équation $y = x$.

Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à x. Donc

$$I(x) = \int_0^x (x-y)\,dy = \left[-\frac{(x-y)^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^2}{2}.$$

On a alors

$$I = \int_0^1 I(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

5.5.2 Changement de variable

Soit (u,v) un couple de variables calculées à partir de (x,y) , c'est à dire que u et v sont des fonctions de (x,y) . Pour qu'un tel changement de variable soit correct, il faut évidemment que u et v soient des fonctions à dérivées continues et que chaque couple de valeurs pour (x,y) corresponde à un couple unique de valeurs pour (u,v) et réciproquement c'est à dire que le changement de variable doit être bijectif (C^1-difféomorphism).

On appelle déterminant Jacobien du changement de variables $(x,y) \to (u,v)$ le déterminant, noté $\mathbf{J}(x,y)$ tel que

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Theorem 113. *Soit f est une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$et φ est un C^1-difféomorphisme de Δ dans D on a*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(\varphi(u,v))\left|\mathbf{J}(x,y)\right| dudv.$$

Changement de variables en coordonnées polaires

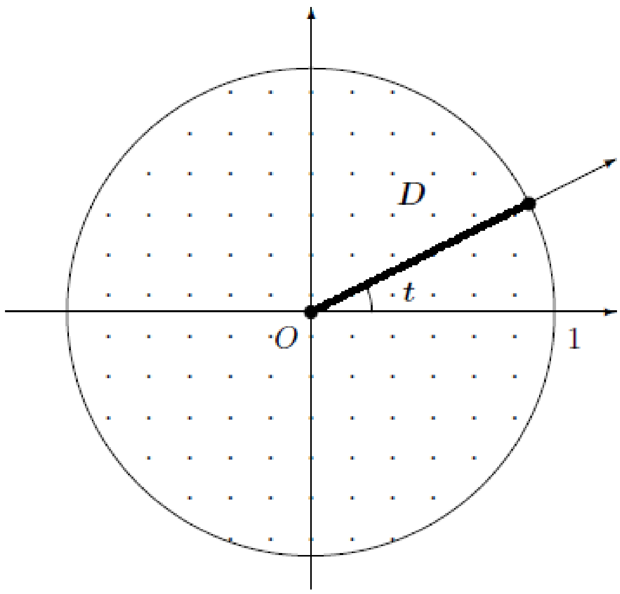
Soit f est une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$(x,y) \in D \Leftrightarrow (\rho,\theta) \in \Delta$, et $f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et on aura

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho d\rho d\theta.$$

Example 5.12. *Calculer $I = \int\int_D f(x,y)dxdy$, où D est le disque de centre O et de rayon 1 et $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^2+1)^2}$.*



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r, t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [0,1] \times [-\pi,\pi]$$

D'autre part

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{(1+r^2)^2} = \frac{r^2(1+\sin 2\theta)}{(1+r^2)^2}$$

Donc

$$I = \int\int_{\Delta} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)|\mathbf{J}|\, dr d\theta = \int\int_{\Delta} \frac{r^3\left(1+\sin 2\theta\right)}{\left(1+r^2\right)^2} dr d\theta$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^1 \frac{r^3}{\left(1+r^2\right)^2} dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\sin 2\theta\right) d\theta\right)$$

En effectuant le changement de variable $u = r^2$, on a $du = 2rdr$ donc

$$\int_0^1 \frac{r^3}{\left(1+r^2\right)^2} dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{\left(1+u\right)^2} du = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{\left(1+u\right)^2}\right) du$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{r^3}{\left(1+r^2\right)^2} dr = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+u\right) + \frac{1}{1+u}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ln\left(2\right) - \frac{1}{2}\right]$$

Par ailleurs

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\sin 2\theta\right) d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

d'où

$$I = \pi\left[\ln\left(2\right) - \frac{1}{2}\right].$$

5.6 Intégrales triples

Soit A une partie fermée et bornée ($i.e$ compacte) de $\mathbb{R}^3$et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale triple $\mathbf{I} = \int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$ se définit de façon analogue aux intégrales doubles, et se calcule par intégrations successives.

5.6.1 Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$

Le théorème de Fubini permet de ramener le calcul d'une intégrale triple à celui d'intégrae double et en suite aux intégrales simples.

Sur un parallélépipède

- Cas où A est un pavé de $\mathbb{R}^3$, $A = [a,a'] \times [b,b'] \times [c,c']$

$$\mathbf{I} = \int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_a^{a'}\left(\int_b^{b'}\left(\int_c^{c'} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx$$

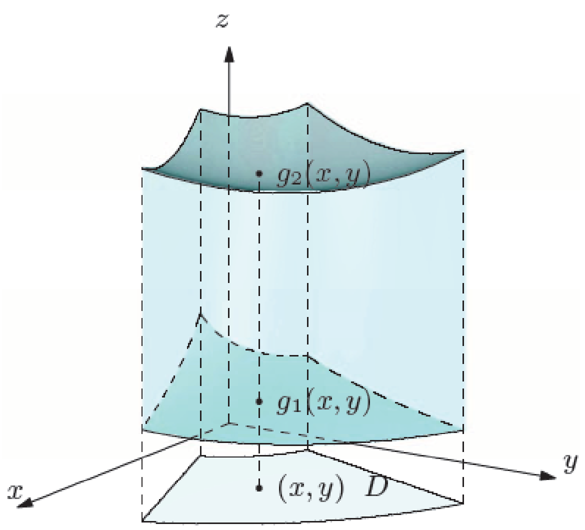
Example 5.13. *Calculer* $\mathbf{I} = \int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz$; *où* $A = [0,1] \times [-1,2] \times [0,2]$ *et* $f(x,y,z) = xyz$

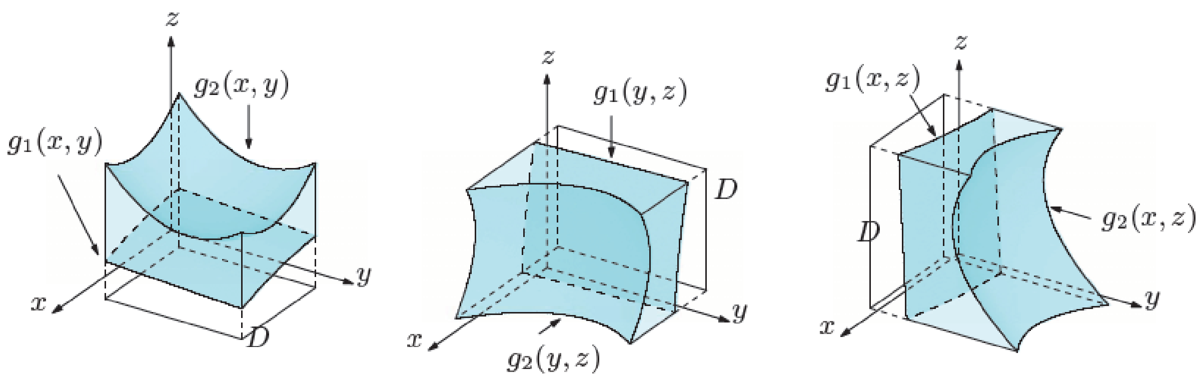
$$\mathbf{I} = \int\int\int_A (xyz)\, dxdydz = \int_0^2 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 [xyz]\, dx\right) dy\right) dz = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_{-1}^2 [yz]\, dy\right) dz = \frac{3}{4}\int_0^2 zdz = \frac{3}{2}.$$

Sur un domaine fermé et borné de $\mathbb{R}^3$

- Cas où $A : (x,y) \in \mathcal{D},\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)$ avec $\mathcal{D}$ un compact de $\mathbb{R}^2$ et $g_1, g_2 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ continues

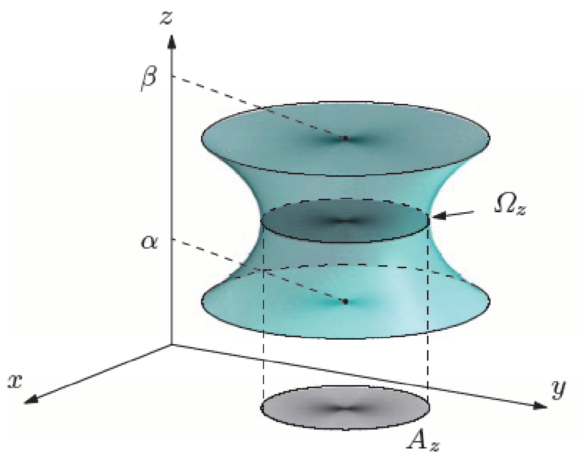
$$\mathbf{I} = \int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int\int_{\mathcal{D}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dxdy.$$





Cas où $A : \alpha \leq z \leq \beta$, $(x,y) \in \mathcal{A}_z$, et pour tout $z \in [\alpha, \beta]$, $\mathcal{A}_z$ un compact de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{I} = \int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int\int_{\mathcal{A}_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz.$$



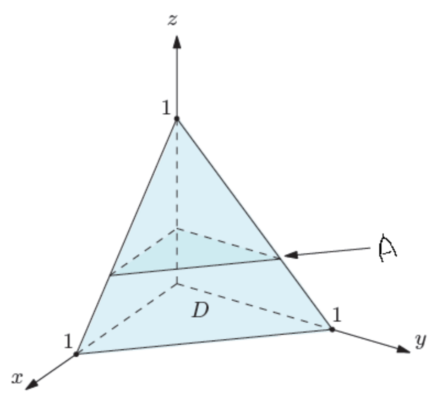
Example 5.14. *On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'intérieur du tétraèdre limité par les plans $x = 0, y = 0, z = 0$ et $x + y + z = 1$:*

Calculer

$$\mathbf{I} = \int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz, \quad f(x,y,z) = x.$$

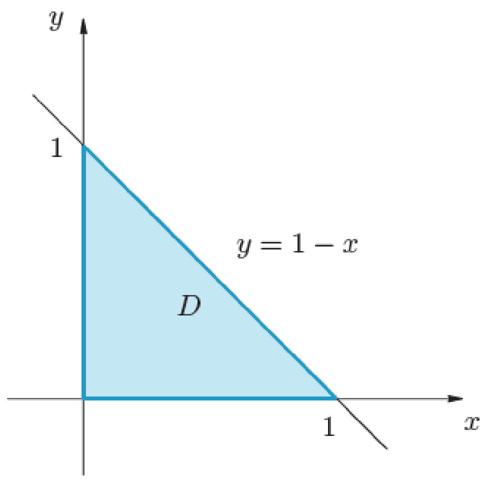
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ (x,y) \in \mathcal{D}, \ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

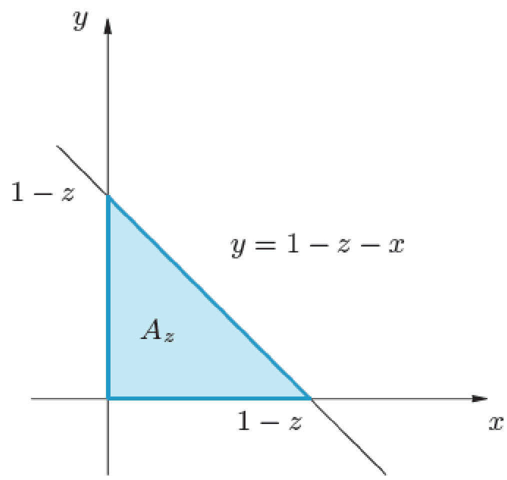
Où : $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ 0 \leq x \leq 1 \ \text{et} \ 0 \leq y \leq 1 - x\}$.



$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \iiint\limits_{A} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{A} xdxdydz = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\int_0^{1-x-y} (xdz)\right) dydz \\
&= \iint\limits_{\mathcal{D}} (x(1-x-y))\,dydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x(1-x-y))\,dy\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,xdx = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Ou encore, si l'on choisis z entre 0 et 1 la section de niveau z, notée $\mathcal{D}_z$, du plan d'équation $Z = z$ et du domaine D (voir la figure). On obtient :





$\mathrm{A}_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1-z \text{ et } 0 \leq y \prec 1-z-x\}$.(5.0)

Ceci nous donne :

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \left(\iint\limits_{\mathcal{D}_z} f(x,y,z)\,dxdy\right) dz = \int_0^1 \mathbf{I}(\mathbf{z})\,dz$$

Où $\mathbf{I}(\mathbf{z})$ est une intégrale double sur $\mathcal{D}_z.\mathbf{I}(\mathbf{z}) = \iint\limits_{\mathcal{D}_z} xyzdxdy$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(\mathbf{z}) &= \int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-y-z} xdx\right) dy = \int_0^{1-z} \left(\frac{(1-y-z)^2}{2}\right) dy = \frac{1}{2}\int_0^{1-z} (1-y-z)^2\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1-z} (1-z-y)^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{1-z} \left[(1-z)^2 - 2(1-z)\,y + y^2\right] dy \\
&= \frac{1}{2}\left[(1-z)^2\,y - 2(1-z)\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-z} = \frac{1}{6}(1-z)^3
\end{aligned}$$

et par suite

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \mathbf{I}(\mathbf{z})\,dz = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-z)^3\,dz = \frac{1}{24}.$$

5.6.2 Changement de variables

Soit $\triangle$ et $\mathcal{A}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et

$$\varphi : \begin{cases} \triangle \to \mathcal{A} \\ (u,v,w) \mapsto (x,y,z) \end{cases}$$

un $\mathcal{C}^1-$ difféomorphisme de $\triangle$ sur $\mathcal{A}$. La matrice Jacobienne de φ au point (u,v,w) est donc :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Soit $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ continue, alors on a

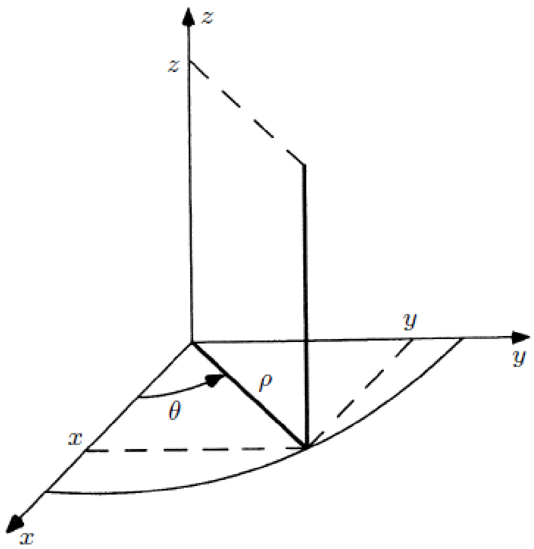
$$\int\int\int_{\mathcal{A}} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_{\triangle} (f\circ\varphi)(u,v,w)\,|J_\varphi|\,dudvdw.$$

5.6.3 Coordonnées cylindriques

Dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le domaine étudié présente une symétrie autour d'un axe.

Les coordonnées cylindriques d'un point $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \\ (\rho,\theta,z) \mapsto & (x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \end{array}$$



La matrice Jacobienne de φ est donnée par :

$$J_\varphi(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $|J_\varphi(\rho,\theta,z)| = \rho$ et

$$\int\int\int_{\mathcal{A}} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_{\triangle} f(\rho,\theta,z)\,|J_\varphi|\,d\rho d\theta dz.$$

Example 5.15. *Calculer le volume d'un cylindre de* $\mathcal{A} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \le 1 \ \textit{et}\ 0 \le z \le 1\}$.

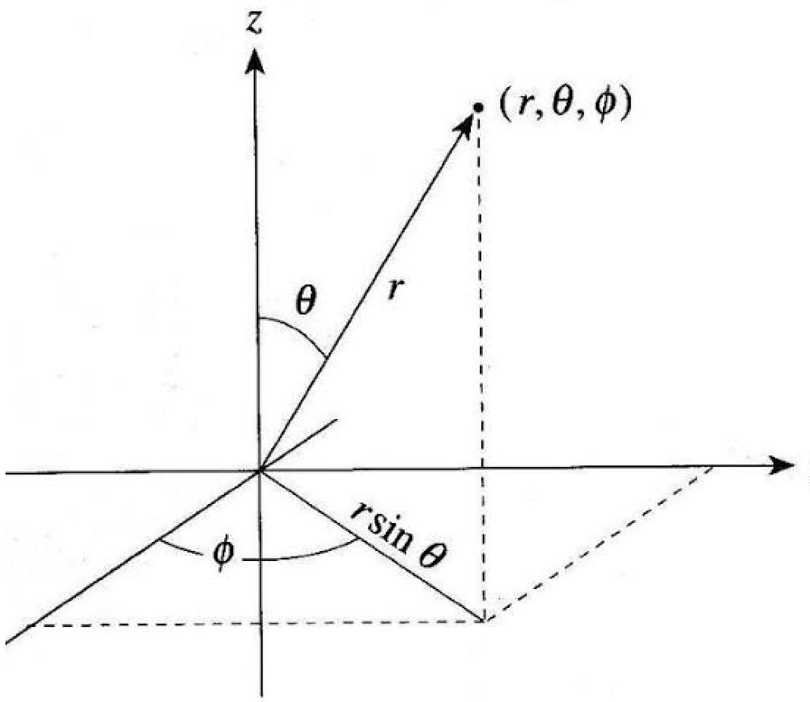
On utilise le changement de variables en coordonnées cylindriques. On a

$x^2+y^2 \le 1 \Leftrightarrow (\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 \le 1 \Leftrightarrow \rho^2 \le 1 \Rightarrow \rho \le 1$ *et on aura* $0 \le \rho \le 1$ *de plus* $0 \le \theta \le 2\pi$ *et comme* $0 \le z \le 1$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\int\int\int_{\mathcal{A}} 1.dxdydz &= \int\int\int_{\triangle} 1.d\rho d\theta dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\rho d\rho\right) dz \\ &= \left(\int_0^1 \rho d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\int_0^1 dz = \frac{1}{2}\times 2\pi \times 1 = \pi\end{aligned}$$

5.6.4 Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques d'un point $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables



$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times [0, \pi[& \to \mathbb{R}^3 \\ (\rho, \theta, z) \mapsto & (x, y, z) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) \end{array}$$

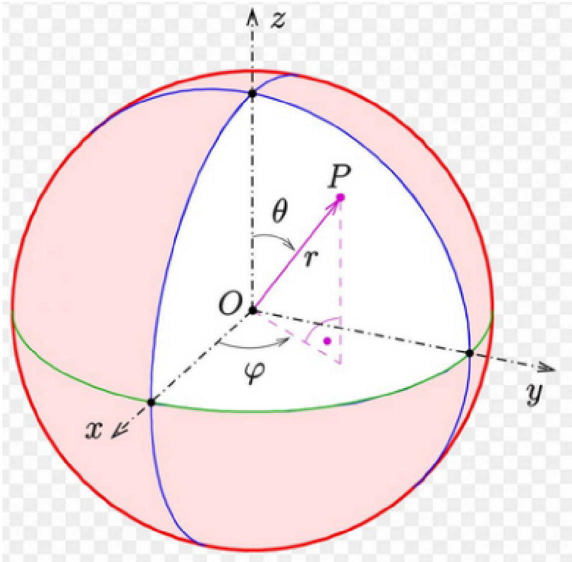
La matrice Jacobienne de φ est donnée par :

$$J_\varphi (r, \phi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi & r \sin\theta \cos\phi & r \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta & 0 & -r \sin\theta \end{pmatrix}$$

donc $|J_\varphi (\rho, \theta, z)| = r^2 \sin\theta$ et

$$\int\int\int_{\mathcal{A}} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\int\int_{\triangle} f(r, \phi, \theta) |J_\varphi|\, drd\phi d\theta.$$

Example 5.16. *Calculer le volume d'une sphère centré au point O et de rayon R.*



$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

En utilisant les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \text{ avec } |J_\varphi(\rho, \theta, z)| = r^2 \sin\theta$$

On a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\leq R^2 \Leftrightarrow (r\sin\theta\cos\phi)^2 + (r\sin\theta\sin\phi)^2 + (r\cos\theta)^2 \leq R \\ &\Leftrightarrow r^2\sin\theta^2 + r^2\cos\theta^2 \leq R \Leftrightarrow r^2 \leq R^2 \Rightarrow r \leq R, \end{aligned}$$

par suite $0 \leq r \leq R$.

$$\begin{aligned} \int\int\int_{\mathcal{A}} 1dxdydz &= \int\int\int_{\triangle} |J_\varphi|\, drd\theta d\phi = \int\int\int_{\triangle} r^2 \sin\theta drd\theta d\phi = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \\ &= \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R \times [2\pi] \times -\cos\theta|_0^{\pi} = \frac{R^3}{3} \times 2\pi\left[-\cos(\pi) + \cos(0)\right] = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

5.7 Feuille de TD

Exercise 114. *Trouver les limites suivantes*

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^4}{x + y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3 + 2x^2y - xy - 2y^2}{x + 2y}$$

Exercise 115. *Montrer que la limite*

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

n'existe pas.

Exercise 116. *Etudier la contininite de la fonction :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

Exercise 117.

Calculer $\mathbf{I} = \int\int_D f(x,y)\,dxdy$

D est le triangle de sommets O, $A(1,0), B(0,1)$ et $f(x,y) = x^2y$.

D est le triangle de sommets $A(1,0), B(0,1), C(0,-1)$ et $f(x,y) = x+2y$.

D est l'ensemble des points du plan limité par les cercles d'équations $x^2+y^2 = 1$ et $(x-1)^2+(y-1)^2 = 1$ et $f(x,y) = xy$).

D est la couronne limitée par les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b ($0 < a < b$) et $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

Exercise 118. *a) Calculer* $\mathbf{I} = \int\int_D f(x,y)\,dxdy$

- $D = \left\{(x,y)\ ,0 \leq x \leq \sin y,\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ et $f(x,y) = x\cos y$
- D est le triangle de sommets $O, A(1,1), B(2,-1)$ et $f(x,y) = (x+2y)^2$

- D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon1, tels que $x+y \geq 1$ et $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$
- D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, tels que $0 \leq y \leq x$ et $f(x,y) = 2x-y$
- D est l'intérieur du quart d'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($a \succ 0$ et $b \succ 0$) situé dans le quart de plan des coordonnées positives,et $f(x,y) = xy$.

b) Calculer $\mathbf{I} = \int\int\int_A f(x,y,z)\,dxdydz$

- $\mathcal{A}$ est le domaine limité par les plans d'équation $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ et $f(x, y, z) = \exp(x + y + z)$
- $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \prec z \leq b, 0 \prec (x^2+y^2 \leq 2ax\}$,où $a \succ 0$, et $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- $\mathcal{A}$ est la sphère de centre O et de rayon R, et

f(x,y,z)=x$^2 + y^2 + z^2$.

b) Calculer $\mathbf{I} = \int\int\int_{A} f(x, y, z)\, dxdydz$

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \mathcal{D},\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$ et $f(x, y, z) = x$.
- $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1\}$ et $f(x, y, z) = 1$.
- $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ et $f(x, y, z) = 1$.

Bibliographie

[1] K. Allab, Eléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle. Office des publications universitaires, (1986).

[2] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Exercices d'analyse 1er Cycle, 1er Année de Mathématiques Supérieurs, Librairie Armand Colin(1977).

[3] D. Degrave, C. Degrave, H. Muller, Précis de mathématiques, Analyse- première année, Bréal, Rosny 2003.

[4] J. M. Monier, ANALYSE MPSI / Cours, méthodes et exercices corrigé s, 5e édition. Dunod, Paris, 2006.

[5] N. Piskounov, Calcul differéntiel et Intégral - Tome 1,2, Moscou : Editions Mir 1987.