Université de Jijel

Département de Mathématiques

3ième Année Licence

TD Séries de Fourier

Exercice 1

a. Démontrer que :

$$\int_{-L}^{L} sin(\frac{k\pi x}{L})\ dx \ = \ 0 \text{ pour } k = 1, 2, 3, ...$$

et

$$\int_{-L}^{L} cos(\frac{k\pi x}{L})\ dx \ = \ 0 \text{ pour } k = 1, 2, 3, ...$$

b. Démontrer que :

$$\int_{-L}^{L} cos(\frac{m\pi x}{L})cos(\frac{n\pi x}{L})\ dx \ = \ L \text{ si } m = n; \ = 0 \text{ sinon}$$

et

$$\int_{-L}^{L} sin(\frac{m\pi x}{L})sin(\frac{n\pi x}{L})\ dx \ = \ L \text{ si } m = n; \ = 0 \text{ sinon}$$

$(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

A toutes fins utiles, on rappelle les formules de trigonométrie suivantes :
$cosA\ cosB = \frac{1}{2}(cos(A-B) + cos(A+B))$
et $sinA\ sinB = \frac{1}{2}(cos(A-B) - cos(A+B))$

Exercice 2

Développer en série de Fourier la fonction "créneau" 2π-périodique : $f(x) = -1$ pour $x \in]-\pi, 0[$; $f(x) = +1$ pour $x \in [0, \pi]$.

Quelle est la valeur de la série en $x = 0$?

Exercice 3

On considère la fonction $f(x)$, 2π-périodique :
$f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, +\pi]$.

1. Développer en série de Fourier la fonction f.

2. En déduire les sommes des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Indice. Utiliser soit l'égalité de Parseval soit une valeur de Série calculée.

Exercice 4

1. Trouver les coefficients de Fourier correspondant à la fonction périodique de période 10 définie par : $f(x) = 0$ si $x \in]-5, 0[$ et $f(x) = 3$ si $x \in]0, 5[$.

2. Ecrire la série de Fourier correspondante.

3. Comment doit être définie la fonction $f(x)$ aux points $x = -5$, $x = 0$ et $x = 5$ pour que la série de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [-5, 5]$?

Exercice 5

1. Soit f la fonction impaire et 2π-périodique telle que : $f(x) = (\pi - x)$ pour $x \in [0, \pi[$.
a) Tracer le graphe de f.
b) Calculer la série de Fourier $S(x)$ de f.

2. Calculer $S(\pi/2)$ en utilisant le théorème de Dirichlet.

3. En utilisant le résultat de la question 2), calculer la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$$

Université de Jijel

Département de Mathématiques

3ième Année Licence

TD Transformées de Fourier

NB. Commencer par refaire tous les petits calculs présents dans le cours.

Exercice 1. Fonction porte et valeur de $\int \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$

1. Soit la fonction $\Pi_a(t)$ définie par :
$\Pi_a(t) = 1$ pour $|t| < a$, $\Pi_a(t) = 0$ sinon.
a) Tracer le graphe de Π_a.
b) Calculer sa transformée de Fourier $\hat{\Pi}_a$.
c) Tracer le graphe de sa transformée $\hat{\Pi}_a$.

2. Déduire du théorème de Plancherel-Parseval, la valeur de l'intégrale de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

Exercice 2. Transformée de Fourier d'un signal élémentaire.

On considère le signal suivant : $f(t) = (1 - 2|t|)\Pi(t)$,
où $\Pi(t)$ est la fonction porte d'amplitude 1 et de largeur 1. (Avec les notations de l'exercice précédent, on aurait : $a = \frac{1}{2}$).
a) Tracer le graphe de f.
b) Calculer sa transformée de Fourier $\hat{f}$.
c) Tracer le graphe de sa transformée $\hat{f}$.

Exercice 3. Transformée de Fourier et valeur d'une intégrale.

1. En effectuant un calcul de transformée de Fourier inverse de la fonction porte de "largeur" T, calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{sin(u\frac{T}{2})cos(ux)}{u} du$$

selon les valeurs de x.

2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin(z)}{z} dz$$

Exercice 4. Transformée de Fourier d'une Lorentzienne.

Une Lorentzienne est une fonction de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{b^2 + x^2}$$

Une telle fonction décrit notamment un certain type de spectre de lumière; aussi en mathématiques cela constitue la densité de probabilité de la loi dite de Cauchy.
On suppose $b > 0$.

1) a) Tracer le graphe de f.
b) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\exp(-b|x|)$.

2) On rappelle la propriete suivante de la T.F. : $\mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x)\ \forall x$.

a) Déduire de la question 1 et de la propriété ci-dessus la transforméée de Fourier $\hat{f}$ de cette Lorentzienne.

b) Tracer le graphe de la transformée $\hat{f}$ de cette Lorentzienne.