Département de Mathématiques.
Université de Jijel.

Module : Introduction à la topologie

TD n° 1.

① Soit $E=\{a,b,c,d,e\}$ et $\tau=\{\phi, E, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$

Vérifier que (E,τ) est un espace topologique, et déterminer tous les fermés.

Donner d'autres topologies "plus fine" et "moins fine" sur E.

Trouver dans τ, des ensembles qui sont ouverts et fermés et des ensembles ni ouverts ni fermés.

② Topologie usuelle de $\mathbb{R}$:

Soit $I \subset \mathbb{R}$. I est un intervalle si

$$\forall x,y \in I,\ \forall z \in \mathbb{R} \text{ tq } x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in I$$

Un intervalle centré en $x_0 \in \mathbb{R}$ et de rayon $r>0$ est de la forme $]x_0-r, x_0+r[$.

Soit $\tau_{\mathbb{R}}=\{A \subset \mathbb{R},\ \forall x \in A\ \exists h>0 :]x-h, x+h[\subset A\} \cup \{\phi\}$

Montrer que $\tau_{\mathbb{R}}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée topologie usuelle.

- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est-il ouvert ?
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ est-il fermé ?

Université de Jijel - Département de Mathématiques

2ᵉ année

Topologie

TD n° 02.

① Soit X un ensemble non vide, et soit

$$\tau_{cf} = \phi \cup \{A \subset X : \complement_X^A \text{ est fini}\}.$$

Montrer que τ_{cf} est une topologie sur X, appelée topologie co-finie. Décrire les ensembles fermés si X est fini.

② Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. $\tau = \{\phi, X, \{1\}, \{4\}, \{1, 4\}\}$

Calculer $\mathcal{V}(1)$, $\mathcal{V}(2)$, $\mathcal{V}(\{1, 4\})$

Donner une base pour τ.

③ Soit (X, τ) un espace topologique, $f : X \longrightarrow Y$

Y un ensemble quelconque, et soit

$$\theta = \{B \subset Y ; f^{-1}(B) \in \tau\}$$

Montrer que θ est une topologie sur Y et décrire les ensembles fermés de (Y, θ).

De même, si (Y, τ_Y) est un espace topologique, montrer que $\tau_X = \{f^{-1}(B), B \in \tau_Y\}$ est une topologie sur X.

Topologie TD n° 3.

Exercice 1 : Soit (X, τ) un espace topologique, $A, B \subset X$.

Montrer que :

1- $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ $\quad \mathring{A} \subset \mathring{B}$

2- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\quad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

3- $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ $\quad \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$

si $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \phi$ alors $\overset{\circ}{\overline{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

4- $\overline{A^c} = (A^\circ)^c$ $\quad (\bar{A})^c = \overset{\circ}{A^c}$

5- On rappelle que la frontière de A est définie par $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Montrer que

(i) $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

(ii) $x \in Fr(A) \iff \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \phi$ et $V \cap A^c \neq \phi$

(iii) $Fr(\mathring{A}) \subset Fr(A) \supset Fr(\bar{A})$

(iv) $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

Exercice 2 :

Si A est un ouvert de (X, τ) et $A \cap B = \phi$, montrer que $A \cap \bar{B} = \phi$ mais $\bar{A} \cap B$ n'est pas nécessairement vide.

Flavien

Topologie – TD n° 4

Université ...

① On note $u(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $v(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$

Calculer $u(A)$ et $v(A)$ lorsque (E, τ) est l'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $A =]0,1] \cup \{2\} \cup]3,5[$

Comparer $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $u(A)$ et $v(A)$, et montrer que

$u^2(A) = u(A)$ et $v^2(A) = v(A)$.

② (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$

– Montrer que $\overset{\circ}{A} \cap Fr(A) = \phi$

$Fr(A) = Fr(A^c)$

– Si A est ouvert (ou fermé) alors $\overset{\circ}{\overline{Fr(A)}} = \phi$.

③ Soit f et g deux fonctions continues sur un espace topologique (E, τ) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

– Montrer que l'ensemble

$A = \{x \in E : 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert

et $B = \{x \in E : f(x) \leq g(x)\}$ est fermé

Si f et g sont continues de (E, τ) dans (Y, τ') avec Y séparé, montrer que

$C = \{x \in E : f(x) = f(y)\}$ est fermé

Département de Mathématiques Université de Jijel

Topologie TD n° 5

① Soit E un espace topologique, F un sous espace de E muni de la topologie induite et $A \subset F$.
On note $\overline{A}^F$ l'adhérence de A dans F et $\bar{A}$ dans E,
Montrer que $\overline{A}^F = \bar{A} \cap F$
On note $(\mathring{A})^F$ l'intérieur de A dans F, montrer que
$\mathring{A} \subset (\mathring{A})^F$.

② Si (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2) sont deux espaces topologiques séparés, montrer que l'espace topologique produit $X_1 \times X_2$ est séparé.

③ X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$
Supposons que $X = A \cup B$.
1- Montrer que si f est continue alors $f/_A$ et $f/_B$ continues (A et B munis de la topologie induite).
La réciproque est-elle vraie ?
2- Montrer que si A et B sont ouverts (ou fermés), alors la réciproque est vraie.
($f/_A$ et $f/_B$ continues $\Rightarrow$ f continue sur X)

Département de Mathématique Université de Jijel

TD n° 06 Topologie

① 1_ Montrer que l'application $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tq
$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \quad \forall\, x,y \text{ de } \mathbb{R}$$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

2_ $X =]0,+\infty[$, on pose $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ pour $x,y \in X$

Montrer que d est une distance sur X et determiner $B(1,1)$.

$A =]0,1]$, est ce que A est borné, fermé ?

Comment s'ecrit une boule ouverte (pour cette distance) ?

II 1_ Soit A et B deux parties d'un espace métrique. Si A est ouvert et $A\cap B = \phi$, montrer que $A\cap \overline{B} = \phi$.

2_ A et B deux parties d'un espace metrique X tel que $\inf\{d(a,b) : a\in A,\ b\in B\} > 0$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de X tq : $A\subset U$, $B\subset V$ et $U\cap V = \phi$

III. Soit (E,d) un espace métrique et $A\subset E$, montrer que $\forall\, x,y \in E$ on a $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

En déduire que $x \longmapsto d(x,A)$ est continue.

IV. (X,d) un espace métrique et A une partie non vide de X, $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y),\ x,y\in A\}$ le diamètre de A.

Montrer :
1_ $\mathrm{diam}(A) = 0 \iff A$ contient au plus un point.
2_ $A\subset B \Rightarrow \mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(B)$.
3_ $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$.
4_ $\mathrm{diam}(A\cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$ si $A\cap B \neq \phi$

Département de Mathématiques Université de Jijel

TD n° 07 Topologie.

① Soit (X,d) un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite dans X

a- Montrer que si $(x_n)_n$ est de Cauchy, alors $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1},x_n)=0$

b- Donner un exemple pour montrer que l'inverse est faux.

c- Montrer qu'une suite de Cauchy $(x_n)_n$ converge si et seulement si elle admet une sous suite convergente.

d. Si $(x_n)_n$ est une suite telle que la série $\sum\limits_{n\geq 1} d(x_n,x_{n+1}) < \infty$ (est convergente), montrer que $(x_n)_n$ est de Cauchy

② Soit $X =]0,+\infty[\subset \mathbb{R}$, pour tout x et y de X, on note

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

d est une distance sur X (voir ex 2, série 6), Est ce que (X,d) est complet ?.

③ Soit (X,d) un espace métrique, $A \subset X$.

a- Montrer que ;

A complet $\Rightarrow$ A fermé.

b- Montrer que

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ fermé} \\ X \text{ complet} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ complet}.$$