Primitives

Définition 0.0.1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I (I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$). S'il existe une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, on dit que F est* ***une primitive*** *de f sur I.*

Par exemple, pour la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x$, il suffit de prendre la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x^2$, on a bien $F'(x) = 2x = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On appelle F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2 + \frac{3}{5}$ est aussi une primitive. En fait, il y on a une infinité, c'est toutes les fonctions $x \mapsto x^2 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. De même, la fonction $x \mapsto \cos x - 1$ admet comme primitives les fonctions $x \mapsto \sin x - x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

• On note les primitives de f par $\int f(x)dx$ ou $\int f(t)dt$ ou $\int f(u)du$ (les lettres x, t, u, ... sont des lettres dites muettes, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter les primitives simplement par $\int f$, et on dit aussi "**intégrale indéfinie**".

• $\int f(x)dx$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

• Trouver une primitive est l'opération inverse de dérivation.

• Certaines fonctions n'admettent aucune primitive.

• Une primitive, si elle existe, n'est pas unique, en effet, si F est une primitive de f sur I alors toute fonction $x \longmapsto F(x) + c$, où c est une constante réelle quelconque, est aussi une primitive de f. Et toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où c est une constante réelle.

• Toute fonction continue sur un intervalle admet au moins une (et donc une infinité de) primitive sur cet intervalle (ThÃ©orÃ¨me). La continuité est une condition suffisante pour l'existence de primitive.

• Mais il existe des fonctions qui ne sont pas continues mais elles admettent des primitives (TD). La continuité est donc une condition pas nécessaire.

A partir des propriétés de dérivation on en déduit des propriétés pour les primitives :

Proposition 0.0.1. *Si F est une primitive de f, et G une primitive de g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$. Et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors αF est une primitive de αf. i.e. pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Comment trouver l'expression d'une primitive ?

• **Par calcul direct :** en faisant apparaitre, si c'est possible, une dérivée usuelle. Par exemple,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx = 2.\int \frac{1}{2\sqrt{x+3}}dx = 2.\sqrt{x+3}+c,\ \textit{tel que}\ c\in\mathbb{R}\ \ \textit{car}\ (\sqrt{x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+c,\ \textit{tel que}\ c\in\mathbb{R}\ \ \textit{car}\ (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}dx = \int(\sqrt{x^2+3})'dx = \sqrt{x^2+3}+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

$$\int \cos x\sin x dx = \frac{1}{2}\int 2\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int(\sin^2 x)'dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

• Intégration par parties :

Soient $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 $\big($dérivables à dérivées continues$\big)$ sur $[a,b]$. Alors,

$$\boxed{\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x)u'(x)dx.}$$

En effet,

$$\big(u(x).v(x)\big)' = u'(x).v(x) + v'(x)u(x),\quad \forall x\in[a,b]$$

d'où

$$\int \big(u(x).v(x)\big)'dx = \int \big(u'(x).v(x) + v'(x)u(x)\big)dx,$$

par conséquent

$$u(x).v(x) = \int u'(x).v(x)dx + \int v'(x)u(x)dx,$$

et donc

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx.$$

Exemples.

$$\int (1+x).e^x\ dx$$

On prend

$$\begin{cases} u(x) = 1+x \Longrightarrow\ u'(x) = 1, \\ v'(x) = e^x \quad\ \Longrightarrow\ v(x) = e^x, \end{cases}$$

alors

$$\int (1+x).e^x\ dx = (1+x)e^x - \int\ e^x\ dx = (1+x)e^x - e^x + c = xe^x + c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

De même pour $\int \ln x\ dx$, $\int \ln^2 x\ dx$, $\int \sin(3x).\cos x\ dx$, et $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\ dx$.

• Par changement de variable :

Théorème 0.0.1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ une fonction de classe C^1 telle que*

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Alors, la fonction $t \longmapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est intégrable sur $[\alpha,\beta]$, et nous avons

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

Exemples.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} := F(x)$$

On prend $t = \sqrt{x+1}$, alors

$$\begin{cases} \frac{dt}{dx} = \frac{d(\sqrt{x+1})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2t} \Longrightarrow dx = 2tdt. \\ t^2 = x+1 \Longrightarrow x = t^2 - 1 \end{cases}$$

d'où,

$$F(x) = \int \frac{(t^2-1)\ 2\ t\ dt}{t} = 2\int \left(t^2-1\right)dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]+c = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 - 2\sqrt{x+1}+c,\ c \in \mathbb{R}.$$

De même pour $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\ dx$.

Rappels

$$\boxed{\int k.x^n\ dx = \frac{k}{n+1}.x^{n+1}}$$

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}\ dx = \ln \mid g(x) \mid}$$

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g^n(x)}\ dx = \frac{-1}{(n-1)g^{n-1}}}$$

$$\boxed{\int g'(x).e^{g(x)}\ dx = e^{g(x)}}$$

$$\boxed{\int 2.g(x).g'(x)\ dx = g^2(x) + cst}$$

$$\boxed{\int k.g^{k-1}(x).g'(x)\ dx = g^k(x)}$$

.

Intégrale de Riemann

Soit $[a,b]$ un intervalle compact (fermé et borné) de $\mathbb{R}$. On appelle "subdivision de $[a,b]$" toute suite finie ordonnée de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que

$$\mathbf{a} = x_0 < x_1 < ... < x_n = \mathbf{b}.$$

Par exemple, $\Delta_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $\Delta_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\}$ sont deux subdivisions de $[0,1]$.

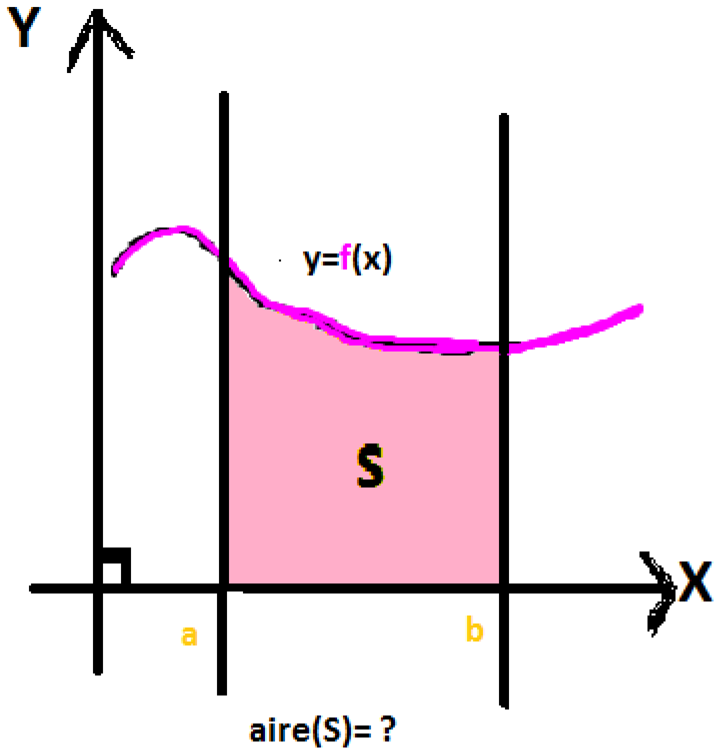
• Pour tout n, on peut trouver une infinité de subdivisions pour $[a,b]$.

• Pour tout $\mathbf{n}$, si on partage $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ en $\mathbf{n}$ intervalles partielles égaux, alors la longueur de chacun sera $\frac{b-a}{\mathbf{n}}$, et on obtient : $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, ... etc, i.e.

$$\boxed{x_i = \mathbf{a} + i.\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{n}}} \; (\textit{subdivision régulière}).$$

Soit $\mathbf{f} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et bornée sur $[a,b]$.

Nous aimerions trouver **l'aire** de la surface S délimitée par la courbe d'équation $y = \mathbf{f}(x)$, l'axe des abscisses (OX), et les deux droites d'équations $x = \mathbf{a}$ et $x = \mathbf{b}$.

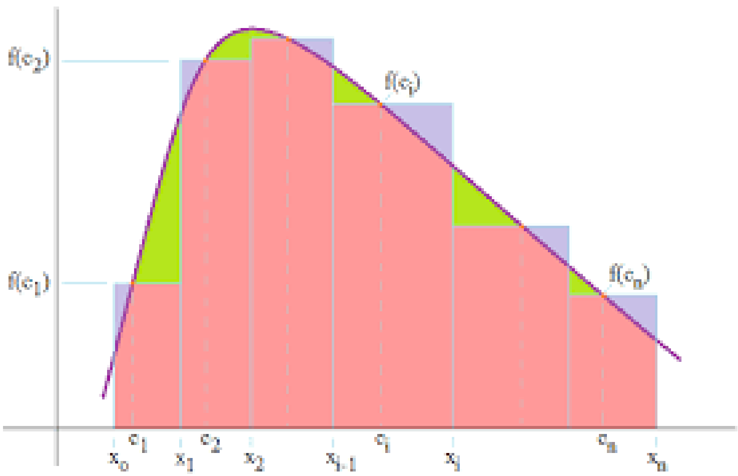


• Si f est continue par exemple, partageons $[a, b]$ en n intervalles partielles, on obtient une subdivision $\Delta = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$. Pour chaque intervalle partiel $[x_{i-1}, x_i]$ choisissons un $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$. On obtient n rectangles dont la largeur de chacun est $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $f(\varepsilon_i)$.

Notons par

$$\boxed{R_{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{\mathbf{n}} (x_i - x_{i-1}).\mathbf{f}(\varepsilon_i)}$$

Cette somme représente la somme des aires (algébriques) des rectangles dans la figure :



On l'appelle **somme de Riemann** de f selon la subdivision Δ et par rapport au système de points $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$.

• Lorsque **n** est suffisement grand ($\mathbf{n} \to \infty$), on tombe sur la valeur de l'aire recherchée.

Par exemple, pour la fonction exponentielle $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = e^x$ (elle est **continue** sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[a, b]$).

$$\boxed{aire(S) = \lim_{n \to +\infty} R_n.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute subdivision $\Delta = \{\mathbf{a} = x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n = \mathbf{b}\}$ et tout système de points $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_i, ..., \varepsilon_n\}$, la somme de Riemann de f est

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})e^{\varepsilon_i}.$$

En choisissant $\varepsilon_i = x_i$, et en choisissant une subdivision Δ régulière, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{n} . e^{(\mathbf{a} + i.\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{n})},$$

Pour $\mathbf{a} = 0$ et $\mathbf{b} = 1$ par exemple, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\, e^{\frac{i}{n}} = R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e^{\frac{1}{n}})^i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y^i,$$

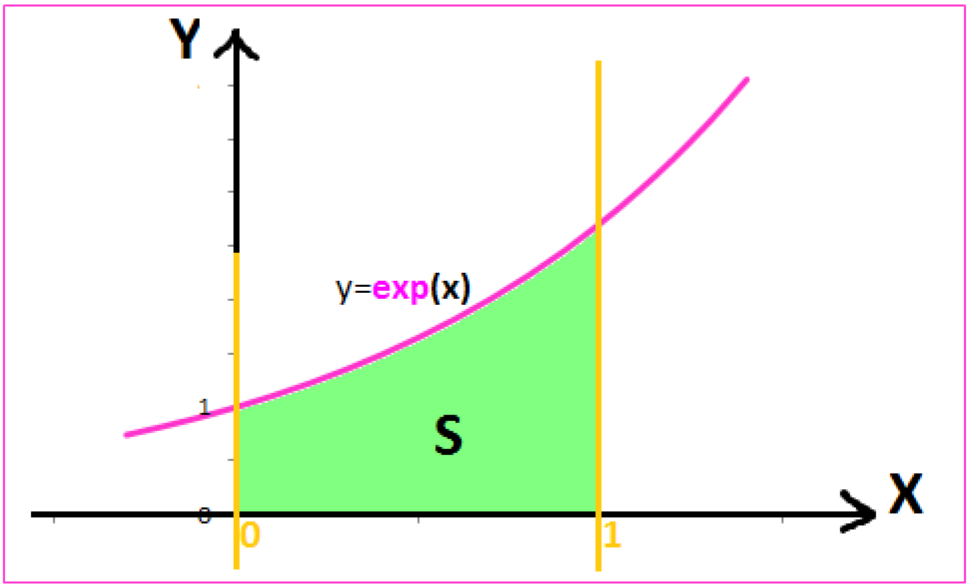
avec $y = e^{\frac{1}{n}}$. Or, $\sum_{i=1}^{n} y^i = y^1 + y^2 + y^3 + ... + y^n$ est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison y, et dont le premier terme est y. Donc $\sum_{i=1}^{n} y^i = y\,\frac{y^n - 1}{y - 1}$, et on obtient

$$R_n = \frac{1}{n}\, y\, \frac{y^n - 1}{y - 1} = \frac{1}{n}\, e^{\frac{1}{n}}\, \frac{(e^{\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e - 1)\, e^{\frac{1}{n}}\, \frac{1}{n}\, \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e - 1)\, e^{\frac{1}{n}}\, \frac{1}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}},$$

Comme $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{1n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} R_n = e-1$. En conclusion, d'où $aire(S) = e-1$.

On dit que la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$, et son intégrale est égale à $e-1$, et on écrit

$$\int_0^1 e^x\,dx = e-1 = aire(S).$$



• Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a,b]$ est intégrable sur cette intervalle. La continuité est une condition suffisante pour l'intégrabilité au sens de Riemann mais pas nécessaire. Alors, c'est quoi une fonction intgrable ?

Définition 0.0.2. *Si la somme de Rieman R_n admet une limite lorsque $n\to\infty$ (qui ne dépend pas de la subdivision de $[a,b]$), on dit que f est intégrable, on appelle cette limite* ***"l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$"****, et on la note $\int_a^b f(x)\,dx$.*

i.e.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} R_n = l'aire\ alg\acute{e}brique\ de\ S.$$

- Toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone est intégrable.
- Toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** est intégrable.

• Lorsque f est continue sur $[a,b]$, nous pouvons définir sur $[a,b]$ la fonction $\mathbf{x} \longmapsto \int_a^{\mathbf{x}} f(t)dt$. Cette dernière est dérivable sur $[a,b]$, et sa dérivée en tout point x est égale à $f(x)$. C'est la primitive pour f sur $[a,b]$, qui s'annule en a.

Propriétés. Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann, alors

1) f est intégrable sur tout sous-intervalle $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$,
(elle est donc intégrable sur tout sous-intervalle $[a,x]$, $\forall x \in [a,b]$),

2) (Relation de Chasles) pour tout $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3) si $f \geq 0$ $\big(f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]\big)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$,

4) si $f \leq g$ $\big(f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]\big)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$,

5) La fonction $\mid f \mid$ est intégrable sur $[a,b]$, et

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \mid f(x) \mid dx.$$

6) (Linéarité) La fonction somme $f+g$, et la fonction λf sont intégrables, et

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b \lambda.f(x)dx = \lambda.\int_a^b f(x)dx, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

• On pose par définition

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\int_{\mathbf{b}}^a f(x)dx = - \int_a^{\mathbf{b}} f(x)dx.$$

• Soit $a > 0$ et $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors,

Si f est paire, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Intégrale et primitives

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors,

• f admet au moins une (donc une infinité de) primitive,

• d'autre part f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, et donc sur $[a, x]$, i.e. $\int_a^x f(t)dt$ existe, pour tout $x \in [a, b]$.

Dans ce cas :

Théorème 0.0.2. *(Newton-Leibnitz) Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors*

$$\boxed{\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x)dx = \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(x)\Big]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}}.$$

Plus généralement, $\forall x \in [a, b]$,

$$\int_a^{\mathbf{x}} f(t)dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(t)\Big]_a^{\mathbf{x}}.$$

Grâce à ce théorème, par exemple

$$\int_0^1 e^x\, dx = e^x\Big]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$