Equations Différentielles

La Mécanique, la dynamique, l'électricité, la biologie, l'économie, la démographie, les probabilités, ... fournissent des situations dont l'étude conduit à une équation différentielle, que nous ne craindrons pas de présenter sommairement comme une relation, sous la forme d'une équation, entre une fonction et ses dérivées successives.

0.1 Généralités

Définition 0.1.1. *Une équation différentielle est une relation entre une variable x, une fonction de cette variable y (inconnue) et certaines de ses dérivées $(y', y'', ...)$.*

Par exemple, $xy' + x^2 = e^y$, $\frac{\partial U}{\partial t} + U(t,x)\frac{\partial U}{\partial x} = 0$.

• les inconnues, pour la première par exemple, sont une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dont I EST son intervalle de définition.

• On parle d'équation différentielle **ordinaire** (**EDO**) si l'inconnue y est une fonction d'une seule variable x.

• On parle d'équation différentielle aux dérivées **partielles** (**EDP**) lorsque l'inconnue est une fonction de plusieurs variables.

• On dit que l'équation est d'ordre **n** si elle contient des dérivées de y jusqu'à l'ordre **n**.

• On dit que l'équation est de degré **m** si la plus haute dérivée de y figurant dans l'équation est de degré **m**.

• On note généralement la variable de la fonction y par x mais si la variable désigne le temps par exemple on préfère la noter par t.

Exemples.

• $xy' + x^2 = e^y \longrightarrow$ EDO du $1 \stackrel{er}{=}$ ordre,

• $y'' = 3y + 1 \longrightarrow$ EDO du 2^{nd} ordre.

• $y''^2 + xy'^3 = 5 \longrightarrow$ EDO du 2^{nd} ordre.

• $y''' + 2xy'' + y'^2 = \cos x \longrightarrow$ EDO d'ordre 3, de degrés 1.

• $y'' = (5-2y')^{\frac{3}{2}} \longrightarrow$ EDO d'ordre 2, de degré 2, car c'est équivaut à $(y'')^2 = (5-2y')^3$.

• $(1+x)y^2 + \ln xy = e^x$ **n'est pas une équation différentielle** car elle ne contient pas des dérivées de la fonction y.

• $\frac{\partial U}{\partial t} + U(t,x)\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \longrightarrow$ EDP, du 2^{nd} ordre, l'inconnu est la fonction U aux deux variables t et x.

Dans ce cours nous nous intéressons uniquement aux EDO.

La forme générale d'une **EDO** d'ordre **n** est

$$\mathcal{R}\Big(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}(x)\Big) = 0,$$

où la relation $\mathcal{R}$ est une fonction connue dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$ et $x \in I \subset \mathbb{R}$.

On dit que l'équation est résoluble par rapport à la dérivée si on peut l'écrire sous la forme

$$y^{(n)}(x) = \mathcal{F}\Big(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}(x)\Big),$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction connue dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $x \in I \subset \mathbb{R}$. • Résoudre (on dit aussi intégrer) cette équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions y ($y(x) =?$), définies et **n** fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, qui satisfont l'équation. Par exemple, résoudre l'équation différentielle $\dot{y}(t) = -y(t)$ signifie chercher toutes les fonctions

$$\begin{aligned} y: \ & I \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto y(t) = ? \end{aligned}$$

telles que $\dot{y}(t) = -y(t)$ pour tout $t \in I$.

• Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour choisir, entre les différentes solutions, celle qui décrit le problème physique par exemple, il faut considérer d'autres données qui dépendent de la nature du problème, par exemple la valeur prise par la solution (et/ou éventuellement ses dérivées) en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.

• Pour faciliter l'identification, les équations différentielles sont classées par leur comportement mathématique. Linéaire et non linéaire est l'une de ces catégories.

• On dit que l'équation différentielle est **linéaire** si elle vérifie :

1) la fonction inconnue, ainsi que toutes ses dérivée sont de degrés 1,

2) l'équation ne contient pas un produit de la fonction inconnue avec l'un de ses dérivées, ni entre les dérivées.

Par exemple,

$xy' + x^2 = e^y; \qquad y'' = 3y + 1$

sont des EDO linaires, par contre

$yy'' + y' = x; \qquad y' + x\sqrt{y} = \cos x$

sont des EDO **non** linéaires.

La forme générale d'une **EDO linéaire** d'ordre **n** est

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_n(x)y^{(n)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = R(x),$$

où $a_0, a_1, ..., a_n, R$ sont des fonction connues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

On distingue deux types de solutions pour une équation différentielles : solution implicite et solution explicite.

0.2 Equations différentielles ordinaires du 1^{er} ordre

La forme générale d'une **EDO** du premier ordre est

$$\mathcal{R}\Big(x, y(x), y'(x)\Big) = 0,$$

mais nous allons nous restreindre dans ce cours aux **EDO** du premier ordre qui peuvent s'écrire sous la forme

$$y'(x) = h\Big(x, y(x)\Big) \qquad ...(I)$$

Si le second membre h ne dépend pas explicitement de x, alors on dit que l'EDO est autonome.

Une condition initiale est une relation de la forme $y(x_0) = y_0$ telle que y_0 est une valeur donnée.

Lorsqu'on se donne une telle équation et une condition initiale, c'est à dire

$$\begin{cases} y'(x) = h\Big(x, y(x)\Big) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

on appelle ça un problème de Cauchy.

Nous allons voir principalement quatre types d'EDO du premier ordre :

0.2.1 À variables séparables

C'est le cas où le second membre $h(x, y(x))$ est de la forme $h(x, y) = h_1(x).h_2(y(x))$, c'est à dire

$$y'(x) = h_1(x).h_2(y(x)),$$

ou brièvement

$$y' = h_1(x).h_2(y).$$

Par exemple,

$$y' = x^2.e^y \quad et \quad \dot{y} = 3(y - 10)$$

$$\big(y'(x) = x^2.e^{y(x)}\big), \qquad \big(\dot{y}(t) = 3(y(t) - 10)\big).$$

Comment résoudre ?

Nous séparons,

$$\frac{y'(x)}{h_2(y(x))} = h_1(x),$$

puis nous intégrons

$$\int \frac{y'(x)}{h_2(y(x))} dx = \int h_1(x) dx.$$

Ou bien, en pratique, l'équation (la forme abrégée) en général devient

$$\frac{dy}{dx} = h_1(x).h_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h_2(y)} = h_1(x)dx,$$

en intégrant formellement les deux membres

$$\int \frac{1}{h_2(y)} dy = \int h_1(x)dx,$$

nous obtenons

$$G(y) = F(x) + une\ constante,$$

F et G étant les primitives, puis nous essayons d'exprimer y en fonction de x ou bien on garde une solution implicite.

Par **exemple**,

$$y' + \frac{y}{x} = 0, \quad x \in]0, 1[\tag{1}$$

nous réordonnons l'équation

$$y'(x) = \frac{-1}{x}.y(x),$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{-1}{x},$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{-1}{x} dx,$$

$$\Rightarrow \ln \mid y(x) \mid = -\ln \mid x \mid + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ln \mid y(x) \mid = -\ln x + c, \quad car\ x > 0$$

$$= \ln \frac{1}{x} + c,$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y(x)|} = e^{\ln \frac{1}{x} + c}$$

$$\Rightarrow \mid y(x) \mid = \frac{1}{x}.e^{c}$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm e^{c}.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{C}{x}, \quad tel\ que\ C = \pm e^{c}.$$

Ou bien, en pratique

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{x}y \\
\Rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{-1}{x}dx \\
\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy &= \int \frac{-1}{x}\, dx \\
\Rightarrow \ln \mid y \mid &= -\ln \mid x \mid + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= -\ln x + c, \quad car\ x > 0 \\
&= \ln \frac{1}{x} + c,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{\ln|y|} &= e^{\ln \frac{1}{x} + c} \\
\Rightarrow \mid y \mid &= \frac{1}{x}.e^{c} \\
\Rightarrow y &= \pm e^{c}.\frac{1}{x} \\
\Rightarrow y &= \frac{C}{x}, \quad C = \pm e^{c}.
\end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation (1) sont (la solution générale est) toutes les fonctions définies par

$$y(x) = \frac{C}{x}, \quad x \in]0, 1[,$$

avec $C \in \mathbb{R}$ (ce qui donne une infinité de solutions).

0.2.2 Linéaires

Elles sont de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \qquad ...(L)$$

où $a(\cdot), b(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues (elles peuvent être des constantes), I un intervalle de $\mathbb{R}$. Par exemple, l'EDO $\quad x^2y' + 2xy - x + 1 = 0, \quad$ que nous pouvons écrire sous la forme

$$y' = \underbrace{\frac{-2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{\frac{x-1}{x^2}}_{b(x)}.$$

• L'équation

$$y' = a(x)y \qquad \ldots\textbf{(h)}$$

est appelée " l'équation homogène associée à l'équation (L) ", et $b(x)$ est appelé "le second membre".

Comment résoudre ?

La solution générale de (L) est de la forme

$$\boxed{y(x) = y_{\mathbf{h}}(x) + y_{\mathbf{p}}(x)},$$

telles que y_h est la solution de (h), et y_p est une solution (particilière) pour (L).

Alors,

Etape I. On résoud d'abord l'équation (h), **qui est à variables séparables**, on obtient une solution de la forme $y_{\mathbf{h}}(x) = Ce^{A(x)}$ tel que $C \in \mathbb{R}$, A est une primitive de la fonction a. Puis,

Etape II. nous avons deux possibilités :

• Soit on cherche une solution (particulière) $y_{\mathbf{p}}$ pour l'équation avec second membre (l'équation (L)) (on peut même remarquer une solution évidente), et dans ce cas, la solution générale de "l'équation avec second membre", (L), est

$$y(x) = Ce^{A(x)} + y_{\mathbf{p}}(x), \quad C \in \mathbb{R},$$

• sinon, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante C. Dans ce cas, la solution générale de (L) est de la forme

$$\boxed{y(x) = C(x).e^{A(x)}.}$$

Il suffit de calculer $y'(x)$, puis remplacer y, y' dans (L) pour trouver $C'(x)$, et par intégration $C(x)$.

Exemple.

$$y' + y = 3e^{2x}$$

elle se réécrit,

$$y'(x) = (-1).y(x) + 3e^{2x} \qquad ...(L_1)$$

on voit bien qu'elle est linéaire, avec $a(x) = 1$ et $b(x) = 3e^{2x}$.

I) L'équation homogène associée est

$$y'(x) = (-1).y(x) \qquad ...(\mathbf{h})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int (-1)\, dx \\
\Rightarrow \ln \mid y(x) \mid &= -x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \mid y(x) \mid &= e^c.e^{-x} \\
\Rightarrow y(x) &= \pm e^c.e^{-x},
\end{aligned}$$

la solution générale de l'équation (h) est

$$y_{\mathbf{h}}(x) = C\ e^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

II)

• Nous remarquons facilement que la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est une solution particulière pour l'équation globale (L_1), d'où

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_{\mathbf{h}}(x) + y_{\mathbf{p}}(x) \\
&= Ce^{-x} + e^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

• Sinon, on utilise la méthode de la variation de la constante. D'aprés cette derniére, la solution générale de l'équation globale (L_1) sera de la forme

$$\boxed{y(x) = C(x).e^{-x},}$$

d'où

$$y'(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x},$$

en remplaçant dans l'équation (l_1), on obtient

$$\mathbf{C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}} = -\mathbf{C(x)e^{-x}} + 3e^{2x},$$

d'où

$$C'(x)e^{-x} = 3e^{2x},$$

alors
$$C'(x) = 3e^{3x},$$
en intégrant, on trouve
$$\int C'(x)dx = \int 3e^{3x}dx$$
et par suite,
$$C(x) = e^{3x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$
Donc la solution générale de l'équation (L_1) est
$$y(x) = \left(e^{3x} + k\right)e^{-x}$$
$$y(x) = \underbrace{e^{2x}}_{y_{\mathbf{p}}(x)} + \underbrace{ke^{-x}}_{y_{\mathbf{h}}(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

0.2.3 De Bernoulli

Elles sont de la forme
$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x), \qquad ...(B)$$
où $\mathbf{a}, \mathbf{b} : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions **continues** (elles peuvent être des constantes), I un intervalle de $\mathbb{R}$. Par **exemple,** $xy^3 - y' = y$, de la forme
$$y' = \underbrace{-}y + \underbrace{x}y^{\overbrace{\mathbf{3}}}.$$
• si $\alpha = 0$ on retrouve une équation linéaire.

• si $\alpha > 0$, il suffit de diviser les deux membres de l'équation par y^{α}, puis utiliser le changement $z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha}$. Donc,
$$z'(x) = (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x).$$
En remplaçant dans l'équation (B), on obtient une équation différentielle linéaire par rapport à z. Par exemple pour l'équation en haut
$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^3} &= (-1)\frac{y}{y^3} + x \\ &= (-1)\frac{1}{y^2} + x. \end{aligned}$$
En posant $z = \frac{1}{y^2}$, on obtient $z'(x) = \frac{-2y(x)y'(x)}{y^4(x)} = \frac{-2y'(x)}{y^3(x)}$, d'où $z' = \frac{-2y'}{y^3}$,
$$\frac{z'}{-2} = (-1).z + x$$

$$z' = 2z - 2x. \qquad ...(l_z)$$

On a obtenu ainsi une équation linéaire par rapport à z, dont l'équation homogène associée est

$$z' = 2z, \qquad ...(h_z)$$

sa solution est $z_h(x) = C.e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$. La solution générale de (l_z) est de la forme $z(x) = C(x).e^{2x}$, ce qui donne $C(x) = \int -2xe^{-2.x}dx$, on intègre par parties, on obtient

$$z(x) = \left((x + \frac{1}{2})e^{-2x} + k\right)e^{2x}.$$

Alors, la solution de (B) satisfait

$$y^2(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{x + \frac{1}{2} + ke^{2x}}, \ k \in \mathbb{R}, \quad (c'est\ une\ solution\ implicite\ )$$

d'où

$$y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + ke^{2x}}}.$$

0.2.4 de Riccati

Elles sont de la forme

$$y'(x) = \mathbf{a(x)}y + \mathbf{b(x)}y^{\mathbf{2}} + \mathbf{d(x)}$$

où $\mathbf{a}(\cdot), \mathbf{b}(\cdot), \mathbf{d}(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions **continues**, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Par exemple,

$$y' + 2xy = x^2 + y^2 + 1,$$

qui est de la forme

$$y' = \underbrace{\mathbf{-2x}}_{\mathbf{a(x)}} y + \underbrace{\mathbf{1}}_{\mathbf{b(x)}} y^{\mathbf{2}} + \underbrace{\mathbf{x^2 + 1}}_{\mathbf{d(x)}}.$$

Comment résoudre ?

Pour ce type d'équations, une fois on connait une solution (particulière y_p), la solution générale serait de la forme

$$\boxed{y(x) = y_{\mathbf{p}}(x) + \frac{1}{\mathbf{z}(x)}}$$

telle que $\mathbf{z}$ est une fonction à trouver facilement. Par exemple, pour l'équation donnée, comme $y_p(x) = x$, la solution générale serait de la forme

$$\boxed{y(x) = x + \frac{1}{\mathbf{z}(x)}},$$

et nous obtenons

$$y(x) = x + \frac{1}{c - x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemples.

$y' + xy^2 - x^3 y - 2x = 0$ *avec* $y_p(x) = x^2, \quad (z' - x^3 z = x).$