$\bigtriangledown$

Equations Différentielles(suite)

0.1 Equations différentielles ordinaires du 2^{nd} ordre

La forme générale d'une **EDO** du second ordre est

$$\mathcal{R}\Big(x, y(x), y'(x), y''(x)\Big) = 0.$$

On dit qu'elle est **normale** si elle peut s'écrire sous la forme

$$y''(x) = h\Big(x, y(x), y'(x)\Big).$$

Nous nous intéressons particulièrement, dans ce cours, aux EDO du second ordre dites "**linéaires**", c'est à dire celles de la forme

$$\mathbf{a}(x)y''(x) + \mathbf{b}(x)y'(x) + \mathbf{c}(x)y(x) = \mathbf{R}(x).$$

(Les y, y', y'' sont de degré 1, et tous les coefficients dépendent au plus de x).

Par exemple $3y'' = y - 2y'$, et aussi $m\ddot{y}(t) = -ky(t) - \lambda\dot{y}(t)$, où les coefficients sont m, λ et k respectivement.

• On appelle solution (ou intégrale) d'une EDO du second ordre sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle I, deux fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I. On note en général cette solution (y, I).

• La solution générale d'une telle équation contient deux constantes réelles C_1, C_2.

0.1.1 EDOs du 2^{nd} ordre linéaires à coefficients constants

C'est les EDO de la forme

$$\mathbf{a}y''(x) + \mathbf{b}y'(x) + \mathbf{c}y(x) = R(x), \qquad ...(II)$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (les coefficients) sont des constantes réelles (généralement connues) telle que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, et R une fonction continue (dérivable) sur un intervalle ouvert, R est appelée le second membre de l'EDO.
La solution générale d'une telle équation est de la forme

$$\boxed{y(x) = y_{\mathbf{H}}(x) + y_{\mathbf{p}}(x)},$$

où $y_{\mathbf{H}}$ est la solution générale de l'équation homogène associée, et $y_{\mathbf{p}}$ est une solution (particulière) pour l'équation globale. Donc, pour résoudre ce type d'équations, deux étapes à faire :
Etape I. Nous considérons d'abord l'équation homogène associée, dite aussi "sans second membre"

$$\mathbf{a}y'' + \mathbf{b}y' + \mathbf{c}y = 0, \qquad ...(\mathbf{H})$$

• Si y_1 et y_2 sont deux solutions pour l'équation (H) **linéairement indépendantes**, alors la solution générale de (H) est de la forme

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

telles que C_1, C_2 sont des constantes réelles, i.e., toute solution est de cette forme.
• Donc pour résoudre (H), il suffit de trouver deux solutions y_1, y_2 linérairement indépendantes. Comment ?
• Il suffit de résoudre l'équation algébrique

$$\mathbf{a}r^2 + \mathbf{b}r + \mathbf{c} = 0 \qquad ...(*)$$

appelée "équation **caractéristique** de l'équation différentielle (H)". Donc on calcule le déterminant Δ, puis
Théorème.

• Si $\Delta > 0$, $(*)$ admet deux racines réelles r_1, r_2, alors

$$y_H(x) = C_1 e^{\mathbf{r_1}.x} + C_2 e^{\mathbf{r_2}.x},$$

telles que C_1, C_2 sont des constantes réelles.

• Si $\Delta = 0$, $(*)$ admet une racine réelle double r, alors

$$y_H(x) = C_1 e^{\mathbf{r}.x} + C_2 \mathbf{x} e^{\mathbf{r}.x} = \left(C_1 + C_2 \mathbf{x}\right) e^{\mathbf{r}.x},$$

avec C_1, C_2 des constantes réelles.

• Si $\Delta < 0$, $(*)$ admet deux racines complexes conjugées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, alors

$$y_H(x) = \left[C_1 \cos(\beta.x) + C_2 \sin(\beta.x)\right] e^{\alpha.x},$$

telles que C_1, C_2 sont des constantes réelles.

Exemples.

$$3y'' = y - 2y' \qquad ...(II_1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \;\; avec \;\; y(0) = 1 \; y'(0) = 3 \qquad ...(II_2)$$

$$y'' + y = 0 \qquad ...(II_3)$$

Résolution.

$$3y'' + 2y' - y = 0 \qquad ...(II_1)$$

c'est une EDO du 2^{nd} ordre,

$$\mathbf{3}.y'' \mathbf{+2}.y' \mathbf{-1}.y = 0$$

elle est à coefficients constants, sans second membre, son équation caractéristique est

$$\mathbf{3}.r^2 \mathbf{+2}.r \mathbf{-1} = 0. \qquad ...(*)$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 > 0$, donc la solution générale de (1) est de la forme

$$y(x) = y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$, $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{3}$,

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$1.y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \qquad ...(II_2)$$

c'est une EDO du 2^{nd} ordre bien ordonnée, à coefficients constants et sans second membre, son équation caractéristique est

$$1.r^2 + 4r + 4 = 0 \qquad ...(*)$$

$\Longleftrightarrow (r+2)^2 = 0 \Longleftrightarrow r = -2$ (racine double), donc la solution générale de (2) est de la forme

$$y(x) = y_H(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc $y(0) = (C_1 + C_2.0)e^{-2.0} = C_1.e^0 = C_1$, d'où d'après la première condition initiale, $C_1 = 1$. La solution devient

$$y(x) = (1 + C_2 x)e^{-2x}; \quad , C_2 \in \mathbb{R}.$$

d'autre part,

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2(1 + C_2 x)e^{-2x}$$

d'où

$$y'(0) = C_2 e^{-2.0} - 2(1 + C_2.0)e^{-2.0} = C_2 - 2,$$

donc d'après la deuxième condition initiale, $C_2 - 2 = 3$, d'où $C_2 = 5$. Donc

$$y(x) = (1 + 5x)e^{-2x}, \ \ x \in I$$

est la solution unique.

$$1.y''(x) + 0.y'(x) + 1.y(x) = 0 \qquad ...(II_3)$$

$$1.r^2 + 0.r + 1 = 0 \qquad ...(*)$$

$r^2 + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ r^2 = -1 = (i)^2 \ \Leftrightarrow \ r = \overset{+}{-} i \ \Leftrightarrow \ r_1 = 0 + i \ et \ r_2 = 0 - i \ \Leftrightarrow \ (\alpha = 0 \ et \ \beta = 1).$

La solution générale de est définie par

$$\begin{aligned} y_H(x) &= \left[C_1 \cos(1.x) + C_2 \sin(1.x)\right] e^{0.x}, \\ y_H(x) &= C_1 \cos x + C_2 \sin x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Etape II. Pour trouver la solution générale de l'équation avec second membre, il y'on a deux méthodes :

. une méthode générale : variation des constantes.

. méthode 2 : solution particulière.

La méthode de variation de la constante : Dans la solution de (H)

$$y_{\mathbf{H}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

nous considérons les constantes C_1 et C_2 comme des fonctions inconnues de x et cherchons la solution **générale** de l'équation avec second membre sous la forme

$$\boxed{y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).}$$

Pour trouver les fonctions inconnues, on résout le système

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, & \dots(1) \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \frac{R(x)}{a}. & \dots(2) \end{cases}$$

Ce qui permet de déterminer d'abord les fonctions dérivées C_1' et C_2' puis, par intégration, les fonctions C_1 et C_2.

Exemple. Résoudre l'EDO

$$y'' + 4y = \tan x, \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[\qquad \dots(E).$$

$$1\ddot{y}(x) + 0.\dot{y}(x) + ky(x) = \tan x, \quad x \in I =]0, \frac{\pi}{2}[$$

Etape I.

$$1\ddot{y}(x) + 0.\dot{y}(x) + ky(x) = 0 \qquad \dots(H)$$

$$1r^2 + 0.r + 4 = 0 \qquad \dots(*)$$

$$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4 = (2i)^2 \Leftrightarrow r = \overset{+}{-}2i \Leftrightarrow (\alpha = 0 \; et \; \beta = 2).$$

$$\begin{aligned} y_H(x) &= \left[K_1 \cos(2.x) + K_2 \sin(2.x)\right] e^{0.x} \\ &= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Etape II. Puisque nous possédons pas d'une solution particulière, nous appliquons la méthode de variation des constantes, et d'après cette dernière, la solution générale de (E) est de la forme

$$y(x) = C_1(x) \cos(2x) + C_2(x) \sin(2x).$$

Pour trouver les fonctions inconnues C_1, C_2, on résout le système

$$(S)\begin{cases} C_1'(x)\cos(2x)+C_2'(x)\sin(2x)=0, \\ -2C_1'(x)\sin(2x)+2C_2'(x)\cos(2x)=\tan x. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\cos(2x)$, et la deuxième par $\sin(2x)$, on obtient

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos^2(2x)+C_2'(x)\sin(2x)\cos(2x)=0, \\ C_1'(x)\sin^2(2x)-C_2'(x)\cos(2x)\sin(2x)=-\frac{1}{2}(\tan x).\sin(2x) \end{cases}$$

en aditionnant, on trouve que

$$C_1'(x)(\cos^2(2x)+\sin^2(2x))=-\frac{1}{2}(\tan x).\sin(2x),$$

d'où

$$C_1'(x)=-\frac{1}{2}(\frac{\sin x}{\cos x}).2\sin x.\cos x=-\sin^2 x=\frac{1}{2}(\cos(2x)-1),$$

en intégrant les deux membres de l'équation,

$$\int C_1'(x)dx=\int\frac{1}{2}(\cos(2x)-1)dx,$$

on obtient

$$\boxed{C_1(x)=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}\sin(2x)-x+k_1)]=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{x}{2}+k_1;\quad k_1\in\mathbb{R}.}$$

Pour trouver $C_2(x)$, de même, en multipliant la première équation du système (S) par $\sin(2x)$, et la deuxième par $\cos(2x)$, on obtient

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos(2x)\sin(2x)+C_2'(x)\sin(2x)\sin^2(2x)=0, \\ C_1'(x)\sin(2x)\cos(2x)-C_2'(x)\cos(2x)\cos^2(2x)=\frac{1}{2}(\tan x).\cos(2x) \end{cases}$$

en aditionnant, on trouve que

$$C_2'(x)=\frac{1}{2}(\tan x).\cos(2x)=\frac{1}{2}(\frac{\sin x}{\cos x}).(\cos^2 x-\sin^2 x),$$

d'où

$$C_2'(x)=\frac{1}{2}(\frac{\sin x}{\cos x}).(2\cos^2 x-1)=\sin x.\cos x-\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x},$$

en intégrant,

$$\int C_2'(x)dx=\frac{1}{2}\int 2\sin x.\cos x dx+\frac{1}{2}\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x)dx+\frac{1}{2}\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx,$$

alors

$$\boxed{C_2(x)=\frac{-1}{4}\cos(2x)+\frac{1}{2}\ln|\cos x|+k_2;\quad k_2\in\mathbb{R}.}$$

La solution générale est définie par

$$y(x)=\left[\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{x}{2}+k_1\right].\cos(2x)+\left[\frac{-1}{4}\cos(2x)+\frac{1}{2}\ln|\cos x|+k_2\right].\sin(2x);\quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

En fait,

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{x}{2}\right].\cos(2x)+\left[\frac{-1}{4}\cos(2x)+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\right].\sin(2x)+\left[k_1.\cos(2x)+k_2.\sin(2x)\right]\\ &= \left[\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{x}{2}\right].\cos(2x)+\left[\frac{-1}{4}\cos(2x)+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\right].\sin(2x)+y_{\mathbf{H}}(x), \end{aligned}$$

et nous pouvons vérifier que la quantité $\left[\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{x}{2}\right].\cos(2x)+\left[\frac{-1}{4}\cos(2x)+\frac{1}{2}\ln(\cos x)\right].\sin(2x)$ ce n'est qu'une solution particulière pour l'équation globale.

La méthode 2 : Nous cherchons une solution (particulière) pour l'équation avec second membre (II). Comment ? Nous pouvons le faire dans certains cas, lorsque le second membre prend certaines formes. Par exemple,

• le cas où $R(x)=P(x).e^{\mathbf{m}.x}$, où P est un polynôme d'un certain degrès, et m un réel. Dans ce cas, il existe une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_p(x)=Q(x)e^{\mathbf{m}.x},$$

où Q est un polynôme de degrès $d°Q$ tel que

• Si m n'est pas racine de $(*)$, $\qquad d°Q=d°P.$

• Si m est une racine simple de $(*)$, $\qquad d°Q=d°P+1.$

• Si m est une racine double de $(*)$, $\qquad d°Q=d°P+2.$

Exemple. Considérons l'équation différentielle

$$y''=2y+xe^{-3x}+y'.$$

Nous la réécrivons soius la forme

$$1y''(x)-1.y'(x)-2y(x)=xe^{-3x},$$

I) Nous écrivons l'équation homogène associée, puis son équation caractéristique

$$\ddot{y}-\dot{y}-2y=0, \qquad ...(H)$$

$$r^2-r-2=0, \qquad ...(*)$$

avec le discrèminant $\Delta=9>0$, ce qui donne les racines $r_1=-1$ *et* $r_2=2$.

Ainsi, la solution homogène associée est

$$y_H(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x};\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

II) La solution générale de (II) est de la forme

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x).$$

Nous avons $R(x) = xe^{-3x} = P(x).e^{m.x}$ avec $m = -3$ et $P(x) = x,\ d^\circ P = 1$, alors il existe une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_P(x) = Q(x).e^{mx} = Q(x).e^{-3x}.$$

Nous déterminons Q à travers son degrés. Comme $m = -3$ n'est pas racine pour $(*)$ alors dans ce cas $d^\circ Q = d^\circ P = 1$, d'où $Q(x) = \alpha x + \beta$, et donc $y_P(x) = (\alpha x + \beta).e^{-3x}$. Reste à trouver les valeurs de α et β.

y_p est une solution pour (II) donc elle la vérifie

$$\ddot{y}_p(x) - \dot{y}_p(x) - 2y_p(x) = xe^{-3x}, \quad \forall x \in I.$$

$\dot{y}_p(x) = \alpha e^{-3x} - 3(\alpha x + \beta)e^{-3x} = [(-3\alpha)x + \alpha - 3\beta]e^{-3x}$

$\ddot{y}_p(x) = (-3\alpha)e^{-3x} - 3[(-3\alpha)x + \alpha - 3\beta)]e^{-3x} = [(-9\alpha)x - 6\alpha + 9\beta]e^{-3x}$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
[(-9\alpha)x - 6\alpha + 9\beta]e^{-3x} - [(-3\alpha)x + \alpha - 3\beta]e^{-3x} - 2(\alpha x + \beta)e^{-3x} &= xe^{-3x}, \quad \forall x \in I \\
[(10\alpha)x - 7\alpha + 10\beta]e^{-3x} &= xe^{-3x}, \quad \forall x \in I \\
[(10\alpha)x - 7\alpha + 10\beta]e^{-3x} - xe^{-3x} &= 0, \quad \forall x \in I \\
[(10\alpha - 1)x - 7\alpha + 10\beta]e^{-3x} &= 0, \quad \forall x \in I
\end{aligned}$$

$$\overset{e^{-3x}\neq 0,\ \forall x}{\Longrightarrow} (10\alpha - 1)x - 7\alpha + 10\beta = 0, \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\alpha - 1 = 0, \\ -7\alpha + 10\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{10} \\ \beta = \frac{7}{100} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = (\frac{1}{10}x + \frac{7}{100})e^{-3x}.$$

La solution générale est définie par

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + (\frac{1}{10}x + \frac{7}{100})e^{-3x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'autres exemples, $y'' - y' - 2y = 2e^{-3x}$, $2y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$ (td).

Notez bien, si on avait appliqué la méthode de variation des constantes, on aurait trouvé la même solution.

• le cas où $R(x) = \mathbf{P_n}(x)\cos(\lambda x) + \mathbf{Q_{n'}}(x)\sin(\lambda x)$,

où $P_n, Q_{n'}$ sont deux polynômes de degrés n, n' respectivement.

Si $\Delta \geq 0$, ou bien $\Delta < 0$ mais $\alpha \neq 0$, ou bien $\Delta < 0$, $\alpha = 0$ mais $\beta \neq \lambda$, alors on cherche une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_p(x) = \mathbf{U_{n''}}(x)\cos(\lambda x) + \mathbf{V_{n''}}(x)\sin(\lambda x).$$

Si $\Delta < 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = \lambda$, alors on cherche une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_p(x) = x\big[\mathbf{U_{n''}}(x)\cos(\lambda x) + \mathbf{V_{n''}}(x)\sin(\lambda x)\big],$$

tels que dans les deux cas $U_{n''}, V_{n''}$ sont deux polynômes de degré $\mathbf{n''} = \max(\mathbf{n}, \mathbf{n'})$.

• le cas où $R(x) = R_1(x) + R_2(x) + ... + R_n(x)$ telle que chaque $R_i(x)$ est d'un des types précédents. On cherche pour chacune des équations

$$ay'' + by' + cy = R_i(x)$$

une solution particulière $S_i(x)$, puis la fonction $y_p(x) = S_1(x) + S_2(x) + ... + S_n(x)$ sera solution pour l'équation

$$ay'' + by' + cy = R(x).$$

Exemple.

$$y'' - y' + y = 2x + e^{2x}.$$

0.1.2 EDOs du 2^{nd} ordre linéaires à coefficients non constants

Elles sont de la forme

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = R(x) \quad x \in I,$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ et R sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant un point x_0.

L'équation en haut peut s'écrire

$$y'' + \mathbf{B(x)}y' + \mathbf{C(x)}y = \frac{R(x)}{a(x)}, \quad x \in I \backslash \{x;\ a(x) \neq 0.\}$$

- L'équation homogène associée est

$$y'' + \mathbf{B(x)}y' + \mathbf{C(x)}y = 0. \qquad ...(H)$$

Nous nous intéressons ici à l'équation (H) seulement.

La fonction nulle satisfait toujours l'équation (H), elle est appelée la solution triviale.

La solution générale de (H) est de la forme

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

telles que y_1 et y_2 sont deux solutions **linéairement indépendantes**. Malheureusement, il n'y a pas de méthode pour trouver des formules explicites pour y_1 et y_2. Il y a cependant, certains cas particuliers.

Si nous sommes en quelque sorte assez chanceux pour trouver une solution y_1 **non triviale**, alors dans ce cas on peut trouver y_2, grâce à la formule

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x). \int \frac{e^{\left(-\int \mathbf{B(x)}dx\right)}}{(y_1(x))^2}\, dx.}$$

Exemple.

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = 0;$$

nous vérifions facilement que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ définit une solution pour notre équa. diff. . Alors, réécrivons d'abord l'équation

$$y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0,$$

puis calculons

$$\int -B(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln \mid x \mid + c = \ln x^2 + c; \quad c \in \mathbb{R},$$

il suffit de prendre l'une des primitives, puis

$$y_2(x) = \frac{1}{x}. \int \frac{e^{\ln x^2}}{(\frac{1}{x})^2}\, dx = \frac{1}{x}. \int \frac{x^2}{(\frac{1}{x^2})}\, dx = \frac{1}{x}. \int x^4\, dx = \frac{1}{5}x^4.$$

Alors, la solution générale est définie par

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{5}x^4; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Un autre exemple,

$$y'' - \frac{1+x}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$y_1(x) = e^x$, ce qui donne $y_2(x) = |x+1|$.