Chaînes de Markov

Dr. Bourebia Soumia

27 février 2025

Processus Stochastiques

- Un **processus stochastique** est une collection de variables aléatoires indexées par le temps.
- Il modélise l'évolution d'un système aléatoire au cours du temps.
- Applications : réseaux de télécommunications, files d'attente, fiabilité des systèmes, etc.
- Deux types principaux : **temps discret** et **temps continu**.

Chaîne de Markov discrete

- Une **chaîne de Markov** est un processus stochastique à temps discret avec la propriété de Markov.
- **Propriété de Markov** : L'état futur ne dépend que de l'état présent, et non des états passés.
- Formellement :

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) =$$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$

- Les états sont discrets et dénombrables.

Espace d'états et matrice de transition

- **Espace d'états** : Ensemble fini ou dénombrable d'états, noté $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$.
- **Matrice de transition** : Une matrice $P = (p_{ij})$ où p_{ij} est la probabilité de passer de l'état s_i à l'état s_j.
- Propriétés de P :
  - $p_{ij} \geq 0$ pour tout i, j.
  - $\sum_j p_{ij} = 1$ pour tout i (conservation de la probabilité).

Exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Propriété de Markov

La propriété de Markov stipule que :

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

- Le futur (X_{n+1}) ne dépend que du présent (X_n), pas du passé ($X_{n-1}, \ldots, X_0$).
- Cette propriété simplifie l'analyse des processus stochastiques.

Représentation Graphique d'une Chaîne de Markov

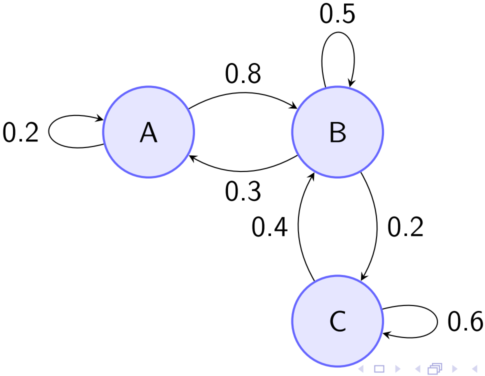
- Une chaîne de Markov peut être représentée par un **graphe orienté et pondéré**.
- Les **nœuds** représentent les états du système.
- Les **arêtes** représentent les transitions entre états.
- Les **poids** des arêtes correspondent aux probabilités de transition.

Exemple de Représentation Graphique

- Considérons une chaîne de Markov à 3 états : $S = \{A, B, C\}$.
- Matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

- Représentation graphique :

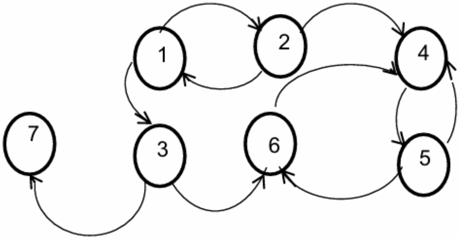


Classification des États

- Les états d'une chaîne de Markov peuvent être classés en fonction de leurs propriétés :
  - **État transitoire** : Un état qui peut être quitté et ne jamais être revisité (la probabilité de ne plus revenir à cet état est positive.).
  - **État récurrent** : Un état qui sera revisité avec une probabilité de 1 (il existe une probabilité p(i, j) pour tout état j de revenir à l'état i après un certain nombre de pas dans le futur.).
  - **État absorbant** : Un état dont la probabilité de rester est de 1 (aucune sortie).
  - **État périodique** : Un état qui ne peut être revisité qu'à des intervalles fixes.

Exemple de Classification des États

Exemple:



états transitoires=1, 2 et 3

états récurrents= 4, 5, et 6, 7

État absorbant= 7

Figure – Classification des États

Chaînes de Markov Homogènes

- Une chaîne de Markov est dite **homogène** si les probabilités de transition ne dépendent pas du nombre de transition.
- La matrice de transition P est constante :

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad \forall n$$

- Exemple : Si $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$, alors :
  - $P_{11} = 0.7$: probabilité de rester à l'état 1.
  - $P_{12} = 0.3$: probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2.

Exemple Simple

- Considérons un système avec deux états : **Actif** et **Inactif**.
- Matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Interprétation :
  - Si le système est **Actif**, il a 90% de chances de le rester.
  - Si le système est **Inactif**, il a 50% de chances de le rester.

Chaînes irréductibles

- Une chaîne de Markov est **irréductible** si tout état est accessible depuis tout autre état.
- Formellement : Pour tout $i, j \in S$, il existe $n \geq 0$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$.
- Si une chaîne est irréductible, tous ses états sont de même nature (transitoires ou récurrents).

Exemple :

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Cette chaîne est irréductible car tous les états communiquent entre eux.

Régime Transitoire

- Le **régime transitoire** décrit le comportement d'une chaîne de Markov sur une période finie.
- Il s'oppose au **régime stationnaire**, qui décrit le comportement à long terme.
- Les probabilités d'état en régime transitoire dépendent :
  - De l'état initial.
  - Des probabilités de transition entre états.
- Applications : Modélisation de systèmes dynamiques, réseaux de communication, etc.

Probabilités d'État

- Soit X_n l'état du système à l'instant n.
- La **probabilité d'état** $\pi_i(n)$ est la probabilité que le système soit dans l'état i à l'instant n.
- Formellement :
$$\pi_i(n) = P(X_n = i)$$
- Ces probabilités évoluent en fonction des transitions entre états.

Équations de Récurrence

- Les probabilités d'état en régime transitoire sont calculées à l'aide d'équations de récurrence.
- Pour chaque état i et instant n :

$$\pi_i(n) = \sum_{j \in S} \pi_j(n-1) \cdot P_{ji}$$

- Où :
  - S est l'ensemble des états.
  - P_{ji} est la probabilité de transition de l'état j à l'état i.
- Ces équations permettent de calculer les probabilités d'état à chaque instant.

Exemple de Calcul en Régime Transitoire

- Considérons une chaîne de Markov à 2 états : $S = \{A, B\}$.
- Matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

- Condition initiale : $\pi_A(0) = 1$, $\pi_B(0) = 0$.
- Calcul de $\pi_A(1)$ et $\pi_B(1)$:

$$\pi_A(1) = \pi_A(0) \cdot P_{AA} + \pi_B(0) \cdot P_{BA} = 1 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.4 = 0.7$$

$$\pi_B(1) = \pi_A(0) \cdot P_{AB} + \pi_B(0) \cdot P_{BB} = 1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.6 = 0.3$$

Évolution des Probabilités d'État

- Les probabilités d'état évoluent au cours du temps jusqu'à atteindre un équilibre (régime stationnaire).
- Exemple : Pour la chaîne de Markov précédente, les probabilités convergent vers :

$$\pi_A(\infty) = \frac{4}{7}, \quad \pi_B(\infty) = \frac{3}{7}$$

Régime Stationnaire

- Le régime stationnaire est atteint lorsque les probabilités d'état ne changent plus au cours du temps.
- Il est déterminé en résolvant les **équations d'équilibre** :

$$\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j \cdot P_{ji}$$

- Avec la condition de normalisation :

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

- Le régime stationnaire est noté $\pi(\infty)$.

Calcul du Régime Stationnaire

- Considérons une chaîne de Markov à 2 états $S = \{A, B\}$ avec la matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

- Équations d'équilibre :

$$\pi_A = 0.7\pi_A + 0.4\pi_B$$

$$\pi_B = 0.3\pi_A + 0.6\pi_B$$

- Condition de normalisation :

$$\pi_A + \pi_B = 1$$

Résolution du Système

- De l'équation pour π_A :

$$\pi_A = 0.7\pi_A + 0.4\pi_B \implies 0.3\pi_A = 0.4\pi_B \implies \pi_A = \frac{4}{3}\pi_B$$

- En utilisant la condition de normalisation :

$$\pi_A + \pi_B = 1 \implies \frac{4}{3}\pi_B + \pi_B = 1 \implies \frac{7}{3}\pi_B = 1 \implies \pi_B = \frac{3}{7}$$

- On en déduit :

$$\pi_A = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

- Ainsi, le régime stationnaire est :

$$\pi_A(\infty) = \frac{4}{7}, \quad \pi_B(\infty) = \frac{3}{7}$$

Probabilité de transition $P_{ij}(m)$

- Dans une chaîne de Markov, la probabilité de transition $P_{ij}(m)$ décrit la probabilité de passer de l'état i à l'état j après m transitions.
- Cette probabilité est utile pour prédire l'état du système après un certain nombre d'étapes.

Définition de $P_{ij}(m)$

- La probabilité $P_{ij}(m)$ est la probabilité que le système soit dans l'état j après m transitions, sachant qu'il était dans l'état i initialement.
- Formellement :

$$P_{ij}(m) = P(X_m = j \mid X_0 = i)$$

- Cette probabilité dépend de la matrice de transition P et du nombre de transitions m.

Calcul de $P_{ij}(m)$

- La probabilité $P_{ij}(m)$ est obtenue en élevant la matrice de transition P à la puissance m.
- La matrice de transition après m transitions est :

$$P(m) = P^m$$

- L'élément (i, j) de P^m donne $P_{ij}(m)$.
- Exemple : Si $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$, alors :

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

- Ainsi, $P_{12}(2) = 0.39$.

Exemple de Calcul

- Considérons une chaîne de Markov à 2 états : $S = \{A, B\}$.
- Matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

- Calcul de $P(2) = P^2$:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.4 & 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.6 \\ 0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.4 & 0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

- Interprétation : $P_{AB}(2) = 0.39$ est la probabilité de passer de A à B en 2 transitions.

Propriétés de $P_{ij}(m)$

- **Relation de Chapman-Kolmogorov** :

$$P_{ij}(m+n) = \sum_{k \in S} P_{ik}(m) \cdot P_{kj}(n)$$

- Cette relation permet de décomposer les transitions en plusieurs étapes.
- **Convergence** : Pour les chaînes de Markov ergodiques, $P_{ij}(m)$ converge vers la probabilité stationnaire π_j lorsque $m \to \infty$.

Différence entre RT et PE

- **Régime transitoire** :
  - Décrit l'évolution des probabilités d'état $\pi_i(n)$ au cours du temps.
  - Se concentre sur la dynamique du système avant l'équilibre.
  - Dépend de l'état initial.
- **Probabilité de transition après** m **transitions** :
  - Décrit la probabilité de passer d'un état i à un état j en exactement m transitions.
  - Se concentre sur un nombre précis de transitions.
  - Ne dépend pas directement de l'état initial (sauf si i est fixé).

Chaîne Absorbante

- Une **chaîne absorbante** Une chaîne de Markov est dite absorbante si il existe une sous chaîne d'états dont on ne peut plus ressortir.
- **État absorbant** : Un état i est absorbant si :

$$P_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad P_{ij} = 0 \quad \text{pour tout} \quad j \neq i$$

- Une fois dans un état absorbant, le système ne peut plus en sortir.
- Exemple : Dans un réseau, un état absorbant peut représenter une panne irrécupérable.

Exemple de Chaîne Absorbante

- Considérons une chaîne de Markov à 3 états : $S = \{A, B, C\}$.
- Matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Sous chaine absorbante : A et C

Période d'un État

- La **période d'un état** i, notée $d(i)$, est le plus grand commun diviseur (PGCD) des temps de retour possibles à l'état i.
- Formellement :

$$d(i) = \text{PGCD}\{n \geq 1 \mid P_{ii}(n) > 0\}$$

- Si $d(i) = 1$, l'état i est dit **apériodique**.
- Si $d(i) > 1$, l'état i est dit **périodique**.

Exemple de Période d'un État

- Considérons une chaîne de Markov à 2 états : $S = \{A, B\}$.
- Matrice de transition :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Temps de retour à l'état A : $2, 4, 6, \ldots$
- Période de A : $d(A) = \mathrm{PGCD}\{2, 4, 6, \ldots\} = 2$.
- L'état A est donc **périodique**.

Périodicité d'une CMTD

- Une CMTD est dite **périodique** si tous ses états ont la même période $d > 1$.
- Une CMTD est dite **apériodique** si au moins un état est apériodique.
- La périodicité influence la convergence vers le régime stationnaire.
- Exemple : Une CMTD avec un état apériodique peut converger plus rapidement vers l'équilibre.

Définition et méthode de calcul

Définition : Le délai d'absorption est le temps moyen nécessaire pour atteindre un état absorbant à partir d'un état transitoire dans une chaîne de Markov.

Méthode de calcul :

- On note n_i le délai moyen jusqu'à l'absorption en partant de l'état i.
- Pour chaque état non absorbant i, on résout le système d'équations :

$$n_i = 1 + \sum_{j \in S} P_{ij} \cdot n_j$$

  où :

  - S est l'ensemble des états non absorbants,
  - P_{ij} est la probabilité de transition de i à j.

Exemple

Problème : Considérons une chaîne de Markov avec 3 états :

- États non absorbants : $S = \{1, 2\}$
- État absorbant : $\{3\}$

Matrice de transition P :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équations :

$$\begin{cases} n_1 = 1 + 0.5 \cdot n_1 + 0.3 \cdot n_2 \\ n_2 = 1 + 0.4 \cdot n_1 + 0.4 \cdot n_2 \end{cases}$$

Résolution : En résolvant le système, on trouve :

$$n_1 = 5 \quad \text{et} \quad n_2 = 5$$

Interprétation : En partant de 1 ou 2, il faut en moyenne 5 étapes pour atteindre l'état absorbant