

Série d'exercices N1

Exercice 01 :

1. A partir de l'opérateur d'évolution $U(t_b, t_a)$ construire, dans l'espace des phase, le propagateur $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ relatif à un système physique ayant le Hamiltonien

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(x). \quad (1)$$

2. Par intégrations successives sur les impulsions donner l'expression du propagateur dans l'espace des configurations en montrant ainsi que cette formulation est basée sur le Lagrangien.

Exercice 02 :

On considère un système quantique dépendant du temps décrit par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2)$$

où $\hat{H}(t)$ est considéré hermitien. Dans ce cas, les solutions de l'équation (2) vérifient les propriétés suivantes

$$\langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle = \delta_{nm} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)| = 1 \quad (3)$$

1. On définit l'opérateur

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t_0)| \quad (4)$$

Montrer que :

- (a) $\hat{U}(t, t_0)$ est unitaire.
- (b) $\hat{U}(t, t_0)$ satisfait l'équation

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (5)$$

- (c) $\hat{U}(t, t_0)$ obéit à la loi de décomposition

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_0). \quad (6)$$

2. L'opérateur $\hat{U}(t, t_0)$ n'est rien d'autre que l'opérateur d'évolution associé à l'hamiltonien $\hat{H}(t)$.
 - (a) Ecrire, sans démonstration, le propagateur $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ relatif à $\hat{H}(t)$ en fonction de $\hat{U}(t, t_0)$
 - (b) En déduire que $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ admet la décomposition suivante

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x_b, t_b) \psi_n^*(x_a, t_a) \quad (7)$$

Exercice 03 :

Pour un potentiel dependant du temps $\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x, t)$, l'opérateur d'évolution qui verifie l'équation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad \text{avec} \quad \hat{U}(t_0, t_0) = 1 \quad (8)$$

est

$$\hat{U}(t, t') = \mathbf{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') dt' \right\} \quad (9)$$

1. Montrer que si $\hat{H}(t)$ est hermitien $\hat{U}(t, t_0)$ est alors unitaire.
2. Montrer la loi de décomposition

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_0) \quad (10)$$

3. Construire, dans l'espace des phase, le propagateur $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ relatif à $\hat{H}(t)$.

Exercice 04 :

Le propagateur de Feynman associé à une particule libre est défini par

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \left(\frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) \right]$$

1. Par integrations successives sur les impulsions, donner l'expression du propagateur dans l'espace des configurations.
2. En effectuant les integrations sur les positions intermédiaires, calculer $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$.

Exercice 05 :

1. Pour une particule libre nous avons

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \left(\frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) \right]$$

En ecrivant le dernier facteur sous la forme

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) \right] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_N x_N - p_1 x_0) - \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_{n+1} - p_n) \right]$$

et en effectuant les integrations sur les coordonnées intermédiaires, montrer que

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \left(\frac{dp_N}{2\pi\hbar} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_N (x_N - x_0) \right] \int \prod_{n=1}^{N-1} dp_n \prod_{n=1}^{N-1} \delta(p_{n+1} - p_n) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon \right)$$

2. En effectuant maintenant les integrations sur $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{N-1}$ et en notant $p_N = p$, ecrire $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ sous la forme

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int dp \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_p (t_b - t_a) \right) \varphi_p(x_b) \varphi_p^*(x_a) \quad (11)$$

Exercice 06 :

1. Le propagateur infinitésimal $\mathcal{K}(x, t + \epsilon; y, t)$ est donné par

$$\mathcal{K}(x, t + \epsilon; y, t) = \langle x | \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H \epsilon \right] | y \rangle$$

Montrer que, pour $H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(x)$,

$$\mathcal{K}(x, t + \epsilon; y, t) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(m \frac{(x - y)^2}{2\epsilon} - V(\lambda x + (1 - \lambda)y) \epsilon \right) \right]. \quad (12)$$

2. A partir de l'équation

$$\psi(x, t + \Delta t) = \int dy \mathcal{K}(x, t + \Delta t; y, t) \psi(y, t). \quad (13)$$

dériver l'équation de Schrödinger.

Exercice 07 :

Considérons une particule de masse m qui peut se mouvoir dans un espace à 2 dimensions. En présence d'un potentiel $V(\hat{x}, \hat{y})$, le Hamiltonien de cette particule s'écrit

$$H = \frac{(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2)}{2m} - \mathcal{V}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (14)$$

On définit le propagateur associé à cette particule par

$$K(x_b, y_b, x_a, y_a; T) = \langle x_b, y_b | U(t_b, t_a) | x_a, y_a \rangle \quad (15)$$

où $U(t_b, t_a)$ est l'opérateur d'évolution.

1. Construire la forme "intégrales de chemins" de $K(x_b, y_b, t_b; x_a, y_a, t_a)$
2. A partir du propagateur infinitésimal $K(x, y, t + \epsilon; \eta, \zeta, t)$, avec

$$\psi(x, y, t + \epsilon) = \int d\eta d\zeta K(x, y, t + \epsilon; \eta, \zeta, t) \psi(\eta, \zeta, t), \quad (16)$$

dériver l'équation de Schrödinger.

Exercice 08 :

On considère maintenant une particule de masse m et de charge e soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B} = \text{rot } \vec{\mathcal{A}}$. Le potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}} \equiv \vec{\mathcal{A}}(\vec{r})$ est une fonction de $\vec{r} = (x, y, z)$.

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{r}} \right)^2 + e \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \quad (17)$$

Comme dans la première partie nous considérons le point intermédiaire $\vec{r}_\lambda = \lambda \vec{r} + (1 - \lambda) \vec{r}'$ et nous écrivons le propagateur infinitésimal comme

$$\mathcal{K}(\vec{r}, t + \epsilon; \vec{r}', t) = \left(\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}} \right)^3 \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(m \frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{2\epsilon} + e (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{\mathcal{A}}(\lambda \vec{r} + (1 - \lambda) \vec{r}') \right) \right]. \quad (18)$$

avec

$$\psi(\vec{r}, t + \epsilon) = \int d\vec{r}' \mathcal{K}(\vec{r}, t + \epsilon; \vec{r}', t) \psi(\vec{r}', t). \quad (19)$$

1. En posant $\vec{r}' = \vec{q} + \vec{r}$, montrer que

$$\psi(\vec{r}, t + \epsilon) = \left(\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}} \right)^3 \int d\vec{q} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(m \frac{\vec{q}^2}{2\epsilon} \right) \right] F(\vec{q}) \quad (20)$$

où $F(\vec{q})$ est donnée par

$$F(\vec{q}) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} e\vec{q} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r} + (1 - \lambda)\vec{q}) \right] \psi(\vec{q} + \vec{r}, t). \quad (21)$$

2. En introduisant la transformée de Fourier

$$F(\vec{q}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{q}} \tilde{F}(\vec{k}) \quad (22)$$

montrer que

$$\int d\vec{q} \exp \left(-\frac{m}{2i\hbar\epsilon} \vec{q}^2 \right) F(\vec{q}) = \left(\sqrt{\frac{2i\pi\hbar\epsilon}{m}} \right)^3 \left(F(\vec{q}) + \frac{i\hbar\epsilon}{2m} (\vec{\nabla}_q)^2 F(\vec{q}) \Big|_{\vec{q}=0} + \dots \right) \quad (23)$$

où $\vec{\nabla}_q = \frac{\partial}{\partial q_x} \tilde{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial q_y} \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial q_z} \tilde{\mathbf{k}}$.

3. En déduire alors que

$$\psi(\vec{r}, t + \epsilon) = \psi(\vec{r}, t) + \frac{i\hbar\epsilon}{2m} (\vec{\nabla}_q)^2 F(\vec{q}) \Big|_{\vec{q}=0} + \dots \quad (24)$$

4. Calculer $(\vec{\nabla}_q)^2 F(\vec{q}) \Big|_{\vec{q}=0}$ et montrer que

$$(\vec{\nabla}_q)^2 F(\vec{q}) \Big|_{\vec{q}=0} = \left[\left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \right)^2 + \frac{ie}{\hbar} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r})) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (25)$$

Ici $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\mathbf{k}}$.

5. Montrer alors que $\psi(\vec{r}, t)$ vérifie l'équation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) \right)^2 + \frac{ie}{\hbar} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r})) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (26)$$

et justifier pourquoi nous devons prendre le midpoint $\lambda = \frac{1}{2}$.

Exercice 09 :

On considère un système physique décrit par le lagrangien quadratique

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m(t) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m(t) \omega^2(t) x^2 + j(t) x \quad (27)$$

où $m(t)$, $\omega(t)$ et $j(t)$ sont des fonctions ne dépendant que du temps t .

1. Montrer que le propagateur relatif à ce système s'écrit sous la forme

$$\mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0) = A(T) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{cl} \right), \quad (28)$$

où $S_{cl}(t)$ est l'action classique du système et $A(T)$ est une fonction de $T = t_b - t_a$.

2. Montrer que pour un oscillateur harmonique ($m(t)$ et $\omega(t)$ sont des constantes et $j(t) = 0$), la solution classique s'écrit

$$x_{cl}(t) = \frac{1}{\sin \omega T} [x_b \sin \omega t + x_a \sin \omega (T - t)] \quad (29)$$

Calculer alors l'action classique.

3. Calculer $A(T)$ et montrer que

$$A(T) = \sqrt{\frac{1}{2i\pi\hbar} \left| \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_a \partial x_b} \right|}. \quad (30)$$

Exercice 10 :

On se propose de calculer le propagateur associé à une particule forcée décrite par le lagrangien

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + kx \quad (31)$$

où k est une constante.

1. Montrer le propagateur relatif à ce système s'écrit sous la forme

$$K(x_b, x_a, t_b - t_a) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[x_{cl}(t)] \right), \quad (32)$$

où $S[x_{cl}(t)]$ est l'action classique du système et $T = t_b - t_a$.

2. Montrer que la solution classique est de la forme

$$x_{cl}(t) = \frac{k}{2m} t^2 + \alpha t + \beta \quad (33)$$

avec

$$\alpha = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} - \frac{k}{2m} (t_b + t_a) \quad \text{et} \quad \beta = \frac{x_a t_b - x_b t_a}{t_b - t_a} + \frac{k}{2m} t_b t_a$$

3. En utilisant l'équation du mouvement, écrire $S[x_{cl}(t)]$ sous la forme

$$S[x_{cl}(t)] = \frac{1}{2} m x_{cl}(t) \dot{x}_{cl}(t) \Big|_{t_a}^{t_b} + \frac{1}{2} k \int_{t_a}^{t_b} x_{cl}(t) dt \quad (34)$$

et montrer que $K(x_b, x_a, T)$ est donné par

$$K(x_b, x_a, T) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{T} + \frac{k}{2} T (x_a + x_b) - \frac{k^2}{24m} T^3 \right] \right\}. \quad (35)$$

Exercice 11 :

1. A partir de l'opérateur d'évolution $U(t_b, t_a)$ construire, dans l'espace des phases, le propagateur $\mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0)$ relatif à une particule de masse m soumise à un potentiel linéaire ;

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} - k\hat{x}. \quad (36)$$

2. Considérons maintenant l'intégrale de chemins

$$\mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0) = \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \prod_{n=1}^N \left(\frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n^2}{2m} - kx_{n-1} \right) \varepsilon \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) \right]$$

En écrivant le dernier facteur sous la forme

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N p_n (x_n - x_{n-1}) \right] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_N x_N - p_1 x_0) - \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N-1} x_n (p_{n+1} - p_n) \right]$$

et en effectuant les intégrations sur les coordonnées intermédiaires, montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0) &= \int \left(\frac{dp_N}{2\pi\hbar} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_N x_N - p_1 x_0 + k\varepsilon x_0] \right\} \\ &\quad \int \prod_{n=1}^{N-1} dp_n \prod_{n=1}^{N-1} \delta(p_{n+1} - p_n - k\varepsilon) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{p_n^2}{2m} \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (37)$$

3. En faisant le changement $\tilde{p}_n = p_n - nk\varepsilon$, montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0) &= \int \left(\frac{d\tilde{p}_N}{2\pi\hbar} \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\tilde{p}_N x_N - \tilde{p}_N x_0 + N\varepsilon k x_N] \right\} \\ &\quad \int \prod_{n=1}^{N-1} d\tilde{p}_n \prod_{n=1}^{N-1} \delta(\tilde{p}_{n+1} - \tilde{p}_n) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{(\tilde{p}_n + nk\varepsilon)^2}{2m} \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (38)$$

4. En effectuant maintenant les intégrations sur $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_{N-1}$ et en notant $\tilde{p}_N = p$, écrire $\mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0)$ sous la forme

$$\mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0) = \int \left(\frac{dp}{2\pi\hbar} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p(x_b - x_a) + kT x_b) \right] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{(p + kt)^2}{2m} dt \right]$$

5. Calculer alors $\mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0)$.

$$\mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2T} (x_b - x_a)^2 + \frac{1}{2} kT (x_b + x_a) - \frac{1}{24} \frac{k^2}{m} T^3 \right) \right]$$

Exercice 12 :

On considère un oscillateur harmonique ayant le Hamiltonien

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{x}^2 \quad (39)$$

1. A partir de l'opérateur d'évolution $U(t_b, t_a)$ construire, dans l'espace des phases, le propagateur $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ relatif à ce système.
2. Par intégrations successives sur les impulsions donner l'expression du propagateur dans l'espace des configurations en introduisant le lagrangien

$$L = \int \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right) dt \quad (40)$$

3. En faisant un developpement autour du chemin classique $x = x_{cl} + q$, avec $q(t_b) = q(t_a) = 0$, montrer que $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}\right) \int Dq \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2\right) dt\right\} \quad (41)$$

4. Dans le cours nous avons vu que

$$\int Dq \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2\right) dt\right\} = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar f(t_b)}}. \quad (42)$$

où $f(t)$ est une solution de l'équation classique $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ qui vérifie les conditions $f(t_a) = 0$ et $\dot{f}(t_a) = 1$. Soit $g(t)$ une autre solution qui vérifie les conditions $g(t_a) = 1$ et $\dot{g}(t_a) = 0$.

- (a) Montrer que $f(t)$ et $g(t)$ sont linéairement indépendantes.
(b) Montrer alors que la solution classique peut s'écrire

$$x_{cl}(t) = x_a g(t) + \dot{x}_a f(t) \quad (43)$$

et en déduire que

$$f(t) = \frac{\partial x_{cl}(t)}{\partial \dot{x}_a} \quad (44)$$

5. Montrer que

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial x_a} = -p_a = -m\dot{x}_a \quad (45)$$

et en déduire que

$$\frac{1}{f(t_b)} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_b \partial x_a} \quad (46)$$

Exercice 13 :

1. Montrer que le propagateur $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ admet la décomposition spectrale suivante :

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi^*(x_b) \psi(x_a) \quad (47)$$

2. En utilisant la formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} H_n(X) H_n(Y) = \frac{1}{\sqrt{1-4\xi^2}} \exp\left[\frac{4\xi}{1-4\xi^2} (XY - \xi X^2 - \xi Y^2)\right]. \quad (48)$$

extraire les fonctions d'ondes pour un oscillateur harmonique à partir du propagateur associé.

Exercice 14 :

On considère un oscillateur hamonique de masse m , de fréquence ω et de charge e soumis à un champ électrique E . Le propagateur associé admet la représentation suivante

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}x \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + eEx\right]\right\}. \quad (49)$$

1. En introduisant la transformation

$$x = \rho(t) q + C \quad \text{et} \quad ds = \frac{dt}{\rho^2}$$

où C est une constante et $\rho(t)$ une solution de l'équation

$$\ddot{\rho} + \omega^2 \rho = 0. \quad (50)$$

Déterminer la constante C telle que

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x^2 - kx \right] dt = \frac{m}{2} \rho \dot{\rho} q^2 \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{S_a}^{S_b} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 \right] ds \quad (51)$$

2. Montrer que

$$\mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{\rho(t_0) \rho(t_N)}} \mathcal{D}q = \frac{1}{\sqrt{\rho(t_0) \rho(t_N)}} \left(\prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\sigma_n}} \right) \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \quad (52)$$

3. En déduire que le problème de l'oscillateur harmonique se réduit à celui de la particule libre

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{1}{\sqrt{\rho_a \rho_b}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} x_b^2 - \frac{\dot{\rho}_a}{\rho_a} x_a^2 \right) \right\} K_0(q_b, S_b; q_a, S_a) \quad (53)$$

où $K_0(q_b, S_b; q_a, S_a)$ est le propagateur de la particule libre

$$K_0(q_b, S_b; q_a, S_a) = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{S_a}^{S_b} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 \right] ds \right\}. \quad (54)$$

4. Trouver alors l'expression de $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$.

Exercice 15 :

On considère une particule de masse m et de charge e soumise à l'action d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{k}$ et on s'intéresse à son mouvement dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}$ (c-à-d le plan (xoy)). Dans ce cas le lagrangien de cette particule s'écrit

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eB}{2c} (x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (55)$$

On définit le propagateur associé à cette particule par

$$K(x_b, y_b, x_a, y_a; T) = \int Dx Dy \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eB}{2c} (x\dot{y} - y\dot{x}) \right] \right\} \quad (56)$$

où

$$Dx Dy \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\epsilon} \right)^N \prod_{i=1}^{N-1} (dx_i dy_i). \quad (57)$$

avec $\epsilon = t_i - t_{i-1}$ et $N\epsilon = T$.

1. En introduisant la transformation (rotation)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (58)$$

Montrer que le propagateur $K(x_b, y_b, x_a, y_a; T) \equiv \tilde{K}(X_b, Y_b, X_a, Y_a; T)$ est le produit de deux propagateurs associés à l'oscillateur harmonique unidimensionnel d'où nous en déduisons l'expression

$$K(x_b, y_b, x_a, y_a; T) = \frac{m\omega}{2i\pi\hbar \sin(\omega T)} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2] \cos(\omega T) - 2(x_b y_a - y_b x_a) \sin(\omega T) \right\} \quad (59)$$

2. Utiliser les coordonnées polaire pour écrire $K(x_b, y_b, x_a, y_a; T)$ sous la forme

$$K(x_b, y_b, x_a, y_a; T) = \frac{m\omega}{2i\pi\hbar \sin(\omega T)} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} (r_b^2 + r_a^2) \cos(\omega T) \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega r_b r_a}{\sin(\omega T)} \cos(\theta_b - \theta_a + \omega T) \right\} \quad (60)$$

3. En utilisant la formule

$$\exp(ia \cos \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(ia) e^{ik\varphi} \quad (61)$$

où $I_k(ia)$ est la fonction de Bessel modifiée, montrer que

$$K(x_b, y_b, x_a, y_a; T) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik(\theta_b - \theta_a + \omega T)} \frac{m\omega}{2i\pi\hbar \sin(\omega T)} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} (r_b^2 + r_a^2) \cos(\omega T) \right\} I_k \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega r_b r_a}{\sin(\omega T)} \right). \quad (62)$$

4. Finalement, à l'aide de la formule de Hille-Hardy

$$\frac{\xi^{-k/2}}{1-\xi} \exp \left[-\frac{1}{2}(x+y) \frac{1+\xi}{1-\xi} \right] I_k \left(\frac{2\sqrt{xy\xi}}{1-\xi} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n n! e^{-\frac{1}{2}(x+y)}}{\Gamma(n+k+1)} (xy)^{k/2} L_n^k(x) L_n^k(y), \quad (63)$$

écrire $K(x_b, y_b, x_a, y_a; T)$ sous la forme

$$K(x_b, y_b, x_a, y_a; T) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{nk} T} \psi^*(\theta_a, r_a) \psi(\theta_b, r_b). \quad (64)$$

Exercice 16 :

On se propose dans cet exercice de calculer le propagateur relatif à un oscillateur hamonique avec une fréquence variable (c-à-d dépendante du temps)

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \Omega^2(t) x^2 \right] \right\}. \quad (65)$$

Soit $\rho(t)$ une solution de l'équation

$$\ddot{\rho} + \Omega^2(t) \rho = \frac{\omega^2}{\rho^3} \quad (66)$$

où ω^2 est une constante

1. En introduisant la transformation $x = \rho(t) q$ et $ds = \frac{dt}{\rho^2}$, montrer que

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \Omega^2(t) x^2 \right] dt = \frac{m}{2} \rho \dot{q}^2 \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{S_a}^{S_b} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right] ds \quad (67)$$

2. Pour la mesure $\mathcal{D}x$, nous écrivons d'abord

$$\mathcal{D}x = \left(\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}} \right)^N \prod_{n=1}^{N-1} dx_n = \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(\Delta t_n)}} \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \quad (68)$$

où $\Delta t_n = t_n - t_{n-1} = \epsilon$. Nous posons ensuite $\sigma_n = s_n - s_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dt}{\rho^2}$.

- (a) Montrer que

$$\prod_{n=1}^N \sigma_n = \prod_{n=1}^N \frac{\Delta t_n}{\rho(t_n) \rho(t_{n-1})} \quad (69)$$

- (b) En déduire que la mesure $\mathcal{D}x$ peut s'écrire comme

$$\mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{\rho(t_0) \rho(t_N)}} \left(\prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\sigma_n}} \right) \prod_{n=1}^{N-1} dq_n = \frac{1}{\sqrt{\rho(t_0) \rho(t_N)}} \mathcal{D}q \quad (70)$$

3. Montrer alors que le problème de l'oscillateur harmonique dépendant du temps se réduit à un oscillateur harmonique avec une fréquence constante

$$\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{1}{\sqrt{\rho_a \rho_b}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} x_b^2 - \frac{\dot{\rho}_a}{\rho_a} x_a^2 \right) \right\} K_0(q_b, S_b; q_a, S_a) \quad (71)$$

où

$$K_0(q_b, S_b; q_a, S_a) = \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{S_a}^{S_b} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \right] ds \right\}. \quad (72)$$

4. L'expression exacte du propagateur $K_0(q_b, S_b; q_a, S_a)$ est donnée par

$$K_0(q_b, S_b; q_a, S_a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2i\pi\hbar \sin \omega S}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin \omega S} [(q_b^2 + q_a^2) \cos \omega S - 2q_b q_a] \right\}.$$

Montrer que le propagateur initial $\mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{\rho^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_a \rho_b}} \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi \hbar}} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} \left(\frac{\omega}{\rho_a^2} + i \frac{\dot{\rho}_a}{\rho_a} \right) x_a^2 \right\} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{x_a}{\rho_a} \right) \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} \left(\frac{\omega}{\rho_b^2} - i \frac{\dot{\rho}_b}{\rho_b} \right) x_b^2 \right\} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{x_b}{\rho_b} \right) \end{aligned}$$

et en déduire la solution de l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique dépendant du temps

$$\begin{aligned} \psi_n(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n! \rho(t)}} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_n \int \frac{dt}{\rho^2} \right] \\ &\quad \exp \left[-\frac{m}{2\hbar} \left(\frac{\omega}{\rho^2(t)} - i \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) x^2 \right] H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{x}{\rho(t)} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Exercice 17 :

On se propose de calculer le propagateur associé à un oscillateur harmonique de fréquence ω

$$K(x_b, x_a; T) = \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right] dt \right\}, \quad (74)$$

en introduisant la nouvelle variable z et le parametre d'évolution s avec

$$x = z \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sin^2(\omega t)}$$

1. Montrer que le calcul du propagateur $K(x_b, x_a; T)$ se ramène au calcul du propagateur relatif à la particule libre

$$K(x_b, x_a; T) = \sqrt{\frac{1}{\sin \omega t_a \sin \omega t_b}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{4} z^2 \sin(2\omega t) \Big|_{t_a}^{t_b} \right\} K_0(z_b, z_a; s_b - s_a)$$

avec

$$K_0(z_b, z_a; s_b - s_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\sigma_n}} \right) \left(\prod_{n=1}^{N-1} dz_n \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left(\frac{m}{2} \frac{(\Delta z_n)^2}{\sigma_n} \right) \right\}$$

2. Donner alors l'expression de $K_0(z_b, z_a; s_b - s_a)$ et calculer $K(x_b, x_a; T)$.

Exercice 18 :

On considère une particule de masse m soumise à une source (force). Ce système est décrit par le lagrangien

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - j(t) x \quad (75)$$

où $j(t)$ est une fonction du temps t .

1. Montrer que le propagateur relatif à ce système s'écrit sous la forme

$$K(x_b, x_a, T) = A(T) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{cl} \right), \quad (76)$$

où $S_{cl}(t)$ est l'action classique du système et $A(T)$ est une fonction de $T = t_b - t_a$.

2. Trouver l'expression de $A(T)$
3. Montrer que

$$x_c(t) = (x_b - x_a) \frac{t}{T} + x_a + \frac{1}{mT} \left[t \int_0^T (T - \tau) j(\tau) d\tau - T \int_0^t (t - \tau) j(\tau) d\tau \right] \quad (77)$$

est une solution de l'équation classique $m\ddot{x} + j(t) = 0$.

4. Montrer que l'action classique

$$S_c = \frac{1}{2} m \dot{x}_c x_c \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T j(t) x_c dt \quad (78)$$

5. Calculer alors S_c est montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$S_c = m \frac{(x_b - x_a)^2}{2T} - \frac{x_b}{T} \int_0^T t j(t) dt - \frac{x_a}{T} \int_0^T (T-t) j(t) dt - \frac{1}{2mT} \int_0^T dt \int_0^T d\tau \Delta(t, \tau) j(t) j(\tau) \quad (79)$$

où la fonction $\Delta(t, \tau)$ est donnée par

$$\Delta(t, \tau) = \theta(t - \tau) \tau (T - t) + \theta(\tau - t) t (T - \tau). \quad (80)$$

6. En déduire alors que

$$K(x_b, x_a, T) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{T} - \frac{i}{\hbar T} \int_0^T [x_b t + x_a (T - t)] j(t) dt - \frac{i}{2\hbar m T} \int_0^T dt \int_0^T d\tau \Delta(t, \tau) j(t) j(\tau) \right\}, \quad (81)$$

7. Etudier le cas particulier où $j(t)$ est une constante $j(t) = k$.

Exercice 19 :

On considère maintenant un oscillateur harmonique de fréquence ω .

$$K_{OH}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S \right\}. \quad (82)$$

avec

$$S = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) dt \quad (83)$$

1. En utilisant la relation de fermeture

$$\delta(t - s) = \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{T} t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{T} s\right) \quad (84)$$

montrer que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} m \int_0^T \dot{x}^2 dt - \frac{1}{2} m \omega^2 \int_0^T dt \int_0^T ds x(t) x(s) \delta(t - s) \\ &= \frac{1}{2} m \int_0^T \dot{x}^2 dt - \frac{m \omega^2}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^T dt x(t) \sin\left(\frac{\pi n}{T} t\right) \right]^2 \end{aligned} \quad (85)$$

2. Par l'insertion des intégrales

$$\prod_n \int du_n \delta\left(u_n - \int_0^T dt x(t) \sin\left(\frac{\pi n}{T} t\right)\right) = 1 \quad (86)$$

et

$$\delta\left(u_n - \int_0^T dt x(t) \sin\left(\frac{\pi n}{T} t\right)\right) = \frac{dp_n}{2\pi} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_n \left(u_n - \int_0^T dt x(t) \sin\left(\frac{\pi n}{T} t\right)\right)\right] \quad (87)$$

montrer que

$$K_{OH}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \prod_n \left(\int du_n \frac{dp_n}{2\pi} \right) \prod_n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{m\omega^2}{T} u_n^2 + p_n u_n \right] \right\} \\ \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - x(t) j(t) dt \right] \right\}. \quad (88)$$

avec

$$j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) \quad (89)$$

3. En effectuant maintenant les intégrations sur les u_n , montrer que

$$K_{OH}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \prod_n \left(\int \sqrt{\frac{\hbar T}{4i\pi m \omega^2}} dp_n \right) \prod_n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{T}{4m\omega^2} p_n^2 \right\} \\ \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - x(t) j(t) dt \right] \right\}. \quad (90)$$

4. En utilisant les résultats de la première partie montrer que

$$K_{OH}(x_b, t_b; x_a, t_a) = \prod_n \left(\int \sqrt{\frac{\hbar T}{4i\pi m \omega^2}} dp_n \right) \prod_n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{T}{4m\omega^2} p_n^2 \right\} \\ A(T) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m(x_b - x_a)^2}{2T} \right] \\ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \int_0^T \left(\frac{x_b - x_a}{T} t + x_a \right) \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) dt \right] \\ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \frac{1}{mT} \sum_{l,n=0}^{\infty} p_n p_l \int_0^T dt (T-t) \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) \int_0^t \tau \sin \left(\frac{\pi l}{T} \tau \right) d\tau \right]. \quad (91)$$

5. Calculer alors $K_{OH}(x_b, t_b; x_a, t_a)$.

On donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \frac{\pi}{2x} \left(\cot(\pi x) - \frac{1}{\pi x} \right) \quad (92)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2} = \frac{\pi}{2x} \left(\frac{1}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{\pi x} \right) \quad (93)$$

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad (94)$$

Exercice 20 :

I) Considérons une particule de masse m qui peut se mouvoir dans un espace à 2 dimensions.

En présence d'un potentiel central le mouvement de cette particule est décrit par le Lagrangien

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(r) \quad (95)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Ecrire la forme discrétisée du propagateur relatif à cette particule en coordonnées cartésiennes

$$K(\vec{r}_b, t_b; \vec{r}_a, t_a) \equiv K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \int Dx \int Dy \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[x(t), y(t)] \right), \quad (96)$$

2) En introduisant les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} x_n &= r_n \cos \varphi_n \\ y_n &= r_n \sin \varphi_n, \end{aligned} \quad (97)$$

à l'aide de la formule

$$\exp \left(-im \frac{r_n r_{n-1}}{\hbar \varepsilon} \cos(\Delta \varphi_n) \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} I_k \left(-im \frac{r_n r_{n-1}}{\hbar \varepsilon} \right) e^{ik \Delta \varphi_n} \quad (98)$$

et le comportement asymptotique des fonctions de Bessel modifiées

$$I_k \left(-\frac{im r_n r_{n-1}}{\hbar \varepsilon} \right) \approx \left(i \frac{\hbar \varepsilon}{2\pi m r_n r_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-im \frac{r_n r_{n-1}}{\hbar \varepsilon} - i \frac{\hbar \varepsilon}{2m r_n r_{n-1}} \left(k^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (99)$$

et en faisant en suite les intégrations successives sur les variables angulaires φ_n , montrer que le propagateur relatif au problème s'écrit sous la forme

$$K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(\varphi_b - \varphi_a)}}{2\pi} P_k(r_b, r_a; T) \quad (100)$$

avec

$$P_k(r_b, r_a; T) = \frac{1}{\sqrt{r_b r_a}} \int \mathcal{D}r \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left[\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{(k^2 - 1/4) \hbar^2}{2m r^2} - V(r) \right] dt \right\}. \quad (101)$$

II) Considérons maintenant un oscillateur harmonique isotrope à 2 dimensions.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (102)$$

1) Comme le Lagrangien (102) est quadratique nous pouvons calculer ce propagateur directement en coordonnée cartésiennes.

*) Sans faire les calculs donner l'expression du propagateur en (x, y) .

**) A l'aide de la formule

$$\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{m \omega r_b r_a}{\sin(\omega T)} \cos(\Delta \varphi) \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} I_{|k|} \left(\frac{m \omega r_b r_a}{\hbar i \sin(\omega T)} \right) e^{ik \Delta \varphi}, \quad (103)$$

transformer le résultat en coordonnées polaires.

2) En déduire que

$$\int \mathcal{D}r \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left[\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{(k^2 - 1/4) \hbar^2}{2mr^2} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right] dt \right\} = \frac{\sqrt{r_b r_a}}{\sin(\omega T)} \mathcal{I}_k \left(\frac{m \omega r_b r_a}{\hbar i \sin(\omega T)} \right) \exp \left[i \frac{m \omega}{2 \hbar} (r_b^2 + r_a^2) \cot(\omega T) \right] \quad (104)$$

3) En utilisant la formule de Hille-Hardy

$$\frac{t^{-\alpha/2}}{1-t} \exp \left[-\frac{1}{2} (x+y) \frac{1+t}{1-t} \right] I_\alpha \left(\frac{2\sqrt{xyt}}{1-t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n n! e^{-\frac{1}{2}(x+y)}}{\Gamma(n+\alpha+1)} (xy)^{\alpha/2} L_n^\alpha(x) L_n^\alpha(y), \quad (105)$$

trouver les fonctions d'ondes relatives au problème.

Exercice 21 :

Le propagateur euclidien associé à un oscillateur harmonique de fréquence ω est donné par

$$K_E(x_b, x_a; T) = \int Dx \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right] \right\} \quad (106)$$

où

$$Dx \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\epsilon}} \right)^N \left(\prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right). \quad (107)$$

avec $\epsilon = t_i - t_{i-1}$ et $N\epsilon = T$.

1. Montrer que

$$K_E^{OH}(x_b, x_a; T) = \exp \left[\frac{m\omega}{2} (x_b^2 - x_a^2) \right] \times \int Dx \exp \left[-\int_0^T dt \frac{m}{2} (\dot{x} + \omega x)^2 \right]. \quad (108)$$

2. En introduisant la nouvelle variable z et le paramètre d'évolution τ avec

$$\tau = \frac{1}{2\omega} \exp(2\omega t) \quad \text{et} \quad z(\tau) = x(t) \exp(\omega t) \quad (109)$$

montrer que

$$Dx = \prod_{i=1}^{N-1} dz_i \prod_{i=1}^{N-1} \exp(-\omega t_i) \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\epsilon}} \right)^N = \exp\left(\frac{\omega T}{2}\right) \prod_{i=1}^{N-1} dz_i \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta\tau_i}} \right)^N$$

où

$$\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1} \simeq \epsilon \exp(2\omega \tilde{t}_i) \quad \text{avec} \quad \tilde{t}_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$$

3. Montrer alors que

$$K_E^{OH}(x_b, x_a; T) = \exp \left[\frac{m\omega}{2} (x_b^2 - x_a^2) + \frac{\omega T}{2} \right] \times \int Dz \exp \left[-\int_{\tau_a}^{\tau_b} d\tau \frac{m}{2} \dot{z}^2 \right], \quad (110)$$

où

$$\tau_b = \frac{\exp(2\omega T)}{2\omega} \quad \text{et} \quad \tau_a = \frac{1}{2\omega} \quad (111)$$

4. Sachant que le propagateur libre s'écrit

$$K_E^{PL}(z_b, z_a; \tau_b - \tau_a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar(\tau_b - \tau_a)}} \exp \left[-\frac{m}{2\hbar} \frac{(z_b - z_a)^2}{\tau_b - \tau_a} \right],$$

montrer que

$$K_E^0(x_b, x_a; T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\omega T)}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sinh(\omega T)} [(x_b^2 + x_a^2) \cosh(\omega T) - 2x_b x_a] \right\} \quad (112)$$

Exercice 22 :

On considère le propagateur

$$\mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0) = \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S \right\} \quad (113)$$

avec

$$S = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - \frac{\lambda}{24} x^4 \right) dt \quad (114)$$

1. En utilisant la relation de fermeture

$$\delta(t - s) = \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) \sin \left(\frac{\pi n}{T} s \right) \quad (115)$$

montrer que

$$S = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) dt - \frac{\lambda}{12T} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^T dt x^2(t) \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) \right]^2 \quad (116)$$

2. Par l'insertion des intégrales

$$\prod_n \int du_n \delta \left(u_n - \int_0^T dt x^2(t) \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) \right) = 1 \quad (117)$$

et

$$\delta \left(u_n - \int_0^T dt x(t) \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) \right) = \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_n \left(u_n - \int_0^T dt x^2(t) \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) \right) \right] \quad (118)$$

montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_b, T; x_a, 0) &= \prod_n \left(\int du_n \frac{dp_n}{2\pi} \right) \prod_n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\lambda}{12T} u_n^2 + p_n u_n \right] \right\} \\ &\quad \int Dx \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^T \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \Omega^2(t) x^2 \right] dt \right\}. \end{aligned} \quad (119)$$

avec

$$\frac{1}{2} m \Omega^2(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sin \left(\frac{\pi n}{T} t \right) \quad (120)$$

3. Effectuer maintenant les intégrations sur les u_n et interpreter le résultat.

Exercice 23 :

On s'intéresse dans cet exercice à l'intégrale fonctionnelle

$$K_E(0, 0; T) = \int Dx \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 + \lambda W(x) \right] \right\} \quad (121)$$

1. Montrer que

$$K_E(0, 0; T) = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \lambda \int_0^T dt W \left(\hbar \frac{\delta}{\delta j(t)} \right) \right\} K_E^0[j] \Big|_{j=0} \quad (122)$$

où

$$K_E^0[j] = \int Dx \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 - j(t) x \right] \right\}. \quad (123)$$

2. Montrer que

$$K^0[j] = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\omega T)}} \exp \left\{ \frac{1}{2\hbar} \int_0^T dt \int_0^T dt' G(t, t') j(t) j(t') \right\} \quad (124)$$

avec

$$G(t, t') = \frac{1}{m} \int \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{1}{\kappa^2 + \omega^2} e^{i\kappa(t-t')}. \quad (125)$$

3. A l'ordre 1 en λ , $K_E(0, 0; T)$ s'écrit

$$K_E(0, 0; T) = K_E^0[0] - \lambda \frac{1}{\hbar} \int_0^T dt W \left(\hbar \frac{\delta}{\delta j(t)} \right) K_E^0[j] \Big|_{j=0} + \dots \quad (126)$$

Montrer que

$$-\frac{\hbar}{T} \ln K_E(0, 0; T) = -\frac{\hbar}{T} \ln K_E^0[0] + \lambda \frac{1}{T} \frac{1}{K_E^0[0]} \int_0^T dt W \left(\hbar \frac{\delta}{\delta j(t)} \right) K_E^0[j] \Big|_{j=0} + \dots \quad (127)$$

4. Pour $W(x) = \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$, montrer que

$$\frac{1}{K_E^0[0]} \left(\hbar \frac{\delta}{\delta j(t)} \right)^{2n} K_E^0[j] \Big|_{j=0} = \frac{(2n)!}{2^n n!} [\hbar G(t, t)]^n \quad (128)$$

Calculer alors la correction à l'énergie de l'état fondamental à l'ordre 1 en λ .

Exercice 24 :

On s'intéresse dans cet exercice à l'intégrale fonctionnelle

$$K_E(0, 0; T) = \int Dx \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 + \lambda W(x) \right] \right\} \quad (129)$$

1. Montrer que

$$K_E(0, 0; T) = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \lambda \int_0^T dt W \left(\hbar \frac{\delta}{\delta j(t)} \right) \right\} K_E^0[j] \Big|_{j=0} \quad (130)$$

où

$$K_E^0[j] = \int Dx \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^T dt \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 - j(t) x \right] \right\}. \quad (131)$$

2. Montrer que

$$K^0[j] = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\omega T)}} \exp \left\{ \frac{1}{2\hbar} \int_0^T dt \int_0^T dt' G(t, t') j(t) j(t') \right\} \quad (132)$$

avec

$$G(t, t') = \frac{1}{m} \int \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{1}{\kappa^2 + \omega^2} e^{i\kappa(t-t')}. \quad (133)$$

3. A l'ordre deux en λ , $K_E(0, 0; T)$ s'écrit

$$K_E(0, 0; T) = K_E^{(0)}(0, 0; T) + \lambda K_E^{(1)}(0, 0; T) + \lambda^2 K_E^{(2)}(0, 0; T) + \dots \quad (134)$$

Donner les expressions de $K_E^{(0)}(0, 0; T)$, $K_E^{(1)}(0, 0; T)$ et $K_E^{(2)}(0, 0; T)$.

4. Montrer alors que

$$-\frac{\hbar}{T} \ln K_E(0, 0; T) = -\frac{\hbar}{T} \ln K_E^{(0)}(0, 0; T) - a\lambda - \lambda^2 \left(b - \frac{1}{2}a^2 \right) + \dots \quad (135)$$

où a et b sont des constantes à déterminer. Interpréter le résultat.

5. Pour $W(x) = \frac{1}{3!}x^3$, montrer que $a = 0$ et calculer b .

6. Calculer alors la correction à l'énergie de l'état fondamental à l'ordre 2 en λ .

Exercice 25 :

On considère une particule de masse m soumise à une source (force). Ce système est décrit par le lagrangien

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - j(t)x \quad (136)$$

où $j(t)$ est une fonction du temps t .

$$K(x_b, x_a, T) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar T}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{T} - \frac{i}{\hbar T} \int_0^T [x_b t + x_a (T - t)] j(t) dt - \frac{i}{2\hbar m T} \int_0^T dt \int_0^T d\tau \Delta(t, \tau) j(t) j(\tau) \right\}, \quad (137)$$

1. Calculer la valeur moyenne $\langle x(t)x(s) \rangle$ et montrer que

$$\langle [x(t + \epsilon) - x(t)]^2 \rangle = \langle 1 \rangle \left[\frac{i\hbar}{m} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right].$$

2. Interpréter le résultat en calculant la valeur moyenne $\langle [\hat{x}(t), \hat{p}(t)] \rangle$.

Bon courage
\$à l'œuvre