# Série d'exercices

## Exercice 01 :

La fonctionnelle génératrice $Z[J]$ pour un champ scalaire réel est donnée par

$$Z\,[J] = \mathcal{N} \int D\varphi \; \exp\left( iS[\varphi, J] \right), \;\; \text{avec } iS[\varphi, J] = iS[\varphi] + i \int d^4x \, J(x)\, \varphi(x)$$

où $S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}\left(\varphi, \partial_\mu \varphi\right)$ et $\mathcal{N}$ est une constante de normalisation telle que $Z[0] = 1$.
Si nous introduisons le changement $\varphi(x) \to \phi\,(x)$ avec

$$\varphi(x) = \phi\,(x) + \epsilon\, \eta(x) \tag{1}$$

où $\eta(x)$ est une fonction arbitraire et $\epsilon << 1$, la fonctionnelle $S[\varphi, J]$ se developpe comme suit

$$S[\varphi, J] = \; S[\phi, J] + \epsilon \int d^4x \; \eta(x) \, \frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi(x)} \; + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \tag{2}$$

1. En considerant ce changement, montrer alors que $Z\,[J]$ peut s'écrire sous la forme

$$Z\,[J] = \mathcal{N} \int D\phi \; \left( 1 + i\epsilon \int d^4x \; \eta(x) \, \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right) \exp\left\{ \, iS[\phi, J] \right\}, \tag{3}$$

2. En déduire que

$$\int D\phi \; \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \exp\left\{ \, iS[\phi, J] \right\} = 0 \tag{4}$$

3. Ecrire la dernière équation sous la forme

$$\int D\phi \;\; \left( \mathcal{I}\,[\phi] + J(x) \right) \exp\left( iS[\phi] + i \int d^4x \; J(x)\, \phi\,(x) \right) = 0 \tag{5}$$

avec $\mathcal{I}\,[\phi] = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)}$et en déduire que

$$\left( \mathcal{I}\left[ -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right] + J(x) \right) Z\,[J] = 0. \tag{6}$$

4. Pour un champ scalaire réel décrit par l'action

$$S[\varphi] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \left( \, \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \, \right) - V(\varphi) \right] \,, \tag{7}$$

montrer que

$$K\,[\phi] = -\left( \partial_\mu \, \partial^\mu + m^2 \right) \phi - V'\,(\phi) \tag{8}$$

et que $Z\,[J]$ est une solution de l'équation

$$\left[ i \left( \partial_\mu \, \partial^\mu + m^2 \right) \frac{\delta}{\delta J(x)} + J(x) - V' \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z\,[J] = 0. \tag{9}$$

5. Résoudre l'équation differentielle
$$\left[ia\frac{\partial}{\partial y}+y\right]f\left(y\right)=0 \tag{10}$$
et généraliser le résultat pour trouver $Z_0\left[J\right]$ pour le champ libre.

**Exercice 02** :

La fonctionnelle génératrice $Z[J]$ pour un champ scalaire réel est une solution de l'équation
$$\left[i\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\frac{\delta}{\delta J(x)}+J(x)-V'\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]Z\left[J\right]=0. \tag{11}$$

1. Montrer que $Z_0\left[J\right]=\exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ\left(x\right)\Delta_F\left(x,y\right)J\left(y\right)\right]$ est une solution de l'équation (11) pour $V=0$.
2. Calculer le commutateur $\left[J\left(x\right),-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]$et en déduire que
$$\left[J\left(x\right),\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^n\right]=in\delta\left(x-y\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^{n-1}$$
3. Montrer alors que
$$\left[J\left(x\right),-i\int d^4yV\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right]=V'\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)$$
et que
$$\left[J\left(x\right),\left(-i\int d^4yV\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right)^n\right]=V'\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left(-i\int d^4yV\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right)^{n-1}$$
4. En déduire finalement que
$$\left[J\left(x\right),\exp\left(-i\int d^4yV\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right)\right]=V'\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\exp\left(-i\int d^4yV\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right)$$
5. Montrer que $Z\left[J\right]=N'\exp\left\{-i\int d^4yV\left(-i\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right\}Z_0\left[J\right]$ est alors, une solution pour $V$ quelconque.
6. Donner l'expression de la constante $N'$

**Exercice 03** :

Considérons l'intégrale divergente
$$\Sigma^{(1)}\;=\;i\;\frac{\lambda}{2}\,\mu_0^{4-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{k^2-m^2+i\,\epsilon}$$
à $d$ dimensions où $\mu_0$ est le parametre de masse introduit pour garder la constante de couplage $\lambda$ sans dimension.

1. A quelle dimension cette intégrale converge-t-elle ?
2. En utilisant la représentation de Fock-Schwinger pour le propagateur libre
$$\frac{1}{k^2-m^2+i\,\epsilon}\;=\;-i\int_0^\infty dT\;e^{iT(k^2-m^2+i\epsilon)}$$
et l'intégrale gaussienne habituelle, montrent que
$$\Sigma^{(1)}\;=\;\frac{\lambda}{32\pi^2}\,m^2\,\left(\frac{m^2}{4\pi\mu_0^2}\right)^{d/2-2}\;\Gamma(1-d/2)$$

3. En posant $d = 4 - 2\varepsilon$, étudier la limite $\varepsilon \to 0$.

## Exercice 04 :

Considérons un champ scalaire complexe $\Phi$ de masse $m$, dont la densité Lagrangienne est

$$\mathcal{L}_0 \; = (\partial_\mu \Phi)\,(\partial^{\,\mu}\Phi^*) - m^2 \Phi\Phi^* \; .$$

1. Montrer que cette densité lagrangienne peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}_0 \; = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\,(\partial_\mu \varphi_i)\,(\partial^{\,\mu}\varphi_i) - m^2 \varphi_i^2$$

   où $\varphi_i$ est maintenant un champ réel.

2. Calculer la fonctionnelle génératrice libre

$$Z_0\,[J^*, J] \;=\; \int \mathcal{D}\Phi\; \mathcal{D}\Phi^* \;\exp\left[i \int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J^*(x)\Phi(x) + \Phi^*(x)J(x))\right]$$

3. Calculer les fonctions à deux points $\langle \Phi^*(x_1)\Phi(x_2)\rangle$, $\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\rangle$.

## Exercice 05 :

1) Verifier, pour une fonction quelconque $F$, l'indentité suivante

$$F\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\;\exp\left(-\frac{i}{2}ax^2\right) \;=\; \exp\left(-\frac{i}{2}ax^2\right)\;\exp\left(\frac{i}{2}a\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\;F(y)\Big|_{y=-ax} \;.$$

2) Généraliser ce résultat au cas des dérivées fonctionnelles et montrer que pour un champ scalaire réel nous avons

$$Z[J] \;=\; N\;\; Z_0[J]\quad \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x d^4y \Delta_F\,(x,y)\;\frac{\delta}{\delta\varphi\,(x)}\frac{\delta}{\delta\varphi\,(y)}\;\right]\;\exp\left(-i\int d^4x\,V(\varphi)\right)\Bigg|_{\varphi=\Delta_F J} \;.$$

3) Vérifier dans la théorie $\varphi^4$ si la première correction $z_1[J]$ peut être obtenue à partir de cette représentation.

## Exercice 06 :

Considérons le système du champ scalaire réel $\varphi$ dans la théorie $\varphi^4$. La densité Lagrangienne de ce système est donnée par

$$\mathcal{L} = \;\frac{1}{2}\;\;(\,\partial_\mu\varphi)\,(\,\partial^\mu\varphi) - \;\frac{1}{2}m^2\,\varphi^2\; - \frac{\lambda}{4!}\,\varphi^4\,.$$

En plus de la source habituelle $J(x)$, nous introduisons une source $K(x)$ qui se couple à $\varphi^2$

$$Z[J,K] \;:=\; \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ i \int d^4x\;\left[\,\mathcal{L} + J(x)\varphi(x) + K(x)\varphi^2(x)\right]\right\}\;.$$

1) Montrer que la fonctionnelle génératrice de la théorie en interaction est donnée par

$$Z[J] \;=\; \exp\left(\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x\,\frac{\delta^2}{\delta K(x)^2}\right)\;Z_0[J,K]\Bigg|_{K=0} \;.$$

3) Montrer que

$$Z_0[J,K] \;=\; \mathrm{N.}\,\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J\,(x)\,\Delta_K\,(x,y)\,J\,(y) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ln\mathcal{O}_K\right) \;\equiv\; e^{iW_0[J,K]}$$

avec $O_K = -\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + K(x)$ et $O_K \Delta_K(x,y) = \delta(x,y)$.
4) Montrer que la correction à la fonctionelle génératrice à l'ordre 1 est donnée par

$$z_1[J] = \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left[ i \frac{\delta^2 W_0}{\delta K(x)^2} - \left( \frac{\delta W_0}{\delta K(x)} \right)^2 \right]_{K=0} Z_0[J].$$

*Bon courage*
$\$\mathring{a}\ell\mathring{a}\hbar$