Université Mohamed Seddik Benyahia
Faculté de SEI, Département de Physique

Matière : MQR.

Exercices

Exercice 01

On considère une particule relativiste de spin 0 de charge e soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = \mathcal{B}\,\vec{u}_y$.

1. Etablire l'équation d'onde associée à cette particule.
2. Résoudre l'équation établi et trouver les niveaux énergétique de cette particule.

Exercice 02

Dans cette exercice on prend $\hbar = c = 1$.

On considère une particule relativiste de spin 0 soumise à un champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}} = \mathcal{B}_0\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ et un champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}} = \mathcal{E}_0\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$. On prend la jauge $A^\mu = (-\mathcal{E}_0 z, \mathcal{B}_0 z, 0, 0)$.

1. Etablir l'équation d'onde associée à cette particule.
2. On pose $\psi(t,x,y,z) = \exp\left[-i\left(Et - p_x x - p_y y\right)\right] \times \varphi(z)$. Montrer que $\varphi(z)$ est une solution de l'équation
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - e^2\left(\mathcal{B}_0^2 - \mathcal{E}_0^2\right) z^2 + 2e\left(E\mathcal{E}_0 + p_x\mathcal{B}_0\right) z + E^2 - p_x^2 - p_y^2 - m^2\right]\varphi(z) = 0. \qquad (1)$$
3. On suppose que $(\mathcal{E}_0 < \mathcal{B}_0)$ et on pose $e^2\left(\mathcal{B}_0^2 - \mathcal{E}_0^2\right) = \frac{1}{4}\omega^2$ et $Z = z - \frac{E\mathcal{E}_0 + p_x\mathcal{B}_0}{e\left(\mathcal{B}_0^2 - \mathcal{E}_0^2\right)}$.
   – Montrer que l'équation (1) se ramène à l'équation d'onde d'un oscillateur harmonique.
   – Résoudre alors cette équation et trouver les niveaux d'énergies des états liés.

Exercice 03

On considère une particule relativiste de spin 0 soumise à un champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}} = \mathcal{B}_0\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$.

On prend la jauge $A^\mu = (0, \mathcal{B}_0 z, 0, 0)$.

1) Etablir l'équation d'onde associée à cette particule.

2) On pose $\psi(t,x,y,z) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(Et - p_x x - p_y y\right)\right] \times \varphi(z)$. Montrer que $\varphi(z)$ est une solution de l'équation

$$\left[\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(p_x - e\mathcal{B}_0 z\right)^2 + \frac{E^2}{c^2} - p_y^2 - m^2c^2\right]\varphi(z) = 0. \qquad (2)$$

3) Soit l'opérateur $U_\lambda = \exp\left(\lambda\frac{\partial}{\partial z}\right)$, où λ est un réel.

Montrer que $\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[U_\lambda z U_\lambda^{-1}\right] = \exp\left(\lambda\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial}{\partial z}, z\right]\exp\left(-\lambda\frac{\partial}{\partial z}\right) = 1$

En déduire que $\exp\left(\lambda\frac{\partial}{\partial z}\right) z \exp\left(-\lambda\frac{\partial}{\partial z}\right) = z + \lambda$

4) On pose $\tilde{\varphi}(z) = \exp\left(\frac{p_x}{e\mathcal{B}_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(z)$.

- Montrer que $\exp\left(\frac{p_x}{e\mathcal{B}_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(p_x - e\mathcal{B}_0 z\right)^2\exp\left(-\frac{p_x}{e\mathcal{B}_0}\frac{\partial}{\partial z}\right) = e^2\mathcal{B}_0^2 z^2$
- En déduire que $\tilde{\varphi}(z)$ Vérifie alors l'équation

$$\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + e^2\mathcal{B}_0^2 z^2\right]\tilde{\varphi}(z) = \mathcal{E}\tilde{\varphi}(z). \qquad (3)$$

avec $\mathcal{E} = \frac{E^2}{c^2} - p_y^2 - m^2c^2$.

- Résoudre cette équation et trouver les niveaux d'énergies des états liés.

Exercice 04 ==

1) Considérons le potentiel vecteur $\vec{A} = \mu_0 I \vec{u}_\phi$, où μ_0 et I sont des constantes.
a) Calculer les composantes cartésiennes A_x , A_y et A_z du vecteur $\vec{A}$ en fonction de x et y.
b) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ décrit par $\vec{A}$.
2) Ecrire l'équation d'onde pour une particule de spin 0 et de masse μ soumise au champ $\vec{B}$.
3) En posant $\psi(t,x,y,z) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - p_z z)\right]\varphi(x,y)$, montrer que $\varphi(x,y)$ vérifie l'équation suivante

$$\mathcal{E}\varphi(x,y) = \left[-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + 2\frac{e\mu_0 I}{c}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}L_z\right]\varphi(x,y), \tag{4}$$

où $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ et $\mathcal{E} = \frac{E^2 - m^2c^4 - c^2p_z^2 - (e\mu_0 I)^2}{c^2}$.
4) En utilisant les coordonnées polaires $x = \rho\cos\phi$ et $y = \rho\sin\phi$, montrer que $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$
-Justifier alors, l'écriture $\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}F(\rho)e^{im\phi}$ et la nature du nombre m.
5) Montrer que la fonction $F(\rho)$ vérifie l'équation radiale

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} + 2\frac{e\mu_0 I m\hbar}{c}\frac{1}{\rho} + \mathcal{E}\right]F(\rho) = 0 \tag{5}$$

N.B. On donne $\vec{u}_\phi = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$.

Exercice 05 ==

Soit $\psi_{KG}(x)$ une solution à l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\pi_\mu\pi^\mu - m^2c^2\right)\psi_{KG}(x) = 0$$

avec $\pi_\mu = i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$. On pose

$$\Psi_{FV} = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_{KG} + \frac{1}{mc^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}A_0\right)\psi_{KG}\\ \psi_{KG} - \frac{1}{mc^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}A_0\right)\psi_{KG}\end{pmatrix} \tag{6}$$

1) Montrer que Ψ_{FV} vérifie l'équation de Feshback-Villars suivante

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{FV} = H_{FV}\Psi_{FV}, \tag{7}$$

où H_{FV} est le hamiltonien de Feshback-Villars.
2) Ecrire l'équation de continuité pour l'équation (7).
3) Etudier la limite nonrelativiste de l'équation (7)

Exercice 06 ==

1) Considérons le potentiel vecteur $\vec{A} = \frac{1}{2}B_0\rho\vec{u}_\phi$, où B_0 est une constante et $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.
$\vec{u}_\phi$ est le vecteur unitaire $\vec{u}_\phi = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}$ et $x = \rho\cos\phi$ et $y = \rho\sin\phi$.
a) Calculer les composantes cartésiennes A_x , A_y et A_z du vecteur $\vec{A}$ en fonction de x et y.

b) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ décrit par $\vec{A}$.
2) Ecrire l'équation d'onde pour une particule de spin 0 et de masse $\mathcal{M}$ soumise au champ $\vec{B}$.
3) En posant $\psi(t,x,y,z) = \exp\left[-i\left(Et - p_z z\right)\right]\varphi(x,y)$, montrer que $\varphi(x,y)$ vérifie l'équation suivante

$$\mathcal{E}\varphi(x,y) = \left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{4}e^2 B_0^2 \rho^2 + eB_0 L_z\right]\varphi(x,y), \tag{8}$$

où $L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ et $\mathcal{E} = E^2 - p_z^2 - \mathcal{M}^2$.
4) On donne l'expression de L_z en coordonnées polaires $L_z = -i\frac{\partial}{\partial \phi}$, et on pose $\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}F(\rho)e^{im\phi}$, où m un nombre entier.
- Montrer que la fonction $F(\rho)$ vérifie l'équation radiale

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} - \frac{1}{4}e^2 B_0^2 \rho^2 + eB_0 m + \mathcal{E}\right]F(\rho) = 0 \tag{9}$$

N.B. On donne et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$.

Exercice 07

On considère l'équation de Klein Gordon avec un champ électrique constant et uniforme, décrit par la jauge $A_\mu(x) \equiv (-Ex, 0, 0, 0)$,

$$\left[\left(\hat{P}_\mu - eA_\mu(x)\right)^2 - m^2\right]\psi(t,x,y,z) = 0, \tag{10}$$

1) En posont $\psi(t,x,y,z) = \exp\left[-i\left(\omega t - p_y y - p_z z\right)\right]\varphi(x)$ et en faisant le changement

$$\xi = \sqrt{2ieE}\left(x + \frac{\omega}{eE}\right), \tag{11}$$

montrer que l'équation (10) se réduit à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4}\xi^2 + \gamma + \frac{1}{2}\right]\tilde{\varphi}(\xi) = 0, \tag{12}$$

où $\tilde{\varphi}(\xi) \equiv \varphi(x)$ et $\gamma = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\frac{m^2 + p_y^2 + p_z^2}{eE}$.
2) Si, en plus du champ électrique, on ajoute un champ magnétique dérivé du potentiel vecteur $\vec{A} = (0, Bx, 0)$, avec $E > B$, montrer que la solution de l'équation de Klein Gordon résultante se ramène à la solution d'une équation de type (14).

Exercice 08

Soit $\psi(x)$ la solution de l'équation de Dirac

$$\left(\gamma^\mu \pi_\mu - mc\right)\psi(x) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \pi_\mu = i\hbar\partial_\mu - eA_\mu$$

1) Montrer que $\psi(x)$ est une solution de l'équation quadratique suivante

$$\left[\pi^2 - m^2c^2 - \frac{e\hbar}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$$

2) Trouver alors les niveaux énergétique pour une particule relativiste de spin $\frac{1}{2}$ soumise à un champ magnétique $\vec{B} = \mathcal{B}\,\vec{u}_y$.

Exercice 09 ==

Soit $\mathcal{H}$ l'hamiltonien de Dirac avec un potentiel central $V(r)$;

$$\mathcal{H} = c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2 + V(r)$$

On note $\vec{L}$ le moment cinétique orbital, $\vec{S}$ le moment cinétique de spin$\left(\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}\right)$

Soit $\vec{J}$ le moment cinétique total $\left(\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}\right)$.

Calculer les commutateurs $\left[\mathcal{H}, \vec{L}\right]$, $\left[\mathcal{H}, \vec{S}\right]$ et $\left[\mathcal{H}, \vec{J}\right]$.

Exercice 10 ==

Considérons l'équation de Dirac

$$\left[\gamma^\mu \pi_\mu - mc\right]\psi(x) = 0,$$

avec $\pi_\mu = \left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)$, en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Les deux champs sont constants et homogènes.

1) En multipliant cette équation par $(\gamma^\mu \pi_\mu + mc)$, montrer que $\psi(x)$ est une solution de l'équation

$$\left[\pi^2 - m^2c^2 - \hat{M}\right]\psi(x) = 0 \tag{13}$$

où $\hat{M} = \frac{i\hbar e}{c}\left(\vec{\alpha}.\vec{E} + i\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)$

2) Déterminer les vecteurs propres U_s de la matrice $\hat{M}$.

3) Considérons maintenant la jauge $A_\mu(x) \equiv (-Ex, 0, Bx, 0)$ avec $E > B$.

a) En posant $\psi(t,x,y,z) = U_s\ \exp\left[-i\left(\omega t - p_y y - p_z z\right)\right]\varphi_s(x)$, écrire l'équation que doit satisfaire $\varphi_s(x)$.

b) En faisant un changement de variable $x \to \xi$, montrer que l'équation (22) peut se mettre sous la forme

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{1}{4}\xi^2 + \gamma_s + \frac{1}{2}\right]\tilde{\varphi}_s(\xi) = 0, \tag{14}$$

où $\tilde{\varphi}_s(\xi) \equiv \varphi_s(x)$ et γ_s est une constante.

Exercice 11 ==

On considère le hamiltonien de Dirac

$$H = c\ \vec{\alpha}.\vec{p} + \beta\ mc^2$$

1) Soit les opérateurs $\hat{W} = \beta\left(\vec{\alpha}.\vec{p}\right)$ et $\mathcal{U}_{FW} = \exp\left(\lambda\ \hat{W}\right)$, où β et $\vec{\alpha}$ sont les matrices de Dirac et λ est un parametre réel.

a) Montrer que $\hat{W}^+ = -\hat{W}$ et en déduire que $\mathcal{U}_{FW}$ est unitaire.

b) Montrer que $\hat{W}^2 = -p^2$ et en déduire que $\mathcal{U}_{FW}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{U}_{FW} = \cos\theta + \left(\frac{\hat{W}}{p}\right)\ \sin\theta$$

2) On définit le hamiltonien

$$H' = \mathcal{U}_{FW}\ H\mathcal{U}_{FW}^+$$

a) Déterminer le parametre λ pour que H' soit

$$H' = E_p\ \beta$$

b) En déduire les valeurs et les vecteurs propres de H.
3) Etudier la limite nonrelativiste $p << mc$.

Exercice 12 ==

Soit une particule de Dirac dans un potentiel central. Le Hamiltonien correspondant s'écrit

$$\mathcal{H} = \vec{\alpha}.\vec{p} + \beta m + V\left(r\right).$$

1) Calculer le commutateur $[p_i, L_j]$, où L_j est la composante j du moment cinétique orbitale. En déduire que $\vec{p} \times \vec{L} + \vec{L} \times \vec{p} = 2i\vec{p}$.

2) Soit l'opérateur de Dirac $\mathcal{K} = \beta\left(\vec{\Sigma}.\vec{L} + 1\right)$, où $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\sigma} & 0 \\ 0 & \overrightarrow{\sigma} \end{pmatrix}$.

-Vérifier que $\vec{\alpha} = \gamma^5 \vec{\Sigma}$. (avec $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.)

-Calculer ensuite le commutateur $[\mathcal{H}, \mathcal{K}]$.

- Que peut-on conclure ?

Exercice 13 ==

Soit $\psi(x)$ une solution à l'équation de Dirac

$$\left(\gamma^\mu \pi_\mu - m\right)\psi\left(x\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$$

1. On définit la matrice γ^5 par $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   – Verifier que $\left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0$ avec $\mu = 0, 1, 2, 3$.
2. On considère les opérateurs
$$\boldsymbol{P}_1 = \frac{1+\gamma^5}{2} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{P}_2 = \frac{1-\gamma^5}{2}$$
   Vérifier que $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 = 1$ et que $\boldsymbol{P}_2\gamma^\mu = \gamma^\mu \boldsymbol{P}_1$.
3. On pose $\psi_1(x) = \boldsymbol{P}_1\psi(x)$ et $\psi_2(x) = \boldsymbol{P}_2\psi(x)$.
   – En utilisant l'équation de Dirac, montrer que
$$\psi_2(x) = \frac{1}{m}\gamma^\mu\pi_\mu\psi_1(x)$$
   – En déduire que
$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = \frac{1}{m}\left(\gamma^\mu\pi_\mu + m\right)\psi_1(x)$$
4. Montrer que $\psi_1\left(x\right)$ est une solution de l'équation suivante
$$\left[\pi^2 - m^2 - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi_1(x) = 0 \tag{15}$$
   où $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$.
5. On note $\psi'\left(x'\right)$ la transformée de $\psi\left(x\right)$ par une transformation de Lorentz $S\left(\Lambda\right)$ et on définit $\psi_1'\left(x'\right)$ et $\psi_2'\left(x'\right)$ par $\psi_1'\left(x'\right) = \boldsymbol{P}_1\psi'\left(x'\right)$ et $\psi_2'\left(x'\right) = \boldsymbol{P}_2\psi'\left(x'\right)$.
   – Montrer que $\psi_i'\left(x'\right) = S\left(\Lambda\right)\psi_i\left(x\right)$.
   – Que peut-on en conclure ?

Exercice 14 ==

Soit $\psi(x)$ une solution à l'équation de Dirac

$$(\gamma^\mu \pi_\mu - mc)\,\psi(x) = 0 \tag{16}$$

1) Considérons les opérateurs

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $P_1 + P_2 = 1$ et que $P_2\gamma^\mu = \gamma^\mu P_1$.
2) On pose $\psi_1 = P_1\psi(x)$ et $\psi_2 = P_2\psi(x)$.
- En utilisant l'équation de Dirac montrer que

$$\psi_2 = \frac{1}{mc}\gamma^\mu \pi_\mu \psi_1$$

- En déduire que

$$\psi(x) = \psi_1 + \psi_2 = \frac{1}{mc}\left(\gamma^\mu \pi_\mu + mc\right)\psi_1$$

- Montrer alors que ψ_1 est une solution de l'équation

$$\left[\pi^2 - m^2c^2 - \frac{i\hbar e}{c}\left(\vec{\alpha}.\vec{E} + i\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)\right]\psi_1 = 0 \tag{17}$$

3) Resoudre alors cette équation et trouver les niveaux d'énergie des états liés pour une particule de Dirac soumise à un champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}} = \mathcal{B}_0\,\overrightarrow{\mathbf{i}}$.

Exercice 15 ==

On considère l'équation de Dirac avec un champs magnétique

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$

où H est donné par

$$H = \alpha_x\hat{\pi}_x + \alpha_y\hat{\pi}_y + \alpha_z\hat{p}_z + \beta m$$

On définit les opérateurs

$$\begin{aligned} Q_1 &= i\beta\alpha_z\left(\alpha_x\hat{\pi}_x + \alpha_y\hat{\pi}_y\right) \\ Q_2 &= i\alpha_x\alpha_y\left(\alpha_z\hat{p}_z + \beta m\right) \end{aligned}$$

1. Montrer que

$$[H, Q_1] = [H, Q_2] = 0$$

et

$$\{Q_1, Q_2\} = 0$$

2. Montrer alors que

$$H^2 = Q_1^2 + Q_2^2$$

3. Trouver les valeur propre de $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = Q_1^2 = H^2 - Q_2^2$$

Exercice 16 ==

Considérons maintenant une rotation d'angle α autour de l'axe (oz)

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha\ x - \sin\alpha\ y \\ y' &= \sin\alpha\ y + \cos\alpha\ y \end{aligned}$$

Montrer que la matrice $S(\Lambda)$ est dans ce cas donnée par

$$S(\Lambda) = \cos\frac{\alpha}{2} - i\Sigma_z \sin\frac{\alpha}{2}$$

Exercice 17 ==

1. Soit la matrice $C = i\gamma^2\gamma^0$ (conjugaison de charge)
   (a) Montrer que
   $$C^{-1} = C^T = C^\dagger = -C$$
   (b) Montrer que
   $$C(\gamma^\mu)C^T = -\gamma^\mu$$
2. Soit $\Psi(x)$ vérifiant l'équation de Dirac
   $$[\gamma^\mu(i\hbar\partial_\mu - eA_\mu) - mc]\,\Psi(x) = 0.$$
   Montrer que
   $$[\gamma^\mu(i\hbar\partial_\mu + eA_\mu) - mc]\,\Psi^c(x) = 0$$
   avec
   $$\Psi^c(x) = C\overline{\Psi}^T(x)$$

Exercice 18 ==

Soit le spineur de Dirac

$$u^{(s)}(\vec{p}) = N_+ \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{c\ \vec{\sigma}.\vec{p}}{E+mc^2}\chi_s \end{pmatrix} \tag{18}$$

où N_+ est une constante, $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ et $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $\chi_s^+\chi_s = 1$ et déterminer la constante de normalisation N_+ de sorte que

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p})\,u^{(s)}(\vec{p}) = 1. \tag{19}$$

2) Montrer que

$$\sum_s u^{(s)}(\vec{p})\,\bar{u}^{(s)}(\vec{p}) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc} \tag{20}$$

3) Calculer la quantité $\sum_{r,r'} \left| \ \bar{u}^{(r')}(\vec{p}')\,a_\mu\gamma^\mu u^{(r)}(\vec{p})\right|^2$, où a_μ est un quadrivecteur quelconque.

Exercice 19 ==

Soit $\psi(x)$ une solution à l'équation de Dirac

$$(\gamma^\mu\pi_\mu - mc)\,\psi(x) = 0 \tag{21}$$

1) Considérons les opérateurs

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $P_1 + P_2 = 1$ et que $P_2\gamma^\mu = \gamma^\mu P_1$.
2) On pose $\psi_1 = P_1\psi(x)$ et $\psi_2 = P_2\psi(x)$.
- En utilisant l'équation de Dirac montrer que

$$\psi_2 = \frac{1}{mc}\gamma^\mu \pi_\mu \psi_1$$

- En déduire que

$$\psi(x) = \psi_1 + \psi_2 = \frac{1}{mc}\left(\gamma^\mu \pi_\mu + mc\right)\psi_1$$

- Montrer alors que ψ_1 est une solution de l'équation

$$\left[\pi^2 - m^2c^2 - \frac{i\hbar e}{c}\left(\vec{\alpha}.\vec{E} + i\vec{\Sigma}.\vec{B}\right)\right]\psi_1 = 0 \tag{22}$$

3) Si on écrit $\psi(x)$ sous la forme $\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, on voit que $\psi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \phi + \chi \\ \phi + \chi \end{pmatrix}$.
Interpréter cette remarque.
4) On pose $\psi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$. Montrer que ϕ_1 est une solution de l'équation

$$\left[\pi^2 - m^2c^2 - \frac{i\hbar e}{c}\left(\vec{\sigma}.\vec{E} + i\vec{\sigma}.\vec{B}\right)\right]\phi_1 = 0 \tag{23}$$

5) Considérons maintenant un potentiel central $eA_0 = V(r)$.
Montrer que l'équation (23) se réduit à

$$\left[(E-V)^2 - c^2p^2 - m^2c^4 + i\hbar c\frac{\vec{\sigma}.\vec{r}}{r}V'\right]\phi_1 = 0 \tag{24}$$

6) Pour un potentiel de Coulomb $V(r) = -\frac{\alpha\hbar c}{r}$. Montrer que la dernière équation peut s'écrire sous la forme

$$\left[E^2 - m^2c^4 + 2E\frac{\alpha\hbar c}{r} - c^2p_r^2 - \frac{c^2L^2 - \alpha^2\hbar^2c^2 - i\alpha\hbar^2c^2\frac{\vec{\sigma}.\vec{r}}{r}}{r^2}\right]\phi_1 = 0 \tag{25}$$

7) Déterminer les valeurs propres de l'opérateur $\left(c^2L^2 - \alpha^2\hbar^2c^2 + i\alpha\hbar^2c^2\frac{\vec{\sigma}.\vec{r}}{r}\right)$ et en déduire les énergies des états liés.

Exercice 20 ==

On considère une particule de spin $\frac{1}{2}$ soumise à l'action d'un champ électrique décrit par le quadripotentiel $A_\mu(t) = -A_z(t)\delta_{\mu 3}$. Dans le système d'unités où $\hbar = c = 1$, l'équation d'onde associée à cette particule s'écrit

$$\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - eA_\mu(t)\right) - m\right]\psi(t,\vec{r}) = 0.$$

1) En posant $\psi(t,\vec{r}) = \exp\left(i\vec{k}.\vec{r}\right)\gamma^0\gamma^3\xi(t)$, montrer que $\xi(t)$ vérifie l'équation $\hat{D}\xi(t) = \hat{K}\xi(t)$ où

$$\hat{D} = \gamma^3\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right) - \gamma^0\left(k_z - eA_z(t)\right) - \gamma^0\gamma^3 m \qquad \text{et} \qquad \hat{K} = \left(\gamma^1 k_x + \gamma^2 k_y\right)\gamma^0\gamma^3$$

2) Montrer que $\left[\hat{D},\hat{K}\right]=0$. Que peut on conclure ?

3) Montrer que $\hat{K}^2=-\left(k_x^2+k_y^2\right)$ et en déduire les valeurs propres de $\hat{K}$.

4) On écrit $\xi\left(t\right)$ sous la forme

$$\xi\left(t\right)=\left(\begin{array}{c}\chi_{s,1}\left(t\right)\Upsilon_s\\ \chi_{s,2}\left(t\right)\sigma^3\Upsilon_s\end{array}\right),\qquad\text{avec}\qquad\Upsilon=\left(\begin{array}{c}i\sqrt{k_x-ik_y}\\ \sqrt{k_x+ik_y}\end{array}\right)$$

et $\xi_1\left(t\right)$ et $\xi_2\left(t\right)$ sont deux fonctions numériques. Montrer que $\xi\left(t\right)$ est un vecteur propre de $\hat{K}$.

5) Montrer que pour que le spineur $\xi\left(t\right)$ soit un vecteur propre de $\hat{D}$, les fonctions $\xi_1\left(t\right)$ et $\xi_2\left(t\right)$ doivent vérifier le système d'équations

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}+m\right]\chi_{s,1}\left(t\right)=\left[k_z-is\sqrt{k_x^2+k_y^2}-eA_z(t)\right]\chi_{s,2}\left(t\right)$$
$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-m\right]\chi_{s,2}\left(t\right)=\left[k_z+is\sqrt{k_x^2+k_y^2}-eA_z(t)\right]\chi_{s,1}\left(t\right)$$