TRAVAUX PRATIQUES -Méthodes Numériques- MATLAB
2ème Année ST (S4)

TP05 (Deux séance)

--------------------RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINAIRES --------------------

– METHODES ITERATIVES –

1- OBJECTIFS DU TP

Le but de ce projet est d'expliquer les méthodes itératives applicables à la résolution de systèmes linéaires à plusieurs inconnues $Ax = b$.

Nous allons étudier deux méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires; la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel.

Chacune de ces méthodes consiste à construire la suite $x^{(n)}$ grâce à une relation de récurrence du type : $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$.

On rappelle les différentes écritures matricielles de ces méthodes.

On décompose A = D+L+U où :

- D est diagonale,
- L est triangulaire inférieure stricte,
- U est triangulaire supérieure stricte.

Cette décomposition est unique.

Alors, la matrice α et le vecteur β sont donnés, pour chaque méthode, de la manière suivante :

Jacobi : $\alpha = J = -D^{-1}(L+U)$, $\beta = D^{-1}b$

Gauss-Seidel : $\alpha = G = -(D+L)^{-1}U$, $\beta = (D+L)^{-1}b$

Avec :

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

2- Considérons le système $Ax = b$ où :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 26 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Dont la solution exacte est x = $(1, 3,1)^t$

a./ Méthode de Jacobi :

On suppose que A est une matrice inversible tel que $a_{ii} \neq 0, \forall i$. On pose : A = D + L + U, nous obtenons alors la relation suivante :

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \qquad \textbf{(a.1)}$$

TRAVAUX PRATIQUES -Méthodes Numériques- MATLAB
2ème Année ST (S4)

L'algorithme de Jacobi s'écrit aussi : $\begin{cases} x_i^{(0)} & donné \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \end{cases}$ **(a.2)**

- Ecrire un fichier script Matlab qui permet de calculer la solution x en utilisant la forme matricielle (a.1).
  Arrêter les calculs lorsque : $max\left(\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|\right) \leq \varepsilon = 10^{-6}$ en partant du vecteur initial $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^t$.
- Idem en utilisant l'algorithme (a.2).

b./ Méthode de Gauss-Seidel :

La relation de récurrence pour cette méthode est :

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b \qquad \textbf{(b.1)}$$

- Ecrire un programme script Matlab permettant de calculer la solution du système linéaire $Ax = b$ en utilisant la relation (b.1) avec : $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^t$ et $\varepsilon = 10^{-6}$.
- Vérifier votre résultat en utilisant l'opérateur **** ou **inv** de Matlab.

Préparation théorique (obligatoire):

- Ecrire une fonction Matlab (*function*) permettant de calculer la solution du système linéaire $Ax = b$ en utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel (données : A, b, x_0 et ε).
- Ecrire une commande Matlab qui permet de calculer le nombre d'itérations N pour les deux méthodes.

NB : En utilisant les commandes ***diag***, ***tril*** et ***triu*** pour former les matrices D, L et U.