

Exercice 1: Gaz parfait dans un champ gravitationnel

On considère un gaz parfait classique dans un champ gravitationnel. L'énergie de chaque particule à l'altitude z_i est

$$E_i = \frac{p_i^2}{2m} + mgz_i$$

où g est la constante de gravitation.

- (1) Calculer la fonction de partition grand-canonique $\mathcal{Z}$.
- (2) Calculer l'entropie et le nombre de particules moyen.

Exercice 2: Système à deux niveaux

Soit un système de particules identiques et indépendantes, maintenu à la température T et au potentiel chimique μ par un réservoir de chaleur et de particules. Chaque particule peut avoir deux niveaux d'énergie $\pm\epsilon$ avec $\epsilon > 0$.

- (1) Calculer la fonction de partition grand-canonique $\mathcal{Z}$.
- (2) Calculer l'énergie moyenne du système et les nombres moyens des particules pour chaque niveau.

Exercice 3: Piège à particules

On considère un solide de volume V contenant N sites (avec $N \gg 1$). Chaque site est peut piéger une seule particule (au plus). Une particule piégée peut prendre deux énergies: $-\epsilon_1$ et $-\epsilon_2$ avec $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$. On néglige les interactions entre particules piégées par deux sites différents. Le solide est en contact avec un thermostat à la température T et un réservoir de particules de potentiel chimique μ .

- (1) Calculer la fonction de partition grand-canonique du solide.
- (2) Calculer le nombre moyen de particules piégées et l'énergie moyenne.
- (3) Calculer les nombres moyens $\langle n_1 \rangle$ et $\langle n_2 \rangle$ de particules piégées dans les états d'énergie $-\epsilon_1$ et $-\epsilon_2$ respectivement. Calculer le nombre moyen $\langle n_0 \rangle$ des pièges vides.
- (4) En fait, les particules piégées dans ce problème sont des électrons de moment magnétique m qui sont soumis à un champ magnétique B . Les niveaux $-\epsilon_1$ et $-\epsilon_2$ comprennent chacun les deux termes

$$-\epsilon_1 = -\epsilon_0 + mB$$

$$-\epsilon_2 = -\epsilon_0 - mB$$

où $-\epsilon_0 > 0$.

Le niveau 1 est le niveau occupé par un électron de spin opposé au champ B (l'énergie de Zeeman est donc $+mB$), tandis que le niveau 2 est occupé par un électron de spin parallèle au champ B .

- (a) Calculer le moment magnétique moyen $\langle M \rangle$ des pièges occupées.
- (b) Chercher la limite de $\langle M \rangle$ à haute et basse température. Commenter.

Exercice 4: Gaz parfait sur réseau

On s'intéresse à un système en équilibre avec un thermostat à la température T et un réservoir de particules de potentiel chimique μ .

- (1) Montrer que pour un fluide simple (fluide constitué d'un seul type de molécules) le potentiel grand-canonique vaut

$$\phi = -pV.$$

où p et V sont la pression et le volume respectivement.

(2) Dans le modèle du gaz sur réseau, le volume V du récipient est découpé en petits cubes de volume v (de l'ordre de grandeur d'un volume atomique); chaque cube peut contenir au plus une particule du gaz. De plus, on suppose que le gaz est parfait et monoatomique.

(a) Calculer la fonction de partition grand-canonique z_i d'un petit cube.

(b) Déduire la fonction de partition grand-canonique totale $\mathcal{Z}$

(3) Calculer le nombre moyen de particules, la pression. En déduire l'équation d'état du gaz. Que devient cette équation dans la limite de forte dilution ($\langle N \rangle v \ll V$)?

Exercice 5: Adsorption d'un gaz parfait sur la surface d'un solide

L'adsorption, c'est-à-dire la fixation d'atomes ou de molécules sur la surface d'un solide.

On considère un gaz parfait en contact avec la surface S d'un solide (plan xy). Le système total comprenant le gaz parfait et la surface du solide est maintenu à la température T . Des molécules du gaz peuvent être adsorbées par la surface S . L'énergie d'une molécule adsorbée est donnée par

$$E_i = -\epsilon_0 + \frac{p_i^2}{2m}.$$

où $\epsilon_0 > 0$ est l'énergie d'interaction avec les atomes de la surface qui capturent la molécule. Le second terme est l'énergie cinétique de la molécule adsorbée qui ne conserve que les composantes p_x et p_y de son impulsion.

(1) Calculer le nombre moyen des molécules adsorbées sur la surface S en fonction de T . L'exprimer en fonction de la pression grand-canonique du gaz parfait servant de réservoir de molécules.

(2) Calculer l'énergie moyenne des molécules adsorbées. Quelle est l'énergie totale du système? En déduire la capacité calorifique du système total.

(3) Retrouver ces résultats par la méthode canonique.

Exercice 6: Fluctuations

Les écarts (où les fluctuations) par rapport aux valeurs moyennes $\langle N \rangle$ et $\langle E \rangle$ dans l'ensemble grand-canonique sont données par les variances des distributions:

$$\sigma_N = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}$$

$$\sigma_E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}.$$

(1) Montrer que:

$$\sigma_N^2 = kT \left. \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right|_{T,V}$$

$$\sigma_E^2 = - \left. \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \right|_{z,V}$$

(2) Calculer σ_N et σ_E pour un gaz parfait classique.

محمد الصادق زبيدي
بالتوفيق