

I. 1. Introduction

La cinématique des fluides est une branche de la mécanique des fluides qui étudie le mouvement des particules de fluide indépendamment des forces provoquant ou modifiant l'écoulement. Deux méthodes, qui diffèrent par le choix des variables adoptées, peuvent être utilisées.

I. 2. Description d'un fluide en écoulement

I. 2. 1. Variables de Lagrange : Notion de trajectoire

La description de Lagrange consiste à étudier chaque particule séparément en suivant son mouvement au cours du temps dans le référentiel (R) . Les coordonnées de la particule fluide à l'instant $t=0$, par rapport à (R) , x_0, y_0, z_0 sont prise comme paramètres.

Le mouvement de la particule fluide est déterminé si on connaît x, y, z en fonction des paramètres x_0, y_0, z_0 et t appelées «variables de Lagrange»

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = f_2(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = f_3(x_0, y_0, z_0, t) \quad (\text{I. 1})$$

Ces coordonnées x, y, z représentent «inconnues de Lagrange».

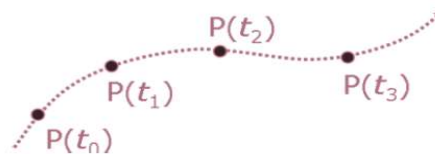


Figure I.1 : Trajectoire d'une particule fluide

La trajectoire d'une particule de fluide est l'ensemble des positions successives qu'elle occupe au cours du temps.

I. 2. 2. Variables d'Euler : Notion de ligne de courant

La description eulérienne consiste à déterminer, à des positions M fixes de l'espace, l'évolution temporelle d'une caractéristique du mouvement de fluide.

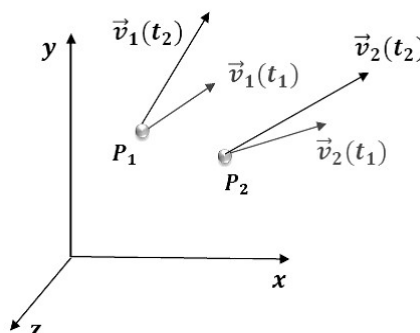


Figure I.2 : Description Eulérienne

L'écoulement est établi, à un instant t , par l'ensemble des vecteurs de vitesse associés aux particules fluides. Il est ainsi décrit au moyen d'un «champ des vecteurs de vitesse» dépendant des variables indépendantes de l'espace et du temps, où chaque vecteur représente la vitesse de la particule qui occupe la position à l'instant t .

Les projections u , v , w du vecteur de vitesse sur les axes (Ox) , (Oy) , (Oz) du référentiel (R) représentent les «inconnues d'Euler» définies comme suit :

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = f_1(x, y, z, t), \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} = f_2(x, y, z, t), \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} = f_3(x, y, z, t) \quad (I.2)$$

où x , y , z et t sont appelées les «variables d'Euler».

La courbe tangente en chacun de ses points au champ vectoriel des vitesses des particules fluides est appelée ligne de courant

I. 2. 3. Champ de vitesse

On présente dans cette partie les principales propriétés des champs vectoriels.

a. Ligne de courant

La ligne de courant est la courbe tangente en chacun de ses points au champ vectoriel des vitesses des particules fluide.

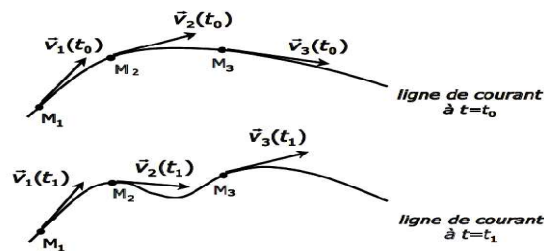


Figure I.3 : Lignes de courant

Le long d'une telle ligne, à un instant fixe t_1 on a :

$$d\vec{OM} // \vec{V} \Rightarrow \frac{dx}{u(x, y, z, t_1)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_1)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t_1)} \quad (I.3)$$

où u , v , w les composantes du vecteur vitesse sont des fonction du temps. De ce fait, les lignes de courant se déforment avec le temps.

Remarque

Les lignes de courant et les trajectoires coïncident à l'état stationnaire lorsque le champ des vecteurs de vitesse est constant dans le temps.

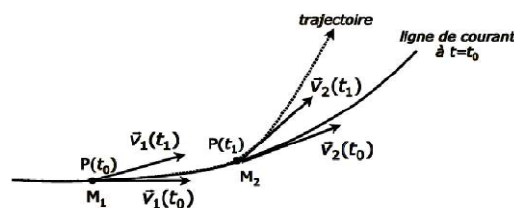


Figure I.4 : Ligne de courant et trajectoire

b. Tube de courant

L'ensemble des lignes de courant, s'appuyant sur un contour fermé forme un tube de courant. Le flux du champ de vitesse à travers la surface latérale de ce tube est nul.

c. Débit massique et volumique

On appelle débit massique d'un écoulement à travers une surface S la quantité :

$$q_m = \iint_S \rho \vec{V} \vec{n} dS = \iint_S \rho V_n dS \quad (I.4)$$

où V_n est la projection du vecteur vitesse sur la normale de l'élément dS . On appelle débit en volume à travers la surface S la quantité :

$$q_v = \iint_S \vec{V} \vec{n} dS = \iint_S V_n dS \quad (I.5)$$

d. Circulation du vecteur vitesse le long d'une courbe

Soient deux points A et B du fluide et une courbe quelconque joignant ces deux points. On appelle circulation du vecteur vitesse entre ces deux points l'expression

$$q_v = \iint_S \vec{V} \vec{n} dS = \iint_S V_n dS \quad (I.6)$$

Dans le cas général la circulation dépend des points A et B et de la forme du trajet.

$$\Gamma_{AB} = \int_{\overline{AB}} \vec{V} \vec{dl} = \int_{\overline{AB}} (udx + vdy + wdz) \quad (I.7)$$

e. Potentiel de vitesse

Si la circulation du vecteur de vitesse ne dépend que de la position initiale A et finale B de la particule fluide et non du chemin suivi, on dit que le *champ des vitesses dérive d'un potentiel*. On peut alors écrire

$$\Gamma_{AB} = \varphi_B - \varphi_A = \int_{\overline{AB}} d\varphi \quad (I.8)$$

D'où

$$d\varphi = udx + vdy + wdz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (I.9)$$

Ainsi, on peut écrire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w \quad (I.10)$$

Ce qui est équivalent à l'expression vectorielle :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi = \overrightarrow{grad} \varphi \quad (I.11)$$

En coordonnées cylindriques

$$d\varphi = u_r dr + u_\theta r d\theta + wdz = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (I.12)$$

Remarque : Il résulte que la circulation sur un contour fermée est nulle.

f. Dérivée particulaire d'un scalaire : Accélération d'une particule

Considérons une grandeur locale f décrivant l'écoulement (exp: pression, densité température etc...) définie en tant qu'une fonction des variables indépendantes qui sont la position observée x_i et l'instant t d'observation. La dérivée particulaire de cette grandeur est son taux de variation vu par un observateur qui se déplace avec l'écoulement.

Comme l'observateur reste sur un point fixe en description eulérienne, on doit ajouter à la variation temporelle de f en ce point fixe une autre variation appelée dérivée convective qui est due au déplacement de l'observateur avec l'écoulement. L'expression de la dérivée particulaire s'écrit

Sous forme développée

$$\frac{Df(x_i, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{I. 13})$$

Sous forme vectorielle

$$\frac{Df(x_i, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})f \quad (\text{I. 14})$$

Sous forme tensorielle

$$\frac{Df(x_i, t)}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\text{I. 15})$$

Remarque :

En régime permanent la dérivée locale est nulle $\partial/\partial t=0$, mais la dérivée particulaire n'est pas nulle $D/Dt \neq 0$.

L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse senti par une particule fluide en son mouvement. Afin de déterminer l'accélération du fluide à partir du champ de vitesse eulérien, on utilise la dérivée particulaire. En appliquant la relation de dérivée particulaire d'un scalaire sur les composantes V_i du vecteur de vitesse, on peut écrire :

$$\vec{\gamma}(x, y, z, t) = \frac{Du}{Dt} \vec{i} + \frac{Dv}{Dt} \vec{j} + \frac{Dw}{Dt} \vec{k} = \gamma_x \vec{i} + \gamma_y \vec{j} + \gamma_z \vec{k} \quad (\text{I. 16})$$

Où

$$\begin{cases} \gamma_x(x, y, z, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})u = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_y(x, y, z, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_z(x, y, z, t) = \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})w = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{I. 17})$$

On obtient finalement l'expression vectorielle du champ d'accélération

$$\vec{\gamma}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \quad (\text{I. 18})$$

I. 3. Conservation de la masse

I. 3. 1. Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse : la variation de masse, pendant un temps dt , d'un élément de volume fluide doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle du fluide sortant.

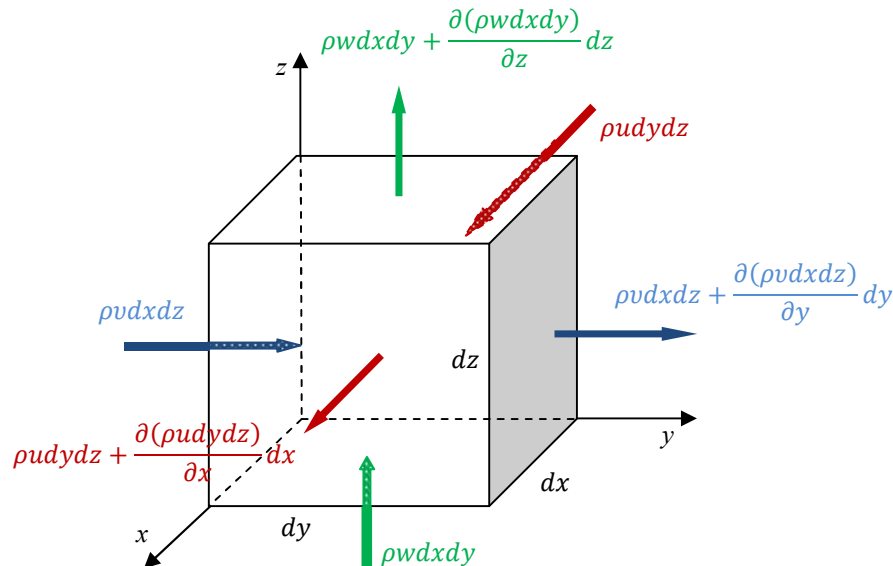


Figure I.5 : Les flux de masse à travers les faces de l'élément de volume

On considère un élément de volume fixe de fluide $dV = dx dy dz$. Sa masse peut s'écrire comme ρdV . La variation de cette masse pendant dt s'écrit

$$dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt \quad (\text{I. 19})$$

Cette variation doit alors être égale à la somme des masses de fluide qui entrent et sortent par les six faces de l'élément de volume dV .

Suivant l'axe des y , le fluide entre avec la vitesse v_y et sort avec la vitesse v_{y+dy} . Par conséquent, la masse entrant pendant le temps dt s'exprime par $\rho v dx dz dt$ et la masse sortant par $\left(\rho v dx dz + \frac{\partial(\rho v dx dz)}{\partial y} dy\right) dt$. Le bilan sur l'axe des y donne $-\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz dt$

Par analogie sur les deux autres axes on trouve $-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$ suivant l'axe (Ox) , et $-\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt$ suivant l'axe (Oz) . Au total, à travers les six faces on a

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt \quad (\text{I. 20})$$

La conservation de la masse du volume dV s'écrit donc

$$dm = \frac{\partial(\rho dV)}{\partial t} dt = - \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dV dt \quad (I.21)$$

D'où l'équation de conservation de la masse ou encore l'équation de continuité

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{V}) \quad (I.22)$$

Cette équation de continuité peut aussi s'écrire sous une autre forme équivalente

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{V} = 0 \quad (I.23)$$

I.3.2. Fonction de courant : Débit volumique

Soient deux points A et B appartenant respectivement aux lignes de courant C_1, C_2 . Joignons les points A et B par une courbe \widehat{AMB} quelconque d'abscisse curviligne S.

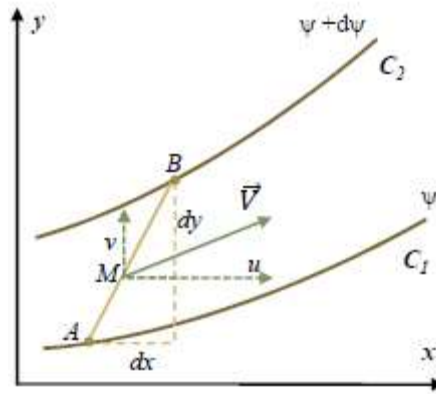


Figure I.6 : Débit volumique dans le tube de courant

Soit $\vec{V}(M, t)$ la vitesse du fluide en M. Le débit volumique à l'intérieur le tube limité par C_1, C_2 est :

$$q_v = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_0^1 dz \int_{\widehat{AMB}} (u dy - v dx) \quad (I.24)$$

Le débit q_v est constant et indépendant de \widehat{AMB} et on peut écrire

$$dq_v = u dy - v dx = d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \quad (I.25)$$

d'où

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (I.26)$$

La fonction ψ est appelée « fonction de courant ».

En coordonnées polaires le débit élémentaire dq_v est de la forme suivante :

$$dq_v = v_r r d\theta - v_\theta dr = d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} dr + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} r d\theta \quad (I. 27)$$

Ainsi

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (I. 28)$$

Lignes de courant

D'après la description Eulérienne d'un écoulement bidimensionnel à un instant fixe t_1 , une ligne de courant est définie par la relation suivante

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t_1)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_1)} \quad (I. 29)$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous une autre forme équivalente

$$-v dx + u dy = 0 = d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \quad (I. 30)$$

Ainsi une ligne de courant est une ligne le long de laquelle le débit est constant : $\psi = C$.

I. 4. Caractéristiques d'un écoulement

I. 4. 1. Divergence du champ de vitesse : Ecoulement incompressible

Le mouvement d'une particule fluide est un phénomène de transport puisqu'il s'agit d'un transfert de matière occupant un domaine infinitésimal de volume δV et de masse δm . A partir de l'équation de continuité on peut écrire

$$\text{div}\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{D(\delta m / \delta V)}{Dt} = \frac{\delta m}{\rho(\delta V)^2} \frac{D(\delta V)}{Dt} \quad (I. 31)$$

On obtient ainsi

$$\text{div}\vec{V} = \frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} \quad (I. 32)$$

De ce fait, la divergence de la vitesse d'écoulement représente le taux de dilatation de la particule de fluide par unité de volume.

$$\text{div}\vec{V} = 0, \quad \text{div}\vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (I. 33)$$

Ce qui signifie que le sens de fluide incompressible se traduit par la divergence nulle du champ de vitesse.

I. 4. 2. Rotationnel du champ de vitesse : Ecoulement Potentiel

Le fait qu'un écoulement est rotationnel ou tourbillonnaire se traduit par l'existence d'un mouvement de rotation des particules lors de l'écoulement. Pour cela, on définit le vecteur tourbillon par

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V}(M, t) \quad (\text{I. 34})$$

où

$$\overrightarrow{rot} \vec{V}(M, t) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (\text{I. 35})$$

Ces particules de fluides tournent à une vitesse angulaire Ω égal à la moitié du module du vecteur rotationnel.

Remarque

L'annulation du vecteur tourbillon signifie que le champ de vitesse est nécessairement un gradient.

$$\overrightarrow{rot} \vec{V}(M, t) = \vec{0} \implies \vec{V}(M, t) = \overrightarrow{grad} \varphi(M, t) \quad (\text{I. 36})$$

où φ est le potentiel de vitesse. L'écoulement est dit alors irrotationnel ou potentiel.

I. 5. Les écoulements potentiels élémentaires

Dans ce qui suit, on présente les principaux écoulements plans (2dim) élémentaires :

I. 5. 1. Ecoulement uniforme

Soit un écoulement rectiligne uniforme de vitesse égale en module à V_∞ inclinée d'un angle α sur l'axe des x.

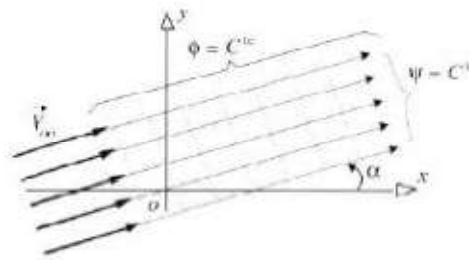


Figure I.7 : Ecoulement uniforme

Le champ des vecteurs de vitesse s'écrit comme suit

$$\text{En fonction de } \psi: \begin{cases} u = V_\infty \cos \alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = V_\infty \sin \alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{I. 37})$$

$$\text{En fonction de } \varphi: \begin{cases} u = V_\infty \cos \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = V_\infty \sin \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

Après intégration on aboutit à une fonction de courant de la forme

$$\psi(x, y) = -vx + uy \quad (\text{I.39})$$

et un potentiel de vitesse s'écrivant comme suit

$$\varphi(x, y) = ux + vy \quad (\text{I.40})$$

I. 5. 2. Source/puits à l'origine

Cet écoulement potentiel est caractérisé par un débit volumique q_v . Son champ de vitesse v_r est radiale, symétrique/(Oz) et tend vers 0 quand r tend vers l'infini.

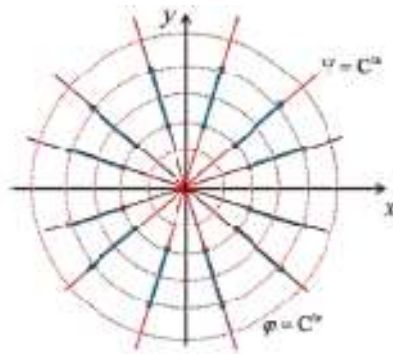


Figure I.8 : Source placée à l'origine

Son profil de vitesse est

$$\vec{V}(r) = \frac{q_v}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_r \quad (\text{I.41})$$

On détermine ψ et φ en écrivant le champ de vitesse

$$\text{En fonction de } \psi: \begin{cases} v_r = \frac{q_v}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

$$\text{En fonction de } \varphi: \begin{cases} v_r = \frac{q_v}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ v_\theta = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{I.43})$$

Après intégration on aboutit à une fonction de courant de la forme

$$\psi(\theta) = \frac{q_v}{2\pi} \theta \quad (\text{I.44})$$

et un potentiel de vitesse s'écrivant comme suit

$$\varphi(x, y) = \frac{q_v}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (\text{I.45})$$

Remarque

Cet écoulement possède un point singulier $r = 0$ qui est l'origine O . Selon la valeur de q_v (> 0) ou (< 0), cette origine est qualifiée de source ou puits.

I. 5. 3. Vortex simple

C'est un écoulement à symétrie cylindrique engendré par un fil tourbillonnaire lié à l'axe de symétrie (Oz).

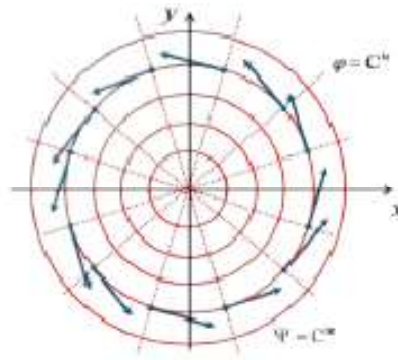


Figure I.9 : Vortex simple placée à l'origine

Son champ de vitesse, bidimensionnel dans le plan (xOy), est orthoradiale :

$$\vec{V} = V(r)\vec{e}_\theta \quad (\text{I.46})$$

La vorticité ou «rotation locale» est nulle en tout point de l'écoulement sauf au centre O qui est un point singulier

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial v_\theta}{v_\theta} = -\frac{\partial r}{r} \quad (\text{I.47})$$

D'où

$$\int \frac{\partial v_\theta}{v_\theta} = -\int \frac{\partial r}{r} \Rightarrow \ln(v_\theta) = -\ln(r) + C \Rightarrow v_\theta = \frac{K}{r} \quad (\text{I.48})$$

La circulation Γ du vecteur de vitesse le long d'un cercle, de rayon r et de centre O , est constante et non nulle

$$\Gamma = -\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = -\oint \frac{K}{r} \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = -\int_0^{2\pi} K d\theta = -2\pi K \Rightarrow K = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (\text{I.49})$$

Ainsi l'expression du profil de vitesse du vortex simple est

$$\vec{V}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (\text{I.50})$$

On détermine ψ et φ en écrivant le champ de vitesse

$$\text{En fonction de } \psi: \begin{cases} v_r = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (\text{I. 42})$$

$$\text{En fonction de } \varphi: \begin{cases} v_r = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{I. 43})$$

Après intégration on aboutit à une fonction de courant de la forme

$$\psi(\theta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (\text{I. 44})$$

et un potentiel de vitesse s'écrivant comme suit

$$\varphi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (\text{I. 45})$$