

II. 1. Introduction

En mécanique des fluides, on se sert le plus souvent d'une description eulérienne du mouvement, c'est-à-dire qu'on ne suit pas les particules dans leur mouvement individuel, mais on examine le mouvement du fluide à un endroit donné. Cette description introduit deux notions de base :

- la notion de dérivée matérielle ou particulaire ;
- la notion de système ouvert et de volume de contrôle.

Dans ce chapitre, on va présenter l'équation de continuité par la formulation différentielle ou locale basée sur un élément de volume infinitésimal ; et par la formulation intégrale ou globale en se basant sur la notion du volume de contrôle. On présente, aussi, la dérivation des équations linéaires de conservation quantité de mouvement (Equations de Navier-Stokes) pour les systèmes fluides, en utilisant le théorème de transport de Reynolds.

II. 2. Théorème de Reynolds (théorème de transport)

Soit un fluide occupant à l'instant t un domaine fini D de volume V délimité par une surface S . Considérons l'intégrale de volume I sur ce domaine D :

$$I = \iiint_V G(\vec{r}, t) dV \quad (\text{II. 1})$$

où $G(\vec{r}, t)$ est une grandeur locale (fonction du temps et de la position \vec{r} de la particule fluide) liée à l'unité de volume du fluide.

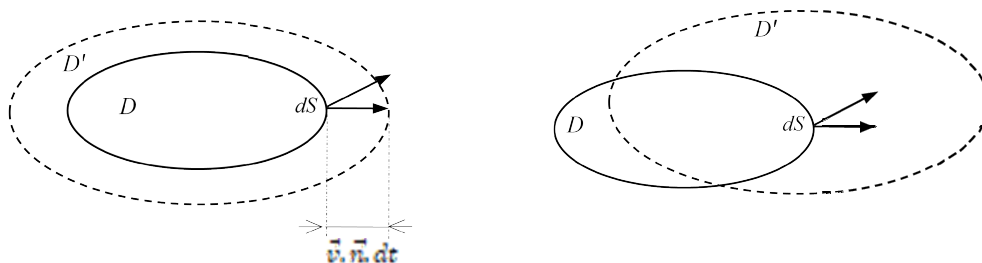


Figure II.1 : Variation d'une grandeur extensive avec le temps

Comme le domaine enveloppant les particules fluides qui sont en mouvement, le volume matériel V est une fonction du temps et l'évaluation ainsi présente un inconvénient. Afin de surmonter le problème, on fait coïncider à instant de temps t le volume matériel fermé V avec un volume de contrôle fixe, V_c sur lequel on pourra effectuer les calculs plus facilement.

La dérivée particulaire de l'intégrale I est la variation élémentaire de I en suivant le fluide dans son mouvement entre D et D' (figure II.1), lorsque le temps s'accroît de dt . Elle est composée de deux termes :

- La variation dI_1 locale qui est restée fixe c'est-à-dire commune aux deux domaines D et D' , représentée par

$$dI_1 = \iiint_{V_c} \frac{\partial G(\vec{r}, t)}{\partial t} dt dV \quad (\text{II. 2})$$

- Une variation dI_2 due à l'échange convectif de I avec le milieu extérieur à travers la surface S_c . Le volume du fluide transportant cette quantité de I (augmentation ou diminution) au cours de la transformation de D en D' est :

$$dV = \iint_{S_c} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt dS \quad (\text{II. 3})$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire perpendiculaire à dS orienté vers l'extérieur de D . Ce flux de quantité G traversant la surface S_c enveloppant le volume de contrôle V_c provoque un changement de grandeur I égal à

$$dI_2 = \iint_{S_c} G(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt dS \quad (\text{II. 4})$$

Ainsi, la variation totale est

$$dI = \iiint_{V_c} \frac{\partial G(\vec{r}, t)}{\partial t} dt dV + \iint_{S_c} G(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dt dS \quad (\text{II. 5})$$

Par conséquent, la dérivée particulaire de l'intégrale I est définie par

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V G(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V_c} \frac{\partial G(\vec{r}, t)}{\partial t} dV + \iint_{S_c} G(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{II. 6})$$

II. 3. Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de conservation de la masse du fluide. Cette dernière est une grandeur extensive, elle se calcule par une intégrale de volume. De ce fait, on utilise le théorème de transport de Reynolds pour aboutir à l'équation de continuité en se basant sur la conservation la masse du fluide au cours de son écoulement.

Soit un fluide occupant à l'instant t un domaine fini $D(t)$ de volume V limité par une surface S que l'on suit dans son mouvement. La grandeur extensive m , conservée le long de l'écoulement, est calculée sur ce domaine par l'intégrale de volume

$$m = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (\text{II. 7})$$

Sa dérivée particulaire est donc nulle d'où

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = 0 \quad (\text{II.8})$$

En effectuant le bilan global, du fluide en mouvement, sur le volume de contrôle V_c entouré par S_c , les quantités entrantes et sortantes du fluide apparaissent sous forme de débit volumique c'est-à-dire intégrale. Ainsi, la variation de volume de fluide dans le volume fixe V_c par unité de temps est égale au débit volumique entrant – débit volumique sortant.

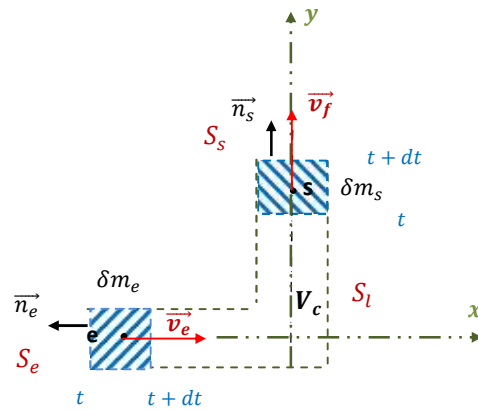


Figure II.2 : Bilan de masse dans un tube

On a pris comme exemple dans la figure ci-dessus l'écoulement dans un tube où la surface imaginaire S_c , enveloppant le volume de contrôle, est la somme des surfaces d'entrée S_e , de sortie S_s et la surface latérale S_l du tube qui est une paroi solide où $(\vec{V} \cdot \vec{n} = 0)$. Le débit de masse net à travers la surface de contrôle $S_c = S_e + S_s + S_l$ est donc

$$\underbrace{\iint_{S_c} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux à travers } S_c} = \underbrace{\iint_{S_e} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux entrant}} - \underbrace{\iint_{S_s} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{flux sortant}} \quad (\text{II.9})$$

Le flux de masse traversant la surface d'un volume de contrôle, correspond à la quantité de masse qui "s'accumule" (négative ou positive) par unité de temps dans le volume de contrôle. Cette variation de masse dans le volume de contrôle peut s'écrire

$$\left. \frac{\partial m}{\partial t} \right|_{V_c} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_c} \rho dV \quad (\text{II.10})$$

Elle est équivalente à la variation, dans le temps, de la masse du fluide dans le volume de contrôle. On obtient ainsi le principe de conservation de masse, pour un volume de contrôle, dans l'absence de sources (puits).

$$\underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\text{Accumulation de } m \text{ dans } V_c \text{ dans le temps}} + \underbrace{\iint_{S_c} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Les flux massiques à travers } S_c} = 0 \quad (\text{II.11})$$

C'est bien l'expression du *théorème de transport de Reynolds* (dérivée particulière d'une intégrale de volume)

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV}_{\text{Variation temporelle de } \mathbf{m} \text{ en suivant le système}} = \underbrace{\iiint_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{\text{Variation temporelle de } \mathbf{m} \text{ dans } V_c \text{ (locale)}} + \underbrace{\iint_{S_c} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{débit net de } \mathbf{m} \text{ traversant } S_c \text{ entourant } V_c} = 0 \quad (\text{II. 12})$$

A l'aide du théorème de flux-divergence (d'Ostrogradsky), on transforme l'intégrale de surface S_c en une intégrale de volume

$$\iint_{S_c} \rho \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{V_c} \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) dV \quad (\text{II. 13})$$

L'équation de conservation de la masse devient donc

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{V}) \right) dV = 0 \quad (\text{II. 14})$$

Cette égalité est valable quel que soit le volume V considéré. En faisant tendre ce volume vers un volume contenant une seule particule fluide placée au point, noté M_0 , on a

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) \right) \Big|_{M_0} \cdot \Delta V = 0 \quad (\text{II. 15})$$

Comme ΔV n'est pas nul, c'est la parenthèse qui est nulle. D'où on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (\text{II. 16})$$

qui représente l'équation de continuité sous forme vectorielle.

Sous forme développée

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 17})$$

Sous forme tensorielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{II. 18})$$

Si le fluide est incompressible : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \text{div}(\vec{V}) = 0$, d'où

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{II. 19})$$

II. 4. Les équations de quantité de mouvement (équations de Navier-Stocks)

A l'aide du théorème de transport ; on va établir l'équation du débit de quantité de mouvement qui représente l'évolution temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume de fluide en écoulement.

On a montré, précédemment, que la dérivée particulière d'une intégrale de volume, c'est-à-dire d'un volume que l'on suit dans son mouvement, s'écrit

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\mathbf{V}} G d\mathbf{V} = \iiint_{\mathbf{V}} \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \text{div}(G\vec{V}) \right) d\mathbf{V} \quad (\text{II. 20})$$

où $G(x_i, t)$ est une fonction volumique des variables (x_i, t) attachée au domaine \mathbf{V} contenant un ensemble de particules fluides se déplaçant à vitesse $\vec{V}(x_i, t)$.

Comme on est amenés à faire le bilan en volume d'une grandeur f massique (quantité mouvement), la fonction ρf doit être substituée à G dans la relation précédente. On obtient

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\mathbf{V}} \rho f d\mathbf{V} = \iiint_{\mathbf{V}} \left(\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \text{div}(\rho f \vec{V}) \right) d\mathbf{V} \quad (\text{II. 21})$$

En développant le terme de divergence, on aboutit à

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\mathbf{V}} \rho f d\mathbf{V} = \iiint_{\mathbf{V}} \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\vec{V}) \right) + \underbrace{f \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{V}) \right)}_{=0} d\mathbf{V} \quad (\text{II. 22})$$

La dernière intégrale du second membre est nulle, grâce à l'équation de continuité, tandis que la première intégrale représente dérivée particulière de la grandeur f . Ainsi on peut écrire

$$\iiint_{\mathbf{V}} \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\vec{V}) \right) d\mathbf{V} = \iiint_{\mathbf{V}} \rho \frac{Df}{Dt} d\mathbf{V} \quad (\text{II. 23})$$

En se servant du théorème d'Ostrogradsky, cette intégrale aussi comme suit

$$\iiint_{\mathbf{V}} \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\vec{V}) \right) d\mathbf{V} = \iiint_{\mathbf{V}} \rho \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{V} + \iint_{\mathbf{S}} \rho f (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{II. 24})$$

Pour la fonction vectorielle de quantité de mouvement, la forme intensive est $f = \vec{V}$. On écrit la loi de conservation de quantité de mouvement sous la forme

$$\iiint_{\mathbf{V}} \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} d\mathbf{V} = \iiint_{\mathbf{V}} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} d\mathbf{V} + \iint_{\mathbf{S}} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{II. 25})$$

La deuxième loi de Newton établie que

$$\iiint_{\mathbf{V}} \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} d\mathbf{V} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (\text{II. 26})$$

Alors

$$\sum \vec{F}_{ext} = \iiint_V \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (II.27)$$

Les forces appliquées comprennent les forces de volume et les forces de surface agissant à la surface du volume. Les forces de volume s'exerçant à distance en tout point M du volume matériel V , par exemple la force exercée par le champ de gravité nommée poids, qui s'écrit comme suit

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV \quad (II.28)$$

Tandis que les forces de surface sont transmises par le fluide, extérieur du volume (domaine), en tout point M de la surface de contact S limitant ce domaine. Les forces perpendiculaires à la surface sont les forces de pression et les forces parallèles à la surface sont les forces de frottement dû à l'effet visqueux du fluide. Elles sont définies par la relation

$$dF_{i,surf} = \sigma_{ij} dS_j \quad (II.29)$$

avec σ_{ij} est la contrainte de direction i appliquée sur le plan dont sa normale est j .

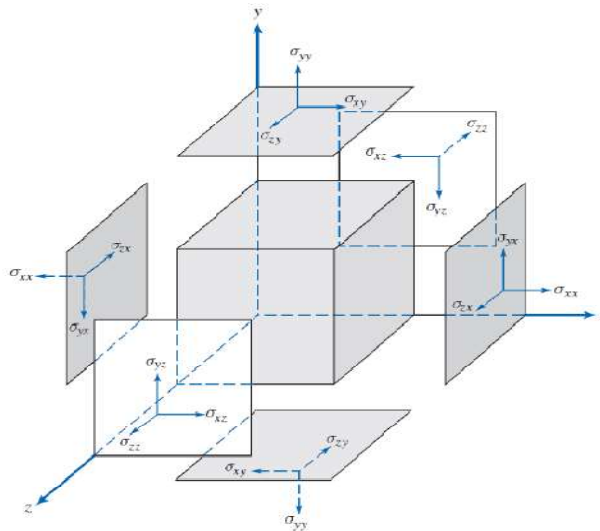


Figure II.3 : Composantes des forces de surface externes

L'expression des forces de surfaces est

$$dF_{i,surf} = \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x} dx(dydz) + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial y} dy(dxdz) + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial z} dz(dxdy)$$

Comme, à un instant t , le volume matériel V en mouvement coïncide avec le volume de contrôle, on aboutit à l'expression du théorème d'Euler

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{ext}}_{\text{Forces exercées sur } V_c} = \underbrace{\iiint_{V_c} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV}_{\text{Variation de la quantité de } m^{vt} \text{ dans } V_c} + \underbrace{\iint_{S_c} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{Flux de la quantité de } m^{vt} \text{ à travers } S_c} \quad (II.30)$$

L'équation de la quantité de mouvement est une équation vectorielle, on peut donc l'écrire pour les 3 composantes du vecteur vitesse u, v et w , ou en notation tensorielle pour u_i avec $i=1,2,3$

$$\sum F_i = \iiint_{V_c} \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho V_i (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (II.31)$$

Afin d'obtenir l'équation vectorielle de Navier-Stocks, on transforme l'intégrale de surface en une intégrale de volume

$$\iiint_{V_c} \rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) V_i \right) dV = \iiint_{V_c} \left(\rho \vec{g} + \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial z} \right) dV \quad (II.32)$$

D'où on obtient

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) V_i \right) = \rho \vec{g} + \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial z} \quad (II.33)$$

Ces équations contiennent les vitesses et les contraintes comme inconnus. Ce problème de fermeture du système est résolu en réécrivant le tenseur de contraintes $\bar{\sigma}$ en fonction du tenseur des taux de déformation \bar{D} qu'on va démontrer son lien directe avec le tenseur des gradients de vitesses.

II. 4. 1. Tenseur déviateur des contraintes

Afin de séparer les effets des forces de frottement et celles des forces de pression dans le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, on introduit le tenseur déviateur des contraintes tel que

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij} \Leftrightarrow \bar{\sigma} = \bar{\tau} - pI \quad (II.34)$$

où I est le tenseur identité. En d'autres termes, il est construit de telle sorte que sa trace soit nulle.

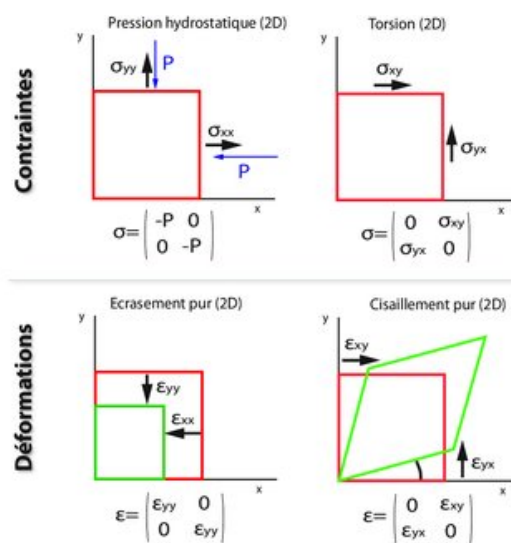


Figure II.4 : Les effets des différentes contraintes au plan (xOy)

Le tenseur déviateur des contraintes est souvent appelé tenseur des contraintes visqueuses car, comme on le verra dans la section suivante, il est directement lié à la viscosité du fluide.

De la décomposition du tenseur des contraintes en $\bar{\sigma} = \bar{\tau} - pI$, il s'ensuit que l'équation du bilan de quantité de mouvement peut être réécrite comme suit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_j V_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (II. 35)$$

II. 4. 2. Tenseur des taux de déformations

Comme en mécanique des fluides, les déformations ne sont pas statiques le tenseur décrivant le taux de déformation est usuellement décrit par le tenseur des taux de vitesse de déformation.

Afin de définir le tenseur des taux de déformation, on fait une analyse bidimensionnelle détaillée du champ de vitesse, dans un repère fixe (xOy) , tout en s'appuyant sur la figure(II.5).

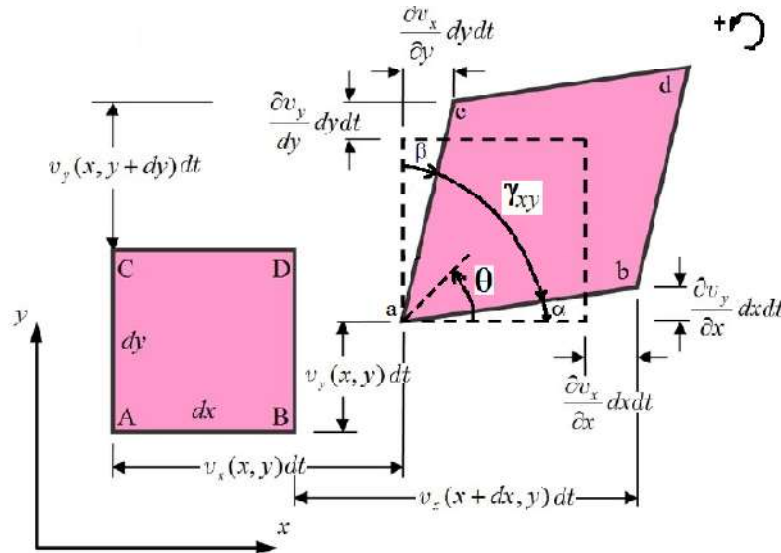


Figure II.5 : Différentes déformations : translation, expansion, cisaillement, rotation

A un instant t donné, on considère une parcelle de fluide ABCD (élément de fluide) de position définie par les coordonnées des points $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ et de vitesse définie par les vecteurs vitesse :

$$\vec{V}_A(u_{xA}, v_{yA}), \vec{V}_B(u_{xB}, v_{yB}), \vec{V}_C(u_{xC}, v_{yC}), \vec{V}_D(u_{xD}, v_{yD})$$

De même, à un instant $t + dt$, la position de la parcelle est définie par les coordonnées des points $A'(x_{A'}, y_{A'}), B'(x_{B'}, y_{B'}), C'(x_{C'}, y_{C'}), D'(x_{D'}, y_{D'})$ et sa vitesse est définie par les vecteurs vitesse : $\vec{V}_{A'}(u_{xA'}, v_{yA'}), \vec{V}_{B'}(u_{xB'}, v_{yB'}), \vec{V}_{C'}(u_{xC'}, v_{yC'}), \vec{V}_{D'}(u_{xD'}, v_{yD'})$.

Entre les deux positions la parcelle fluide subit des déformations que nous allons décomposer ci-dessous en deux parties :

Les éléments diagonaux du tenseur des taux de déformation

La parcelle fluide subit une translation globale de $v_x dt$ suivant (Ox) et $v_y dt$ suivant (Oy). Elle est globalement déformée élongation ou contraction de $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$ suivant x et de $\frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt$ suivant y . A partir de la figure (II.5) on définit la position et la vitesse de la parcelle aux instants t et $t + dt$ comme suit

A l'instant t

$$\text{La position : } \begin{cases} A(0,0) \\ B(dx, 0) \\ C(0, dy) \\ D(dx, dy) \end{cases} \quad \text{La vitesse : } \begin{cases} \vec{V}_A(v_x, v_y) \\ \vec{V}_B\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx, v_y\right) \\ \vec{V}_C\left(v_x, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) \\ \vec{V}_D\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) \end{cases}$$

A l'instant $t + dt$

$$\text{La position : } \begin{cases} A'(v_x dt, v_y dt) \\ B'\left(dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt, v_y dt\right) \\ C'\left(v_x dt, dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt\right) \\ D'\left(dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt, dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt\right) \end{cases}$$

L'accroissement relatif, suivant x , de la longueur est donné par

$$\frac{d(AB)}{AB} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt\right) - dx}{dx} = \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{\substack{\text{taux} \\ \text{élongation} \\ \text{suivant } x}} dt$$

Suivant y , le taux d'élongation sera alors $\frac{\partial v_y}{\partial y} dt$.

Comme la parcelle fluide ABCD est une surface (2dim) sa déformation (contraction élongation) est liée à la variation relative de son aire définie par

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= \frac{S' - S}{S} = \frac{\left(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt\right) \left(dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt\right) - dx dy}{dx dy} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dt + \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} dt^2}_{\approx \varepsilon \rightarrow 0} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dt \end{aligned}$$

En trois dimensions 3dim, le taux de déformation est

$$\frac{dV}{V} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dt = \text{Tr}(\overline{\text{grad}\vec{V}}) dt = \text{div}\vec{V} dt \quad (\text{II. 36})$$

En conséquence, les éléments de diagonale du tenseur des taux de déformation correspondent aux taux d'élongation (ou contraction) du fluide dans les trois directions de l'espace. La trace de ce tenseur permet d'évaluer le taux d'expansion local du volume.

Les éléments non-diagonaux du tenseur des taux de vitesse de déformation

La parcelle fluide, durant son déplacement, subit toujours une translation globale de $v_x dt$ suivant (Ox) et $v_y dt$ suivant (Oy). Mais dans ce cas elle se met à une déformation angulaire de $\frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt$ suivant x et de $\frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt$ suivant y .

A partir de la figure (II.5) on définit la position et la vitesse de la parcelle aux instants t et $t + dt$ comme suit

A l'instant t

$$\text{La position : } \begin{cases} A(0,0) \\ B(dx, 0) \\ C(0, dy) \\ D(dx, dy) \end{cases} \quad \text{La vitesse : } \begin{cases} \vec{V}_A(v_x, v_y) \\ \vec{V}_B\left(v_x, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\right) \\ \vec{V}_C\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy, v_y\right) \\ \vec{V}_D\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy, v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\right) \end{cases}$$

A l'instant $t + dt$

$$\text{La position : } \begin{cases} A'(v_x dt, v_y dt) \\ B'(dx + v_x dt, v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt) \\ C'(v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt, dy + v_y dt) \\ D'(dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt, dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt) \end{cases}$$

On calcule de la déformation angulaire comme suit

$$\begin{cases} d\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ d\beta \simeq \tan\beta = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt}{dy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{cases}$$

Pour la déformation angulaire on peut envisager deux cas particuliers

- Les deux angles sont égaux $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \rightarrow$ tenseur des taux de déformation symétrique.

C'est le cas d'une « déformation pure » au cours de laquelle l'angle $\gamma = \widehat{BAC}$ subit une variation égale à

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma' - \gamma}{dt} = \frac{(\gamma - d\alpha - d\beta) - \gamma}{dt} = -\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -2 \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (\text{II.37})$$

- Les deux angles sont opposées $\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \rightarrow$ tenseur des taux de déformation antisymétrique. Il s'agit ainsi, d'une « rotation pure » autour de l'axe (Oz) de vitesse angulaire

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (\text{II.38})$$

Cette expression correspond à la moitié de la composante, suivant (Oz), du vecteur rotationnel de la vitesse suivant

$$\vec{\Omega} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \overrightarrow{Rot \vec{v}} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.39})$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur tourbillon qui comporte toutes les rotations possibles, autour des trois axes, de la particule fluide durant son écoulement.

Afin de déterminer le tenseur des taux de déformations angulaires pures on doit écrire gradient de vitesse $\overline{\text{grad} \vec{V}}$ sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique \overline{D} et d'un tenseur antisymétrique \overline{W}

$$\begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \\ v_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\overline{\text{grad} \vec{v}}} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (\text{II.40})$$

Remarque

En coordonnées cylindriques l'expression du gradient de vitesse est

$$\overline{\text{grad} \vec{V}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\text{grad}}\vec{V}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{W}} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{D}}} \\
&\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{W}}} \tag{II.41}
\end{aligned}$$

II. 4. 3. Relation entre le tenseur déviateur de contrainte et le tenseur de taux de déformation

Dans le cas des fluides Newtoniens, les contraintes sont des fonctions linéaires des taux de déformations du milieu. De ce fait, le tenseur déviateur de contrainte $\overline{\overline{\tau}}$ et le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ sont liés par la relation suivante

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu\overline{\overline{D}} \tag{II.42}$$

Afin d'exprimer le tenseur des taux de cisaillement, il est plus convenable de décrire la déformation pure $\overline{\overline{D}}$ comme la somme d'une expansion isotrope $\overline{\overline{D}}_{exp}$ ($\overline{\overline{D}}_{ij}, i = j$) et d'un cisaillement à volume constant $\overline{\overline{D}}_{cis}$ ($\overline{\overline{D}}_{ij}, i \neq j$)

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{D}}_{cis} + \overline{\overline{D}}_{exp} \tag{II.43}$$

Partie expansion

La variation relative décrivant l'évolution du volume $\frac{dV}{V}$ durant le temps infinitésimal dt est définie par la relation

$$\frac{dV}{V} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dt = \text{div}\vec{V} dt \Rightarrow \text{div}\vec{V} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \tag{II.44}$$

D'autre part, de l'équation de continuité on a la relation

$$\text{div}\vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \tag{II.45}$$

qui montre qu'une divergence de la vitesse positive correspond à une diminution locale de masse volumique.

La composante du tenseur des taux de déformations associée à l'expansion isotrope notée \bar{D}_{exp} est, ainsi, proportionnelle à la divergence de la vitesse. Alors on peut écrire

$$\bar{D}_{exp} = \left(\frac{Tr(\bar{D})}{3} \right), \quad \bar{D}_{exp,ij} = \frac{div\vec{V}}{3} \delta_{ij} \quad (\text{II. 46})$$

Partie cisaillement

Le tenseur de cisaillement \bar{D}_{cis} s'obtient par la différence entre \bar{D} et \bar{D}_{exp} . Alors on peut écrire

$$\bar{D}_{cis} = \bar{D} - \bar{D}_{exp}, \quad \bar{D}_{cis,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{div\vec{V}}{3} \delta_{ij} \quad (\text{II. 47})$$

Puisque la trace de \bar{D} et la trace de \bar{D}_{exp} sont toutes les deux égales à la divergence de la vitesse, le tenseur \bar{D}_{cis} est de trace nulle. Ainsi comme \bar{D} , le tenseur \bar{D}_{cis} est symétrique.

En conséquence, le tenseur déviateur de contrainte $\bar{\tau}$ est défini comme suit

Si $i = j$:

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \quad (\text{II. 48})$$

Si $i \neq j$:

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{II. 49})$$

Afin d'écrire le tenseur déviateur de contrainte sous une forme plus compacte rassemblons les deux cas dans une seule relation

$$\forall i, \forall j: \quad \bar{\tau}_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (\text{II. 50})$$

II. 4. 4. Equations de Navier-Stocks

En substituant $\bar{\tau}_{ij}$ dans l'équation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

on obtient l'expression suivante

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \underbrace{v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}}_{=0} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right] + \rho g_i \end{aligned} \quad (\text{II. 51})$$

Pour le cas d'un fluide incompressible : $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} = 0$, $\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = 0$

En orientant la direction de x_3 ou z verticalement vers le haut, on écrit la pression motrice

$$\rho \vec{g} = -\rho \|\vec{g}\| \vec{k} = -\vec{\nabla}(\rho g z) \Rightarrow p^* = p + \rho g_i z \quad (\text{II. 52})$$

Le bilan de quantité de mouvement, lorsque le fluide est incompressible et newtonien de viscosité constante, porte le nom d'équation de Navier-Stokes qui s'écrit sous la forme

➤ tensorielle

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (\text{II.53})$$

➤ vectorielle

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\rho \vec{V} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} p^* + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.54})$$

➤ développée

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (\text{II.55})$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique du fluide.

II. 3. 2. Dérivation de l'équation du moment de quantité en mouvement

De la même manière que pour le théorème de quantité de mouvement, et à l'aide du théorème de transport ; on va établir l'équation du moment de quantité de mouvement qui représente l'évolution temporelle de l'énergie cinétique d'un élément de volume de fluide en écoulement.

En substituant l'énergie par sa forme intensive est $\frac{G}{\rho} = e$ dans l'équation (II.22), on obtient

$$\frac{D}{Dt} \iiint_V \rho e dV = \frac{DE}{Dt} \Big|_V = \iiint_{V_c} \rho \frac{\partial e}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{II.56})$$

L'énergie e , par unité de masse, comprend différentes sources ; les plus importantes en génie mécanique sont : l'énergie interne \mathbf{u} , l'énergie potentielle (gz) et l'énergie cinétique ($V^2/2$). En mécanique des milieux continus, ces quantités sont modélisées de manière thermodynamique.

La première loi de la thermodynamique exprime la conservation de l'énergie d'un système fermé en considérant le travail produit et de la chaleur fournie sous la forme

$$\frac{DE}{Dt} \Big|_V = \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (\text{II.57})$$

\dot{Q} comprend les différents formes de chaleur (conduction, convection, etc...) et \dot{W} le travail, par unité de temps, des forces mécaniques (à l'arbre des turbines), des forces de pression et des forces visqueuses (frottement).

Tel que dans la conservation de la quantité de mouvement, où les forces constituent des sources et des puits, la puissance des forces \dot{W} et la puissance thermique \dot{Q} représentent des sources et des puits pour la variation de la grandeur d'énergie e . Alors, le théorème de transport, pour le bilan d'énergie sur un volume de contrôle fixe, conduit à l'expression suivante

$$\iiint_{V_c} \rho \frac{\partial e}{\partial t} dV + \iint_{S_c} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \dot{Q} - (\dot{W}_{méc} + \dot{W}_{pres} + \dot{W}_{visc}) \quad (\text{II. 58})$$

Cette forme générale est trop complexe pour le cadre de ce cours. Pour cela, précisons les hypothèses à utiliser :

- ▶ Les écoulements stationnaires et incompressibles.
- ▶ L'écoulement comportant qu'une seule entrée/sortie avec des propriétés uniformes.
- ▶ L'écoulement est adiabatique.
- ▶ Absence de source de chaleur.
- ▶ L'énergie est de la forme $e = V^2 / 2 + gz$, (p/ρ est considéré dans \dot{W}_{pres}).

Avec ces simplifications le bilan d'énergie devient simple est pratique

$$\iint_{S_c} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = -(\dot{W}_{méc} + \dot{W}_{pres} + \dot{W}_{visc}) \quad (\text{II. 59})$$

En industrie, le travail mécanique $\dot{W}_{méc}$ est dû à la présence d'une pompe ou d'une turbine (travail à l'arbre). Dans le premier cas, ce travail est positif car il est fourni par la pompe au fluide, tandis que, dans le deuxième cas il est négatif et il est enlevé du fluide par la turbine.

Comme précisé aux hypothèses les propriétés de l'écoulement (vitesse, pression et l'énergie) sont uniformes aux surfaces d'entrée et de sortie, l'intégrale sur la S_C est remplacée par le bilan des énergies par unité de temps (puissances) entre les surfaces d'entrée et de sortie, alors

$$\iint_{S_c} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = (q_{m_e} e_e - q_{m_s} e_s) \quad (\text{II. 60})$$

Le travail de pression \dot{W}_{pres} correspond à celui fait par la force de pression, égale à $F_p = p \cdot S$, pour déplacer un tube de fluide, de volume V , une distance $\Delta x = u \cdot \Delta t$. Alors, il de la forme $\dot{W}_{pres} = p \cdot S \cdot \Delta x = pV$. Par conséquent,

$$\iint_{S_c} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS + \dot{W}_{pres} = q_{m_e} \left(e_e + \frac{p_e}{\rho} \right) - q_{m_s} \left(e_s + \frac{p_s}{\rho} \right) = -(\dot{W}_{méc} + \dot{W}_{visc}) \quad (\text{II. 61})$$

Cette expression correspond à l'équation de Bernoulli généralisée traduisant la conservation de l'énergie totale, par unité de temps, du système.

En divisant cette dernière par $q_m g$ on obtient la forme de conservation de charge totale écrite en fonction du travail spécifique de pression, calculé par unité de poids, $\dot{W}_{press} = p/\rho g$, du travail spécifique fourni (cas de pompe) $h_{méc} = \dot{W}_p/q_m g$ et du travail spécifique

des frottements $h = \dot{W}_{visc}/q_m g$ désignant l'énergie nécessaire pour vaincre le cisaillement (pertes de charges).

Alors, d'après les hypothèses et les simplifications adoptées, l'expression traduisant la conservation d'énergie par unité de poids par unité de temps " $q_m g$ " est

$$\left(\frac{1}{2}V_e^2 + gz_e + \frac{p_e}{\rho g}\right) + h_{pom} - h_{turb} - h_{frott} = \left(\frac{1}{2}V_s^2 + gz_s + \frac{p_s}{\rho g}\right) \quad (\text{II. 62})$$