

Calcul Intégral

1.1) Intégration d'une fonction en escalier

Définition 1.1: Soit $[a, b]$, un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$, on appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie de points

$$\Pi = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

on appelle pas de subdivision Π le réel $h = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$.

Définition 2.1: Une fct $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fct en escalier s'il existe une subdivision $\Pi = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ et des réels

$c_1, c_2, \dots, c_n$ tels que $f(x) = c_i$, pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i]$

Définition 3.1: on appelle intégrale de Riemann de la fct escalier f , le nombre réel $I = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$, indépendant de la subdivision Π , ou note

$$I = \int_a^b f(x) dx. \text{ Mesure l'aire algébrique comprise entre la courbe } f \text{ et}$$

l'axe des abscisses.

Exemple: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit la fct $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $x \mapsto f(x) = \lambda$.

$$\text{Alors } I = \int_a^b f(x) dx = \lambda(b-a)$$

1.2) Propriétés des fct intégrables

propriétés: Soient f, g deux fct intégrables sur $[a, b]$. On a alors

$$1) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$2) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3) \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \forall c \in [a, b].$$

$$6) \text{ Si } f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

$$7) f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

$$8) \text{ Si } f(x) \geq 0, \text{ et } \int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

$$9) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2.3) Primitives des fonctions.

Définition: Soit f une fct définie sur $I = [a, b]$, on peut lui associer une fct F définie sur $[a, b]$ telle que $F'(x) = f(x)$. La fonction F est dite dans ce cas primitive de f et on note $F(x) = \int_a^x f(t) dt + c, c \in \mathbb{R}$.

Exemple: $f(x) = \frac{1}{x}$, d'où: $F(x) = \ln x + c, c \in \mathbb{R}$

Théorème: Considérons une fonction $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue qui admet une dérivée continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors: $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$.

Exemple 1) $\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan t \right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$

1.4) Primitives des fcts usuelles:

Fonction de f	fonction primitive de f	D
$f(x) = k^2$ (k constante)	$kx + c \quad / c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}, k \neq 0.$
$f(x) = x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad / c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}, n > 0.$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\ln x + c \quad / c \in \mathbb{R}$	$] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
$f(x) = e^{ax}$	$\frac{1}{a} e^{ax} + c$	$\mathbb{R}, a \neq 0.$
$f(x) = ax + b$	$\frac{1}{2} ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}.$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$] 0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b), a \neq 0$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b), a \neq 0$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cosh x$	$\sinh x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sinh x$	$\cosh x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin} x + c$	$] -1, 1[$
$f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{Argsh} x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Argch} x + c$	$\mathbb{R}$

$f' f^n \quad (n \neq -1, n \in \mathbb{Z})$	$\frac{1}{n+1} f^{n+1} + C$
$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin f + C$
$\frac{f'}{1+f^2}$	$\arctan f + C$

1.5) Intégration par parties:

Soient $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fcts continûment dérivables. Alors:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

Exemple: Calculer $I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx$.

on pose: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$.

$g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$.

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = [-x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx.$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cos 0 + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1.$$

1.6) Intégration par changement de variable

Soient $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, une fct continûment dérivable et strictement monotone. Supposons que g vérifie $g[c, d] = [a, b]$. Pour toute fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on a.

$$\int_a^b f(u) du = \int_c^d f(g(t)) |g'(t)| dt.$$

Exemple: Calculer $I = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$

ona: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + 4 = 4 \left[\left(\frac{x-1}{2} \right)^2 + 1 \right]$

posons $t = \frac{x-1}{2}$, posons $t = \frac{x-1}{2}$, d'où $dt = \frac{dx}{2}$.

$$I = \int f(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan t + C = \arctan \left(\frac{x-1}{2} \right) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

intégration par parties:

Soient f, g deux fct continues dérivables. Alors:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Exemple: Calculer $I = \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos x dx$

on pose: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \sin x \Rightarrow g(x) = -\cos x$

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x \cos x dx = \left[-x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

$$I = -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

(2) Intégration par changement de variable

Soient f, g fct continues dérivables et $\gamma: [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fct continue dérivable et strictement

monotone. Supposons que $\gamma(a) = c, \gamma(b) = d$. On pose

$$f(x) = f(\gamma(t)), \quad g(x) = g(\gamma(t))$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_c^d f(t)g'(t)dt$$

Primitives des fonctions rationnelles :

1) Primitives des éléments simples de 1^{re} espèce

Il s'agit de calculer $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$.

a/ Dans le cas où $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

b/ Si $n=1$ et $a \in \mathbb{R}$, on a : $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

2) Primitive des éléments simples de seconde espèce :

Il s'agit de calculer $I(x) = \int \frac{\lambda x + \gamma}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$, où λ, γ, a, b, c

sont des réels tels que $b^2 - 4ac < 0$, et où $n \in \mathbb{N}^*$.

1^{ère} étape : si $\lambda \neq 0$, faire apparaître multiplicativement au numérateur

la dérivée du trinôme $ax^2 + bx + c$:

$$I(x) = \frac{\lambda}{2a} \int \frac{2ax + \frac{2a\gamma}{\lambda}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx.$$

$$= \frac{\lambda}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + \frac{\lambda}{2a} \left(\frac{2a\gamma}{\lambda} - b \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

La 1^{re} intégrale du dernier membre ci-dessus est aisément calculer, à l'aide du changement de variable

$$u = ax^2 + bx + c :$$

$$\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \int \frac{du}{u^n}.$$

2^{ème} étape: ramener le calcul de $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ à celui

de $\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ par un changement de variable affine.

En mettant le trinôme sous forme canonique, et en notant

$$\Delta = b^2 - 4ac:$$

$$ax^2+bx+c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right) = -\frac{\Delta}{4a} \left(1 + \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 \right).$$

A l'aide du changement de variable $t = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$, on a:

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \left(\frac{2a}{-\Delta} \right)^n \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

3^{ème} étape: Calculer $I_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, à l'aide d'une relation de récurrence.

$$\text{D'abord: } I_1(t) = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, par une intégration par parties:

$$I_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

$$= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \left[\int \frac{dt}{(1+t^2)^n} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \right].$$

$$= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n (I_n(t) - I_{n+1}(t)).$$

$$d'où: 2nI_{n+1}(t) = (2n-1)I_n(t) + \frac{t}{(1+t^2)^n}.$$

Exemple: 1) Calculer $I(n) = \int \frac{dx}{x^3(n+1)}$

ona: $\frac{1}{x^3(n+1)} = \frac{\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{n+1}$

Après des calculs on trouve: $\frac{1}{x^3(n+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{n+1}$

d'où: $I(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \ln|x| - \ln|n+1| + C.$

2) Calculer $I(n) = \int \frac{dx}{x^3+1}$, puis $J(n) = \int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

D'abord: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

d'où $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2-x+1}$
 $= \frac{1/3}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1}$

alors:

$$I(n) = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx.$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1} dx.$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{3}{6} \int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1}$$

Calculons $I_1 = \int \frac{dx}{x^2-x+1}$

on $I_1(n) = \int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2 + 1} = \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_1$

avec $C_1 \in \mathbb{R}$.

Finalement: $I(x) = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c / \mathbb{C}\mathbb{R}$

• Calculons $J(u) = \int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

En utilisant une primitivation par partie pour $I(u) = \int \frac{dx}{x^3+1}$

on pose $u = \frac{1}{x^3+1} \Rightarrow u' = \frac{-3x^2}{(x^3+1)^2}$

$u' = 1 \Rightarrow u = x$

d'où $I(u) = \left[\frac{x}{x^3+1} \right] + 3 \int \frac{x^3}{(x^3+1)^2}$
 $= \left[\frac{x}{x^3+1} \right] + 3 [I(u) - J(u)]$

Ainsi $J(u) = \frac{1}{3} \left[2I(u) + \frac{x}{x^3+1} \right]$

donc $J(x) = \frac{2}{9} \left[\ln|x+1| - \frac{1}{9} \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{3(x^3+1)} + c / \mathbb{C}\mathbb{R} \right]$

• **Primitives de fonctions** (rationnelles en certaines fct-usuelles..)

Fonction rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

• Pour calculer $\int R(\cos x, \sin x) dx$, où R désigne une fonction rationnelle de deux variables, on devra effectuer un changement de variable

$t = \tan \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

Exemple: calculer $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

on pose $t = \tan \frac{x}{2}$ donc $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$

2/ primitives des fonctions trigonométriques.

L'intégrale de Type: $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$, où R est une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

Pour calculer $\int R(\sin x, \cos x) dx$, on devra effectuer un changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ et en remplaçant $\cos x$, $\sin x$ et dx par

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Exemple. Calculer $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.

on pose $t = \tan \frac{x}{2}$ donc $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

$$\text{d'où } I = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

L'intégrale de Type: $I = \int \cos^m x \sin^n x dx$

Pour calculer I , on distingue quatre cas différents sont

Premier cas: si n et m sont pairs, on pourra linéariser, puis primitiver,

Pour cela, on utilise les formules: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ et $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Exemple: Calculer $I = \int \cos^2 x \sin^2 x dx$.

$$I = \int \cos^2 x \sin^2 x dx$$

$$= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - (\cos 2x)^2) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (\sin^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int du - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Deuxième cas: Si m est impaire et n est paire

on utilise le changement de variable $t = \sin x$.

Exemple: Calculer $I = \int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

$$I = \int \cos^2 x \sin^4 x \cdot \cos x dx.$$

$$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx.$$

$$\stackrel{t = \sin x}{=} \int t^4 (1 - t^2) dt$$

$$= \int (t^4 - t^6) dt$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C \quad | C = cte.$$

$$= \frac{(\sin x)^5}{5} - \frac{(\sin x)^7}{7} + C \quad | C = cte.$$

Troisième cas: Si m est paire et n impaire

on utilise le changement de variable $t = \cos x$.

Exemple: Calculer $I = \int \cos^2 x \sin^3 x dx$.

$$I = \int \cos^2 x \sin^2 x \cdot \sin x dx.$$

on pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$, donc

$$I = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx.$$

$$= \int t^2 (1 - t^2) (-dt)$$

$$= - \int t^2 - t^4 dt$$

$$= - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right] + C \quad | C = cte.$$

$$= -(\cos x)^3 + \frac{(\cos x)^5}{5} + C \quad | C = cte.$$

Quatrième cas: Si m et n sont impaires
on utilise le changement de variable $t = \cos x$ ou $t = \sin x$.

Exemple: calculer $I = \int \cos^3 x \sin^3 x dx$.

$$\text{ona } I = \int \cos^3 x \sin^3 x dx \\ = - \int \cos^3 x (1 - \cos^2 x) (-\sin x) dx.$$

on pose $t = \cos x$ d'où $dt = -\sin x dx$, alors

$$I = - \int t^3 (1 - t^2) dt \\ = - \int t^3 - t^5 dt \\ = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + c \quad / c = \text{cte}.$$

$$I = -\frac{(\cos x)^4}{4} + \frac{(\cos x)^6}{6} + c \quad / c = \text{cte}.$$

L'intégrale de type $\int \cos ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

on utilise les formules suivantes

$$1) \cos ax \sin bx = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x - \sin(a-b)x]$$

$$2) \cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(b-a)x]$$

$$3) \sin ax \sin bx = -\frac{1}{2} [\cos(a+b)x - \cos(a-b)x].$$

Intégration d'une fraction rationnelle en exponentiel:

Il s'agit de calculer $I = \int F(e^{ax}) dx$, où F est une fonction rationnelle en e^{ax} , $a \in \mathbb{R}^*$.

généralement, on effectuera le changement de variable $t = e^{ax}$.

$$\text{L'intégrale devient: } I = \frac{1}{a} \int \frac{F(t)}{t} dt.$$

Exemple: calculer $I = \int \frac{dx}{(e^x + 2)^2}$

on pose $t = e^x$, d'où $dt = e^x dx = t dx$, alors $dx = \frac{dt}{t}$.

$$I = \int \frac{dt}{t(t+2)^2}$$

$$\text{on a: } \frac{1}{t(t+2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{(t+2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} - \frac{2}{(t+2)^2} \right)$$

$$\text{d'où } I = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} - \frac{2}{(t+2)^2} \right) dt.$$

$$= \frac{1}{4} \ln|t| - \ln|t+2| + \frac{2}{t+2} + C \quad | C = \text{cte.}$$

$$\text{Donc: } I = \frac{1}{4} \ln e^x - \ln(e^x + 2) + \frac{2}{e^x + 2} + C \quad | C = \text{cte.}$$

Remarque: si $I = \int F(e^x) dx$, on utilise le même changement de variable.

Exemple: calculer: $I = \int \sqrt{e^x + 1} dx$.

on pose $t = e^x$, d'où $dt = e^x dx = t dx$, alors $dx = \frac{dt}{t}$.

donc

$$I = \int \frac{\sqrt{t+1}}{t} dt.$$

on pose aussi $u = \sqrt{t+1}$, d'où $u^2 = t+1$, alors $t = u^2 - 1$

$$\text{et } du = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} dt = \frac{1}{2u} dt$$

$$\text{d'où: } dt = 2u du.$$

donc

$$I = \int \frac{u}{u^2 - 1} \cdot 2u du = 2 \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du = 2 \int \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1} du$$

$$\text{d'où: } I = 2 \int \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du = 2 \int \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) \right) du$$
$$= 2 \left(u + \frac{1}{2} (\ln|u-1| - \ln|u+1|) \right) + C \quad | C = \text{cte.}$$

Alors: $I = 2\sqrt{e^{x+1}} - \ln\left(\frac{\sqrt{e^{x+1}}+1}{\sqrt{e^{x+1}}-1}\right) + c \quad / \quad c \in \mathbb{R}.$

Intégration d'elles fonctions rationnelles en $\sinh$ et $\cosh$.

Il s'agit de calculer $I = \int R(\sinh x, \cosh x) dx$, où R est une fonction rationnelle de deux variables.

on utilise le changement de variable correspondant pour les fonctions hyperboliques, c.-à-d respectivement

$$t = \cosh x, \quad t = \sinh x, \quad t = \tanh x, \quad t = \tanh \frac{x}{2}.$$

Exemple 1) Calculer $I = \int \frac{dx}{\cosh^5 x}$

on a: $I = \int \frac{dx}{\cosh^4 x \cosh x}$

on pose $t = \sinh x$ d'où: $dt = \cosh x dx$, alors $dx = \frac{dt}{\cosh x}$

on a aussi: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, d'où $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + t^2$.

l'intégrale $I = \int \frac{dt}{\cosh^6 x} = \int \frac{dt}{(\cosh^2 x)^3}$

on a: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, d'où: $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + t^2$.

donc $I = \int \frac{dt}{(1+t^2)^3}$

Exemple 2: calculer $I = \int \frac{\sinh x}{3 + \sinh^2 x} dx$.

on pose: $t = \cosh x$ d'où $dt = \sinh x dx$.

et on a: $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 = t^2 - 1$.

Alors, $I = \int \frac{dt}{3+t^2-1} = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctang}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c$

donc,

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arctang}\left(\frac{\cosh x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$