

الفصل II : الأشكال الثنائية الخطية على فضاء شعاعي (Formes bilinéaires)

تعريف : ليكن E فضاء شعاعي على حقل K ذو بعد منتهى التطبيق $f: E \times E \rightarrow K$ يسمى بالشكل ثنائي الخطية على E (bilinear form) إذا كان خطي بالنسبة للمتغير الأول والثاني أي :

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K, \forall x_1, x_2, y \in E :$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y)$$

$$f(y, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(y, x_1) + \alpha_2 f(y, x_2).$$

نرمز لمجموعة جميع الأشكال الخطية على E بالرمز $BL(E, K)$

مثال : ① ليكن $E = \mathbb{R}^3$ و $K = \mathbb{R}$.

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

هل شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^3$ خطي بالنسبة للمركبة الأولى فقط .
 ② $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 3xy^2$
نظرية : ليكن E فضاء شعاعي على K ، فان $BL(E, K)$ لها بنية فضاء شعاعي على K بعد m^2 .

البرهان : نعرف على $BL(E, K)$ عملية داخلية نسميها

$$\forall f_1, f_2 \in BL(E, K) : (f_1 + f_2)(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y).$$

ونعرف عملية خارجية على $BL(E, K)$ سميها الضرب كما يلي

$$\forall \alpha \in K, \forall f \in BL(E, K): (\alpha f)(x, y) = \alpha \cdot f(x, y).$$

$(BL(E, K), +, \cdot)$ تشكل فضاء شعاعي على K .

ليكن $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ أساس ثنائي لـ E^* . نعرف التطبيق

$$f_{ij}: E \times E \longrightarrow K$$

$$(x, y) \longmapsto f_{ij}(x, y) = g_i(x) g_j(y).$$

نلاحظ أن f_{ij} من أجل كل i, j شكل ~~ثنائي الخطي~~ ثنائي الخطي على K .

$$f_{ij}(\alpha x + \beta y) =$$

$$f_{ij}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = g_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) g_j(y).$$

$$= [\alpha_1 g_i(x_1) + \alpha_2 g_i(x_2)] g_j(y)$$

$$= \alpha_1 g_i(x_1) g_j(y) + \alpha_2 g_i(x_2) g_j(y)$$

$$= \alpha_1 f_{ij}(x_1, y) + \alpha_2 f_{ij}(x_2, y).$$

نبرهن بنفس الطريقة بأن f_{ij} خطي بالنسبة للمركبة الثانية.

نبرهن أن $\{f_{ij}\}_{i,j}$ مستقلة خطياً. نعرف أن

$$\sum_{i,j} \beta_{ij} f_{ij} = 0$$

ليكن $\{v_1, \dots, v_m\}$ أساس E

$\{g_1, \dots, g_n\}$ أساس E^*

$$\sum_{i,j} \beta_{ij} f_{ij}(v_s, v_t) = 0 \Rightarrow \sum \beta_{ij} g_i(v_s) \cdot g_j(v_t) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} \beta_{ij} \delta_{is} \delta_{jt} = 0 \Rightarrow \beta_{st} = 0$$

تكرر هذه العملية بالنسبة لجميع عناصر الأساس $\{v_i\}$ حتى نتحصل على $\beta_{ij} = 0, \forall i=1, \dots, m, \forall j=1, \dots, m$.

ومن ثم $\{f_{ij}\}_{i,j}$ مستقلة خطياً.

نبرهن أن الأسعة $\{f_{ij}\}_{i,j}$ مولدة لـ $BL(E, K)$.

ليكن $f \in BL(E, K)$ ونفرض أن $f(v_i, v_j) = \alpha_{ij}$ $\forall v_i, v_j \in \{v_1, \dots, v_m\}$.

لدينا

$$\sum \alpha_{ij} f_{ij}(v_s, v_t) = \sum \alpha_{ij} g_i(v_s) g_j(v_t) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \delta_{is} \delta_{jt} = \alpha_{st} = f(v_s, v_t).$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} f_{ij}(x, y), \forall x, y \in E$$

$$BL(E, K) = \langle \{f_{ij}\} \rangle \Leftarrow f = \sum \alpha_{ij} f_{ij} \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \dim BL(E, K) = \text{card}(\{f_{ij}\}_{i,j}) = m^2.$$

المصفوفة المرفقة لشكل ثنائي الخطية: ليكن E فضاء متجهي من مرتبة m .

ليكن $f \in BL(E, K)$ و ليكن $\{v_1, \dots, v_m\}$ أساس لـ E .

$$\forall u, v \in E^2, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_m), (\beta_1, \dots, \beta_m) \in K^m: u = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, v = \sum_{j=1}^m \beta_j v_j.$$

$$\text{إذن } f(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j f(v_i, v_j).$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

نضع $f(v_i, v_j) = a_{ij}$ و

تعريف: نسمي A بالمصفوفة المرفقة للشكل ثنائي الخطية f بالنسبة للأساس $\{v_1, \dots, v_n\}$ و نكتب $A = M(f, \{v_i\})$

لدينا $f(u, v) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = {}^t X A Y$

حيث X هو مركبات الشعاع u بالنسبة للأساس $\{v_i\}$ و Y هو مركبات الشعاع v بالنسبة للأساس $\{v_i\}$.

مثال: ليكن $E = \mathbb{R}_2[x]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود من الدرجة أقل أو يساوي 2 و

$f: \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ و $(P, Q) \mapsto f(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2)$

الأساس الكانوني لـ $\mathbb{R}_2[x]$ هو $B_c = \{1, x, x^2\}$.

$$M(f, B_c) = \begin{pmatrix} f(1,1)=4 & f(1,x)=5 & f(1,x^2)=9 \\ f(x,1)=5 & f(x,x)=9 & f(x,x^2)=17 \\ f(x^2,1)=9 & f(x^2,x)=17 & f(x^2,x^2)=33 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{pmatrix}$$

تأثير تغيير الأساس على مصفوفة الشكل ثنائي الخطية:

ليكن $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ أساس لـ E و لكن $A = M(f, B)$ أي $f(u, v) = {}^t X \cdot A \cdot Y$.

ليكن $B' = \{v'_1, \dots, v'_m\}$ أساس آخر لـ E ولكن

$$A' = M(f, B')$$

$$\forall (u, v) \in E^2, f(u, v) = {}^t x' \cdot A' \cdot v'$$

حيث x' هم مركبات الشعاع u بالنسبة للأساس B' و v' مركبات الشعاع v بالنسبة للأساس B' فإن

$$A' = P^t A P \text{ حيث } P \text{ هي مصفوفة العبور من } B \text{ إلى } B'$$

مثال : لكن $f: \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(P, Q) \longmapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2)$$

ليكن الأساس $B' = \{x, x-2, x(x-2)\}$ في $\mathbb{R}_2[x]$

$$A' = M(f, B') = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} x & x-2 & x(x-2) \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix}$$

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ بالحساب نجد :}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

رتبة شكل ثنائي الخطية

تعريف: ليكن $f: E \times E \rightarrow K$ شكل ثنائي الخطية على فضاء شعاعي E بعد منه E . نسمي رتبة f رتبة المصفوفة المربعة f لـ f بالنسبة لأساس B كيفي لـ E .

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(M(f, B)).$$

تعريف: نقول عن الشكل الثنائي الخطية f أنه

(1) forme dégénérée إذا كانت رتبته ليست أعطية

$$\text{rg}(f) < \dim E$$

(2) forme non-dégénérée إذا كانت رتبته أعطية

$$\text{rg}(f) = \dim E = n$$

ملاحظة: f non-dégénérée $\Leftrightarrow \det M(f, B) \neq 0$
 B أساس كفي لـ E

مثال: في المثال السابق $f: \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$
 $(P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2)$

$$\text{rg}(f) = \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 19 \\ 5 & 9 & 17 \\ 9 & 17 & 33 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow f \text{ est non-dégénérée}$$

مثال 2, لكن

$$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1 y_1 - 3x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_1$$

$$- 3x_3 y_2 - 3x_2 y_3$$

g شكل ثنائي الخطية على $\mathbb{R}^3$, لكن $B_e = \{e_1, e_2, e_3\}$

$$M(g, B_e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \det(M(g, B_e)) = 0$$

$\text{rg}(f) = 2 \Rightarrow$ دمج g دمج

ليكن E ف. متش على الحقل K و $f: E \times E \rightarrow K$ تشكّل ثنائي الخطية على E . نعرف التطبيق

$$j: E \longrightarrow E^* \\ y \longmapsto j(y) \quad , \quad j(y): E \longrightarrow K \\ x \longmapsto j(y)(x) := f(x, y).$$

خاصة: j هو تطابق خطي من E نحو E^* .

تعريف: ليكن E ف. متش على K (ليس بالضرورة ذو بعد منته) و $f: E \times E \rightarrow K$ تشكّل ثنائي الخطية على E .

نسمى نواة f ونرمز له بـ $N(f)$ - نواة التطبيق الخطي

$$N(f) = \{ y \in E / f(x, y) = 0, \forall x \in E \}$$

ملاحظة: ليكن E ف. متش ذو بعد منته و f تشكّل ثنائي الخطية على E . فإن:

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim N(f) \quad (1).$$

مثال: ليكن

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \longmapsto x_1 y_1 - 3x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_1 - x_3 y_2 - 3x_2 y_3$$

$$f(x, y) = (y_1 + y_2 - y_3)x_1 + (y_1 - 3y_3)x_2$$

$$+ (-y_1 - 3y_2 - 3y_3)x_3$$

$$y \in N(f) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ y_1 - 3y_3 = 0 \\ -y_1 - 3y_2 - 3y_3 = 0 \end{cases}$$

ومن ثم

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \dots (1) \\ y_1 - 3y_3 = 0 \dots (2) \\ -y_1 - 3y_2 - 3y_3 = 0 \dots (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = -2y_3 \\ y_1 = +3y_3 \end{cases}$$

$$N(b) = \left\{ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ (3y_3, -2y_3, y_3) \mid y_3 \in \mathbb{R} \right\} = \langle (3, -2, 1) \rangle$$