

الفصل الثالث : الأشكال الثنائية الخطية والأشكال التربيعية .

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منه على الحقل K .

تعريف : ليكن f شكل ثنائي الخطية على E . نقول أن f متناظر (symétrique) إذا كان

$$\forall u, v \in E, f(u, v) = f(v, u).$$

نقول أن f ضد تناظر (anti-symétrique) إذا كان

$$\forall u, v \in E, f(u, v) = -f(v, u)$$

مثال : $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ شكل تناظري .
 $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$

نقول عن مصفوفة $A \in M(K)$ أنها تناظرية إذا كان $A^t = A$
و ضد تناظرية إذا كان $A^t = -A$.
نظرية : ليكن E فضاء ذو بعد منه على K و $f \in BL(E, K)$

فإن f متناظر إذا وفقط إذا كانت مصفوفة المرفقة بالنسبة لأساس معين لـ E متناظرة (تناظرية).

البرهان : نفرض أن f تناظري . إذا $f(u, v) = f(v, u) \forall u, v \in E$
~~فإن f متناظر إذا وفقط إذا كانت مصفوفة المرفقة بالنسبة لأساس معين لـ E متناظرة (تناظرية).~~

$$f(u, v) = X^t A Y = Y^t A X = f(v, u)$$

$$\Rightarrow (X^t A Y)^t = Y^t A^t X //$$

$$f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i), \forall v_i, v_j \in B.$$

$$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow A = A^t.$$

$\Rightarrow$ نعرّف أن A تناظرية أي $A = A^t$ حيث $A = M(f, B)$

ليكن $X = (x_i)$ مركبان الشعاع u

$Y = (y_i)$ مركبان الشعاع v

$$f(u, v) = X^t \cdot A \cdot Y = (X^t A Y)^t = Y^t A^t X = Y^t A X = f(v, u)$$

ومن هنا f تناظرية.

تعريف: ليكن f شكل ثنائي الخطية على E تناظرية و

$q: E \rightarrow K$ تطبيق. نقول عن q أنه شكل تربيعي (forme

quadratique) على E إذا كان $q(u) = f(u, u), \forall u \in E$ كمرقبة f .

مثال: التطبيق

$$q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto 2x^2 + 5y^2 - 4xy$$

شكل تربيعي على $\mathbb{R}^2$. نعرف الشكل ثنائي الخطية التالي

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto 2x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$$

$$f((x, y), (x, y)) = 2x^2 - xy - 3xy + 5y^2 = 2x^2 - 4xy + 5y^2 = q((x, y)).$$

نلاحظ أيضا، أن الشكل ثنائي الخطية

$$g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

صحف أيضا

$$g((x, y), (x, y)) = q((x, y)).$$

خاصية: ليكن E ف.ش ذو بُعد منته على K و B أساس E . نعلم أن f تناظري إذا و فقط إذا كان

$$f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i), \forall v_i, v_j \in B.$$

إذا كانت A مصفوفة تناظرية (مربعة) (f) فإن الشكل المصفوفي q في الأساس B يكون

$$q(x) = x^t \cdot A \cdot x$$

إذا كان $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $A = (a_{ij})_n$ فإن

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

وهو كثير حدود متجانس من الدرجة 2

تعريف 2: ليكن E ف.ش ذو بُعد منته على حقل K .

نسمى شكل تربيعي كل تطبيق $q: E \rightarrow K$ حيث إذا كان $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ أساس E فإن $q(x)$ كثير حدود متجانس من الدرجة 2 مركبات x الشعاع x في الأساس B .

مثال: $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ شكل تربيعي على $\mathbb{R}^2$.

$$(x, y) \mapsto 2x^2 + 5y^2 - 4xy$$

فرضية : ليكن $q: E \rightarrow K$ شكل تربيعي على E
(K حقل $\neq 2$ pourquoi? de caractéristique $\neq 2$) فإنه يوجد

شكل تناثري الخطية وحيد $f: E \times E \rightarrow K$ بحيث
 $f(x, x) = q(x), \forall x \in E$ و f معرف بالشكل

$$f(x, y) = \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

f يسمى الشكل القطبي (forme polaire) لـ q .

البرهان : ليكن $q: E \rightarrow K$ شكل تربيعي.
 $\Rightarrow \exists g: E \times E \rightarrow K$ / $g(x, x) = q(x), \forall x \in E$.

$$f: E \times E \rightarrow K$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{1}{2} [g(x, y) + g(y, x)]$$

f هو شكل تناثري الخطية تناظري وحق

$$f(x, x) = q(x), \forall x \in E.$$

$$= \frac{1}{2} [g(x, x) + g(x, x)] = g(x, x) = q(x)$$

ومنه f متعلق بـ q . من أجل الوحدة نعرف f

$$f: E \times E \rightarrow K$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

f متعلق بـ q ومنه فإن f وحيد.

مثال : ليكن الشكل التربيعي
 $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto q(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 4xy$

الشكل القطبي لـ q يكون معرف كما يلي :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} [q$$

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{1}{2} [q(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - q(x_1, x_2) - q(y_1, y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [2(x_1 + x_2)^2 + 5(y_1 + y_2)^2 - 4(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - 2x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_2 - 2y_1^2 - 5y_2^2 + 4y_1y_2]$$

$$= 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

رتبة شكل تربيعي

تعريف: (1) شبي رتبة n ، فوارة - مصفوفة شكل تربيعي

q ، رتبة n ، فوارة ، مصفوفة الشكل القطبي المرفقة

لـ q

مثال : كيف الشكل التربيعي -

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto 2x^2 + 5y^2 - 4xy$$

فإن $rg(q) = 2$ ، $M(f, B) = M(q, B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

تعريف : لكن E ف. ش. على $\mathbb{R}$ ، $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ شكل تربيعي

- نقول عن q أنه non dégenerée إذا كان الشكل القطبي

المرفقة له non dégenerée أي $N(f) = \{0\}$

وهذا يعني $f(x, y) = 0, \forall y \in E \Rightarrow x = 0$

- نقول عن q أنه معرف موجب إذا كان f الشكل القوي
المرفقة له معرف موجب ، أي

$$q(x) = f(x, x) \geq 0, \forall x \in E. \text{ و } q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- نقول عن q أنه معرف إذا كان

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

ملاحظة 1 : ① كل شكل معرف موجب يكون non dégénérée لكن

ليكن $x \in E$ بحيث $f(x, y) = 0, \forall y \in E$. بوضع $y = x$

$$f(x, x) = 0 \Leftrightarrow q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

② $N(q)$ نواة q ليست مجموعة العناصر x من E التي
تحقق $q(x) = 0$ ، لكن

$$N(q) = \{x \in E / f(x, y) = 0, \forall y \in E\} \quad (\text{لأن } f \text{ تناظري})$$

$$= \{y \in E / f(x, y) = 0, \forall x \in E\}$$

مثال : لكن الشكل الثنائي

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_2 - 3x_1x_3 + 8x_2x_3$$

$$M(q, B_c) = \begin{pmatrix} 4 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & 3 & 4 \\ -3/2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا}$$

لدينا q non dégénérée لأن $\det M(q, B_c) \neq 0$ أي أن $\text{rg}(q) = n$ أعظمية .

نلاحظ أن $q(e_3) = f(e_3, e_3) = 0$ ومنه q ليس
شكل معرف .

التعامد بالنسبة لشكل تربيعي :

ليكن E ف. ش. على $\mathbb{R}$ و $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ شكل تربيعي و f الشكل القطبي المرفق له .

تعريف : نقول عن شعاعين $x, y \in E$ أنهما متعامدان بالنسبة لـ q إذا كان $f(x, y) = 0$. ونكتب $x \perp y$.

ليكن F فضاء شعاعي جزئي من E . نسمي معامد F ونرمز له بـ $F^\perp$ مجموعة عناصر E التي تعامد جميع عناصر F أي

$$F^\perp = \{ y \in E \mid f(x, y) = 0, \forall x \in F \}$$

فرضية : $F^\perp$ فضاء شعاعي جزئي من E .

تعريف : نقول عن شعاع $x \in E$ أنه متماثل (isotrope) لـ q إذا كان $q(x) = 0$.

ملاحظة : إذا كان q شكل تربيعي متماثل ~~معرفة~~ فإن الشعاع المتماثل

q شكل معرفا $\Leftrightarrow$ الشعاع المتماثل الوحيد لـ q هو $\{0\}$.

البرهان (*) لدينا $F^\perp \neq \emptyset$ لأن $f(0, y) = 0, \forall y \in E$

$$\Rightarrow f(0, y) = 0, \forall y \in F \Rightarrow 0 \in F^\perp$$

(*) ليكن $x_1, x_2 \in F^\perp$ إذاً

~~البرهان~~

$$x_1 \in F^\perp \Rightarrow f(y, x_1) = 0, \forall y \in F$$

$$x_2 \in F^\perp \Rightarrow f(y, x_2) = 0, \forall y \in F$$

$$\forall y \in F, f(y, x_1 + x_2) = f(y, x_1) + f(y, x_2) = 0_K + 0_K = 0_K$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 \in F^\perp$$

$$(*) \text{ لَكِنَّ } \lambda \in K, x \in F^\perp$$

$$\forall y \in F, f(y, \lambda x) = \lambda f(y, x) = \lambda \cdot 0_K = 0_K \Rightarrow \lambda x \in F^\perp$$

ومنه $F^\perp$ فضاء شعاعي جزئي من E

$$E^\perp = N(q) \quad (1)$$

$$\{0\}^\perp = E \quad (2)$$

فرضية: (*) لَكِنَّ E فضاء شعاعي ذو بعد منه على K

F ف. ش. ج. من E و q شكل تربيعي على E . فَاِنْ

$$N = N(q), \quad \dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim F \cap N \quad (1)$$

$$(F^\perp)^\perp = F + N \quad (2)$$

بَاذا كَانَ q non dégénérée فَاِنْ

$$(3) \quad \dim E = \dim F + \dim F^\perp$$

$$(4) \quad (F^\perp)^\perp = F$$

الأسس المتعامدة: لَكِنَّ E ف. ش. ذو بعد منه m على $\mathbb{R}$. q شكل تربيعي على E و f الشكل القطبي المرفق له.

تعريف: نقول عن أساس $\{e_1, \dots, e_n\}$ في E أنه متعامد بالنسبة لـ q .

III. 8.

إذا كان $f(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$

نقول عن $\{e_1, \dots, e_n\}$ أنه متعامد متجانس (orthonormée)

$$f(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

ملاحظة: $\{e_1, \dots, e_n\} = B$ أساس متعامد $\perp$ E

إذا وفقط إذا كان

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = f(e_i, e_i) = q(e_i).$$

وهذا يكافئ أن

$$(*) \dots q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2, \quad x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

ومنه $rg(q)$ هو عدد المركبات α_i غير المعدومة، وأيضاً

يساوي عدد المربعات في العبارة (*).

ومنه نستنتج أن q للبحث عن أساس متعامد $\perp$ E يعود لتعيين أساس $\perp$ E بحيث تكون المصفوفة المرفقة $\perp$ q بالتسبيك لهذا الأساس قطرية أو بصيغة مكافئة كتابة q على شكل مجموع حدود مربعة.

ملاحظة: يجب عدم الخلط بين هذه الوضعية وقابلية التقدير للأندومورفيزمات

إذا كانت A مصفوفة مرفقة للأندومورفيزم

قطرية $P^t A P$ قطرية $P A P^t$ قابلية التقدير

نظرية : ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منته على $\mathbb{R}$
 q تشكّل تربيعي، $E \neq \{0\}$ ، فإنه يوجد أساس متعامد لـ E
 بالسبب لـ q .

$$\exists \{e_i\}, x = \sum_{i=1}^m x_i e_i, q(x) = d_1 x_1^2 + \dots + d_r x_r^2$$

حيث $r = \text{rg}(q)$ و $d_i \in \mathbb{R}$

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_r & \\ 0 & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

البرهان : نبين بالتراجع على m .
 إذا كان $m=1$ واضح ولا يوجد شيء يبرهنه.
 نفرض أن النظرية صحيحة من أجل $m-1$ ونبين أنها
 صحيحة من أجل m .

⊛ إذا كان $q=0$ فإن أي أساس لـ E يكون متعامد.

⊛ نفرض أن $q \neq 0$ و ليكن $v \in E$ حيث $q(v) \neq 0$

نضع $F = \{x \in E \mid f(x, v) = 0\}$ حيث f هو الشكل
 القطبي لـ q .

F له بُعد فضاء شعاعي حركي من E و $v \notin F$

لدينا $0_E \in F$ لأن $f(0, v) = 0$ ومنه $F \neq \emptyset$.

ليكن التطبيق $g : E \longrightarrow K$
 $y \longmapsto g(y) = f(y, v)$

و $F = \ker g$ ومنه F ف. ش. ح. من E .

من جهة أخرى ، لدينا $\dim \ker g + \dim \operatorname{Im} g = \dim E = n$.

$$\dim \operatorname{Im} g \leq \dim R = 1 \quad \text{بما أن}$$

$$\left. \begin{aligned} g(v) = f(v, v) = g(v) \neq 0 \\ \Rightarrow g \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} g = 1.$$

$$\text{ومن هنا } \dim F = \dim \ker g = n-1.$$

$$\text{ومن هنا نستنتج أن } E = F \oplus \langle v \rangle.$$

من فرضية التراجع يوجد أساس متعامد $\perp$ لـ F ولكن $\{v_1, \dots, v_m\}$ ، لذا $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v\}$ أساس متعامد لـ E .