

Chapitre 1 : Transformée de Fourier Discrète

1. Rappel sur l'échantillonnage et la quantification

1.1. Introduction

Un signal analogique (continu) est défini en toutes les valeurs de sa variable indépendante. Le traitement numérique du signal est la discipline qui s'intéresse au signal défini seulement aux valeurs constituant un ensemble dénombrable (fini ou infini).

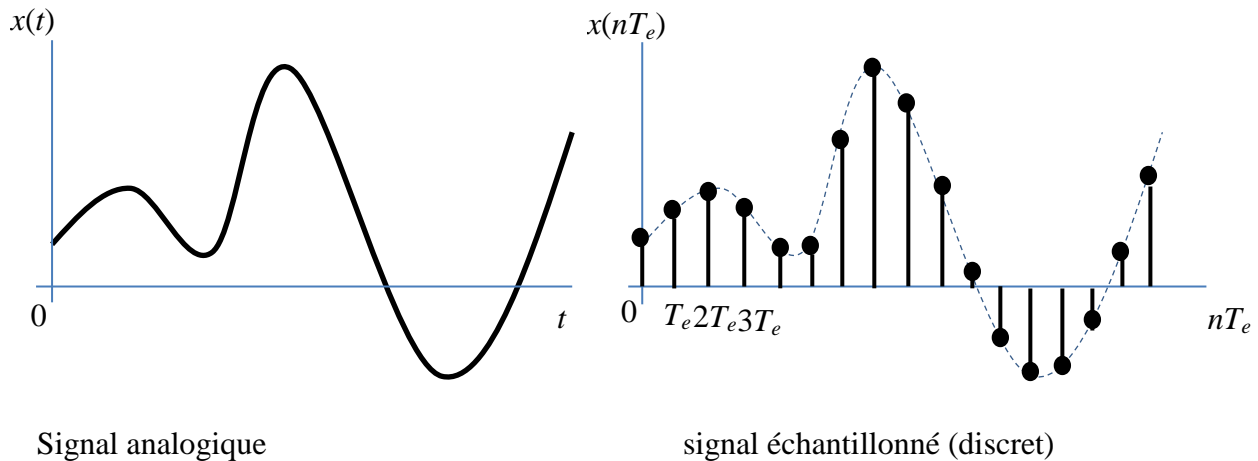


Figure 1 : Echantillonnage d'un signal

Une façon de produire échantillonné consiste à ne prendre des échantillons du signal analogique de départ qu'aux valeurs équidistantes de la variable indépendante.

1.2. Le processus d'échantillonnage : définition

L'échantillonnage est l'opération à travers laquelle un signal analogique est converti en une séquence correspondante d'échantillons usuellement uniformément espacés dans le temps (échantillonnage régulier).

Soit $x_a(t)$ le signal analogique de départ. Le signal échantillonné $x_e(t)$ est obtenu par multiplication du signal analogique par un train d'impulsions de Dirac d'amplitude unité et equi-espacées de T_e .

Le train d'impulsions de Dirac noté $p(t)$ est défini par :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

T_e : période ou pas d'échantillonnage

$f_e = 1/T_e$: fréquence d'échantillonnage

$\delta(t-nT_e)$ est l'impulsion de Dirac positionnée au temps $t=nT_e$.

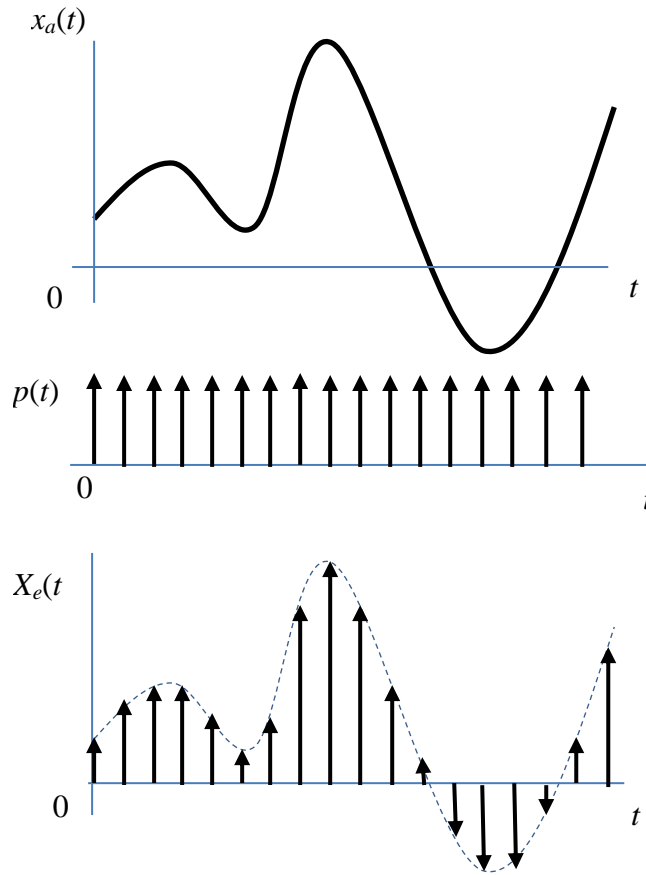


Figure 2 : Illustration du processus d'échantillonnage

Le signal échantillonné est donné par :

$$x_e(t) = x_a(t) p(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

En vertu de la propriété $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$, on peut écrire

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

Cette forme idéale de l'échantillonnage est appelée échantillonnage instantané.

1.3. Théorème de l'échantillonnage : théorème de Shannon

$p(t)$ est périodique de période T_e et donc, il peut être décomposé en série de Fourier :

$$p(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \frac{k 2\pi}{T_e} t}$$

En appliquant la propriété de modulation (translation fréquentielle), le spectre de $p(t)$ noté $P(\omega)$ s'écrit comme :

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_e}\right)$$

A un train d'impulsions de période T_e dans le domaine temporel correspond un train d'impulsions de période $2\pi/T_e$ dans le domaine fréquentiel.

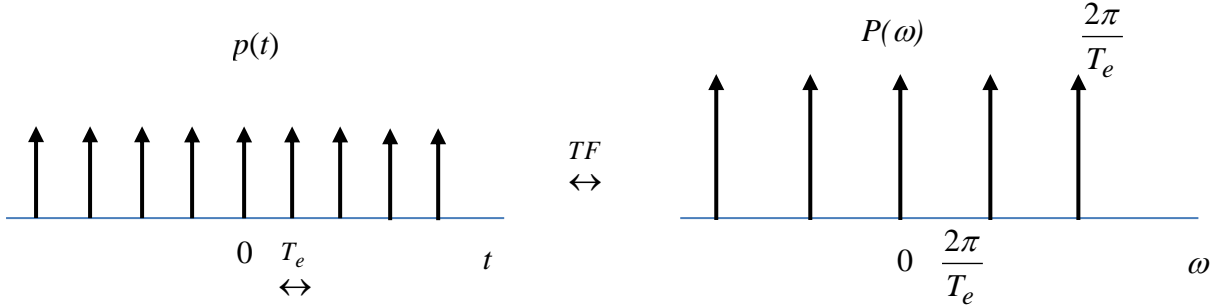


Figure 3 : paire de transformée de Fourier du train d'impulsions de Dirac

Le spectre $X_e(\omega)$ du signal échantillonné $x_e(t)$ s'écrit comme :

$$X_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\omega) \otimes P(\omega)$$

Le symbole \otimes dénote l'opération de convolution.

$P(\omega)$ est un train d'impulsions de Dirac espacées de $f_e=1/T_e$ sur l'axe des fréquences ou $2\pi/T_e$ sur l'axe des pulsations. La convolution d'un signal avec un train d'impulsions de Dirac se fait en reproduisant le signal à la position de chacune des impulsions. Le spectre du signal échantillonné est donc :

$$X_e(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_e}\right)$$

L'effet de l'échantillonnage est de périodiser le spectre du signal analogique de départ. Cette périodisation se fait au rythme de $1/T_e$ en fréquence ou $2\pi/T_e$ en pulsation.

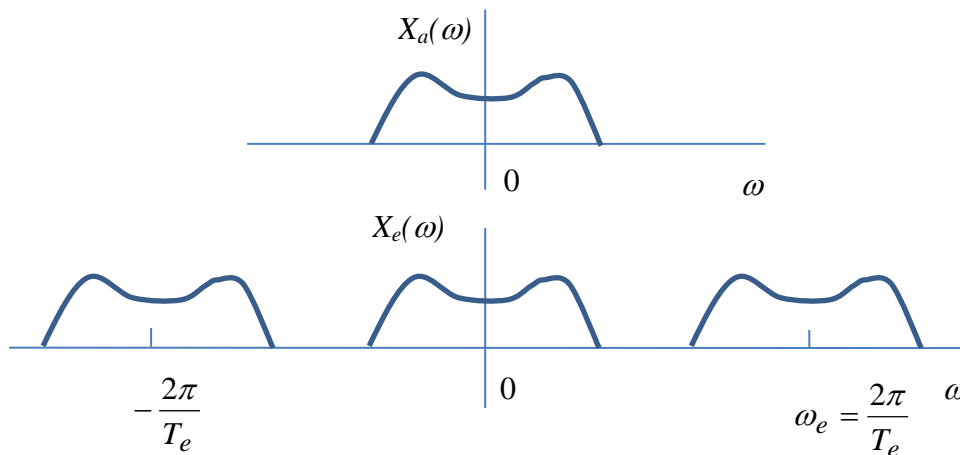


Figure 4 : Spectre du signal échantillonné.

La périodisation concerne aussi bien l'amplitude du spectre que sa phase.

Si le spectre du signal de départ est limité à $1/2T_e$ en fréquence, les différentes versions ne se recouvrent pas et on pourra retrouver le signal analogique de départ par un filtrage adéquat de la séquence d'échantillons. Le théorème de l'échantillonnage de Shannon peut être énoncé comme suit :

Un signal analogique à bande limitée, c-a-d, que son spectre est non nul uniquement pour les fréquences $|f| < f_{\max}$ peut être complètement reconstruit à partir de la connaissance de ses échantillons pris à une fréquence d'échantillonnage au moins égale à $2f_{\max}$.

La fréquence d'échantillonnage minimale $2f_{\max}$ est appelée fréquence de Nyquist.

1.4. Reconstruction du signal analogique : Interpolation de Whittaker

Si les conditions du théorème de Shannon sont satisfaites, il n'aura pas de recouvrement appelé aussi repliement spectral (aliasing) et on peut retrouver le signal analogique de départ en isolant la version utile des versions répétées du spectre pondéré par le bon facteur de gain. Un tel filtre a une réponse en fréquence donnée par :

$$H(\omega) = \begin{cases} T_e & -\frac{\pi}{T_e} < \omega \leq \frac{\pi}{T_e} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La réponse impulsionnelle de correspondante est donnée par :

$$h(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{T_e}}{\frac{\pi t}{T_e}}$$

Ce signal a pour propriété de s'annuler pour aux valeurs $t=mT_e$ avec $m \neq 0$.

On a $X_a(\omega) = H(\omega)X_e(\omega)$

Soit donc $x_a(t) = h(t) \otimes x_e(t)$

La convolution du signal échantillonné avec la réponse impulsionnelle s'exprime par :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_e)h(t-nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_e) \frac{\sin \left[\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e} \right]}{\frac{\pi(t-nT_e)}{T_e}}$$

On reproduit à la position de chaque échantillon la réponse impulsionnelle du filtre qui a la caractéristique de s'annuler à la position des autres échantillons et par conséquent laisser inchangé la valeur des échantillons.

Cette formulation d'interpolation est connue sous le nom d'interpolation de Whittaker.

Lorsque la fréquence d'échantillonnage que l'on utilise est supérieure à la valeur minimale $2f_{\max}$, on dit qu'il y a sur-échantillonnage.

Lorsque la fréquence d'échantillonnage n'est pas suffisante, les spectres répétés se chevauchent et on parle de repliement (recouvrement) spectral.

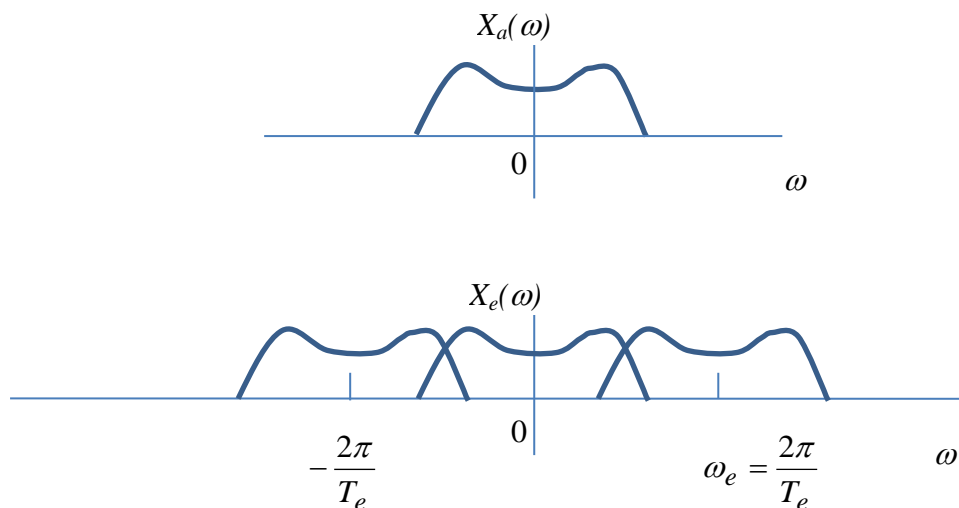


Figure 5 : Illustration du repliement spectral.

Les versions répétées du spectre vont s'additionner en valeurs complexes et il ne sera plus possible de récupérer le signal analogique de départ et cela quel que soit la fréquence de coupure du filtre passe bas d'interpolation.

Généralement, connaissant la fréquence d'échantillonnage qui peut être utilisée, on préfère limiter d'office la bande du signal à la moitié de cette fréquence d'échantillonnage.

1.5. Échantillonnage avec bloqueur d'ordre zéro

En pratique, les impulsions étroites à grande amplitude qui approximent les impulsions de Dirac sont relativement difficiles à générer et à transmettre. Il est plus ad »quat de générer le signal échantillonné sous la forme d'un bloqueur d'ordre zéro. Un tel système échantillonne $x_a(t)$ à un instant donné et maintient (bloque) cette valeur jusqu'à l'instant d'échantillonnage prochain.

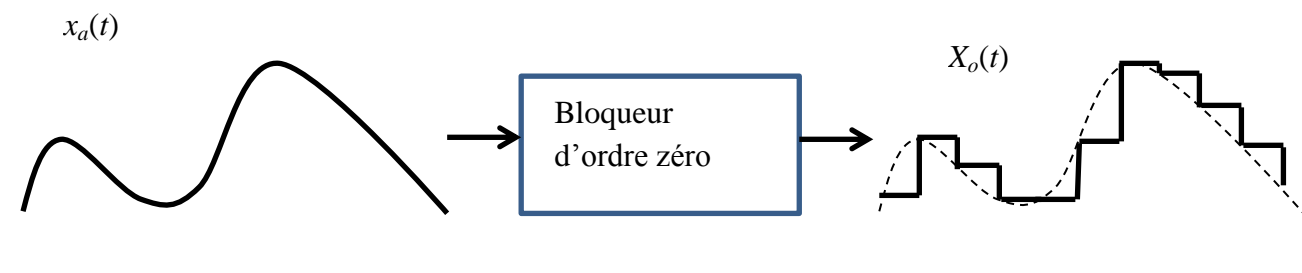


Figure 6 : Echantillonnage utilisant un bloqueur d'ordre zéro.

La reconstruction du signal du signal original $x_a(t)$ à partir de la sortie du bloqueur d'ordre zéro peut être effectuée au moyen d'un filtrage passe bas, cependant, dans ce cas, le filtre ne possède pas un gain constant dans la bande passante.

La sortie $x_o(t)$ du bloqueur d'ordre zéro peut être générée par un échantillonnage instantané suivi par un système linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle la fenêtre rectangulaire.

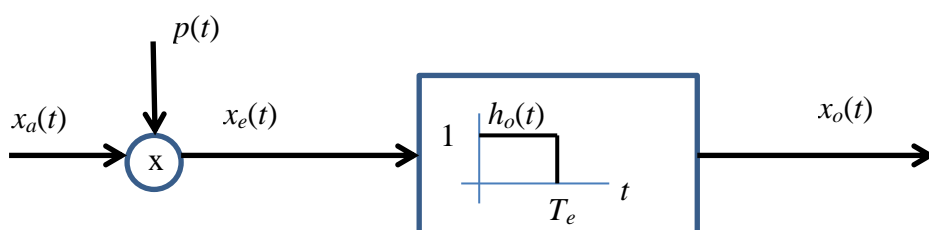


Figure 7 : Echantillonnage avec bloqueur d'ordre zéro en utilisant l'échantillonnage instantané suivi d'un système linéaire invariant dans le temps.

Pour reconstruire $x_a(t)$ à partir de $x_o(t)$, on transforme $x_o(t)$ par un système linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h_r(t)$ et de réponse en fréquence $H_r(\omega)$.

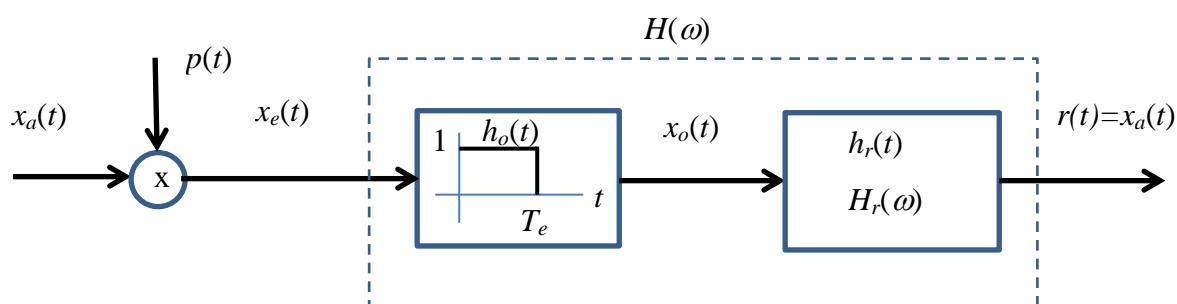


Figure 8 : Reconstruction du signal original à partir du signal échantillonné avec un bloqueur d'ordre zéro.

On doit spécifier $H_r(\omega)$ de sorte à avoir $r(t)=x_a(t)$.

On peut voir que $r(t)=x_a(t)$ si la combinaison en cascade de $h_o(t)$ et $h_r(t)$ est le filtre passe bas idéal $H(\omega)$.

$$H_o(\omega) = e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \left[\frac{2 \sin \frac{\omega T_e}{2}}{\omega} \right]$$

$$H_o(\omega)H_r(\omega) = H(\omega) \Rightarrow H_r(\omega) = \frac{H(\omega)}{H_o(\omega)} = e^{j\omega \frac{T_e}{2}} \frac{H(\omega)}{\frac{2 \sin \frac{\omega T_e}{2}}{\omega}}$$

1.6. Concept de séquence

Les signaux provenant d'un échantillonnage sont en pratique traités comme un ensemble de nombres non nécessairement associés à une référence de temps, c'est à dire à une période d'échantillonnage.

Une séquence est le signal défini pour les valeurs de la variable indépendante : $x(n)=x_a(nT_e)$

On définit également un spectre de séquence périodique de période 1 sur l'axe des fréquences F ou 2π sur l'axe des pulsations $\Omega=2\pi F$.

Ce spectre noté $X(e^{j\Omega})$ est défini par :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Ce spectre est obtenu en évaluant la transformée en Z de la séquence sur le cercle de rayon unité $z=e^{j\omega}$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

La transformée de Fourier inverse est définie par

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

La relation entre le spectre de la séquence et le spectre du signal échantillonné peut être établie comme suit :

On a $x(n)=x_a(nT_e)$

$$x_a(nT_e) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(\omega) e^{j\omega n T_e} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_e}}^{\frac{\pi}{T_e}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\omega - 2k \frac{\pi}{T_e}\right) e^{j\omega n T_e} d\omega$$

En posant $\Omega = \omega T_e = 2\pi f T_e$, on peut écrire :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(\omega) e^{j\omega n T_e} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_e}\right) e^{j\Omega n} \frac{d\Omega}{T_e}$$

On obtient donc :

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\left(\omega - \frac{2k\pi}{T_e}\right)$$

La correspondance entre le spectre du signal échantillonné et le spectre de la séquence s'établit grâce au recours à la normalisation des fréquences (ou pulsations) par rapport à la fréquence (pulsation) d'échantillonnage, soit :

$$F = \frac{f}{f_e} = \frac{\omega}{\omega_e} = f T_e$$

Et $\Omega = 2\pi F = \omega T_e = 2\pi f T_e$

1.7. Quantification des signaux

Principe de la quantification

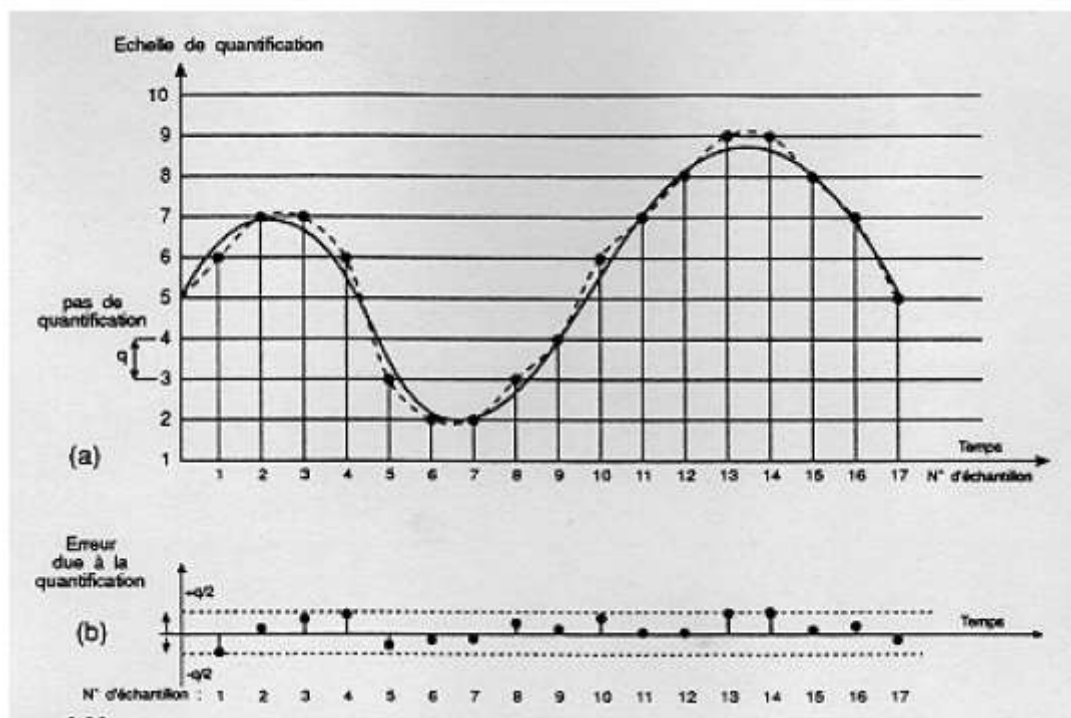


Figure 9 : principe de la quantification d'un signal

Caractéristique idéale du convertisseur analogique-numérique

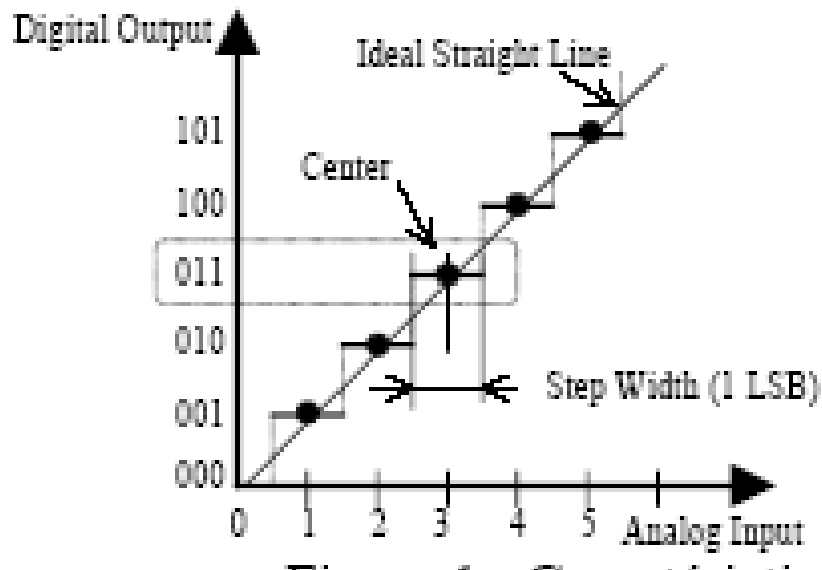


Figure 10 : caractéristique idéale du CAN

Erreur de quantification

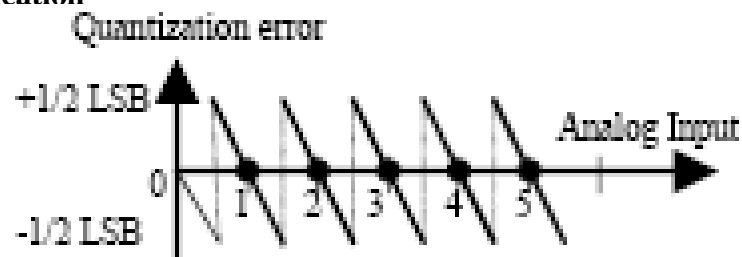


Figure 11 : erreur de quantification

Caractéristique du bruit de quantification

- Quantification linéaire par défaut

L'erreur de quantification évolue alors entre 0 et q .

$$0 < \varepsilon < q$$

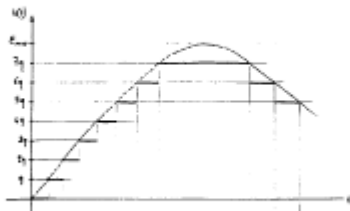


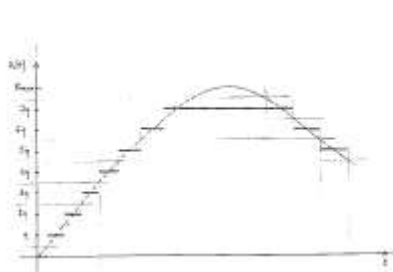
Figure 12 : Quantification par défaut



Figure 13 : Erreur de quantification

$$P_{\epsilon} = \langle \epsilon^2(t) \rangle = \frac{q^2}{3}$$

- Quantification linéaire centrée



$$-q/2 < \epsilon < +q/2$$



Figure 14 : Quantification linéaire centrée **Figure 15 :** Erreur de quantification linéaire centrée

$$P_{\epsilon} = \langle \epsilon^2(t) \rangle = \frac{q^2}{12}$$

2. Transformée de Fourier à temps discret

2.1. Définition

Soit $x(n)$ un signal discret à énergie finie. La transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de $x(n)$ est définie par:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

$X(\omega)$ est périodique de période 2π .

La transformée de Fourier inverse est donnée par:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (2)$$

Etant donné que $X(\omega)$ est périodique de période 2π , l'intégrale dans (2) est calculée sur n'importe quel intervalle de longueur 2π .

L'équation (1) est aussi appelée équation d'analyse ou spectre de $x(n)$ et l'équation (2) est l'équation de synthèse.

Les différences majeures entre la transformée de Fourier à temps continu et la transformée de Fourier à temps discret sont la périodicité de la TFTD $X(\omega)$ et l'intervalle fini dans l'intégrale de l'équation de synthèse (2).

Une conséquence de la périodicité de la séquence $e^{j\omega n}$ comme fonction de ω est que les valeurs $\omega=0$ et $\omega=2\pi$ donnent le même signal. Les signaux caractérisés par des fréquences proches de ces valeurs ou à des multiples pairs de π sont considérés comme des signaux basses fréquences. De même, les signaux discrets hautes fréquences sont caractérisés par des valeurs de ω proches des multiples impairs de π .

2.2. Exemples de transformées de Fourier à temps discret

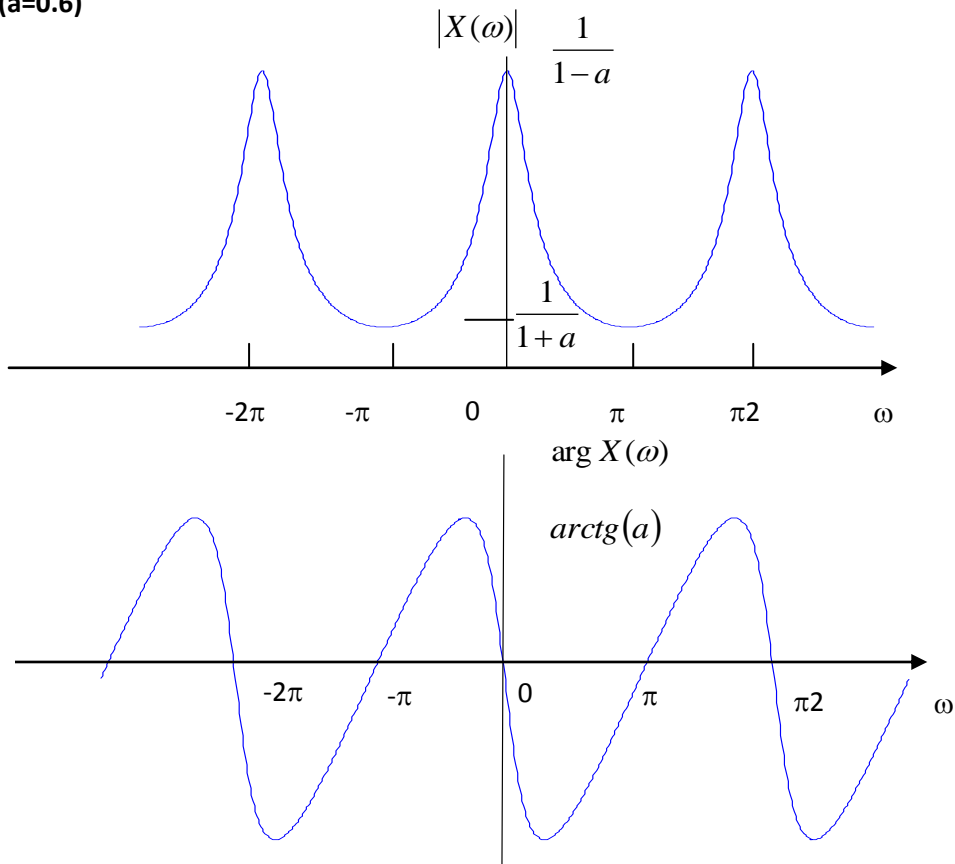
Exemple 1

Soit le signal $x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$

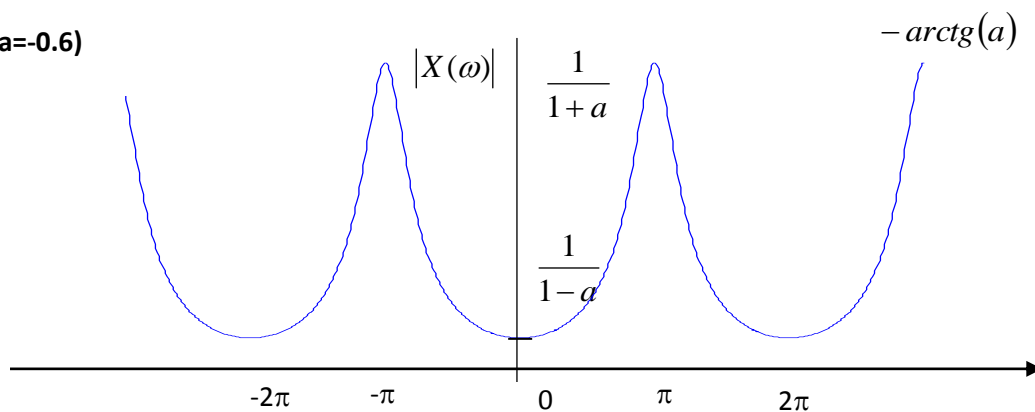
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

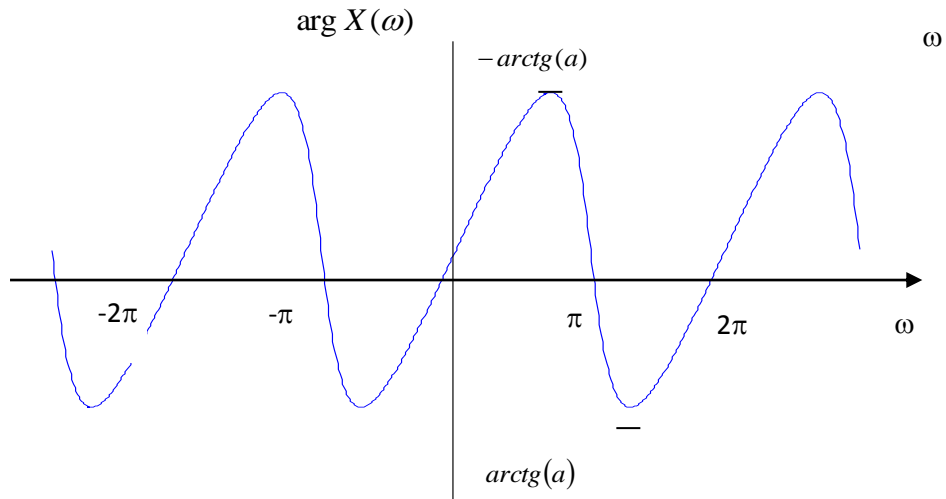
$$= \frac{1 - a \cos \omega - ja \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \quad (3)$$

a>0 (a=0.6)



a<0 (a=-0.6)





Exemple 2

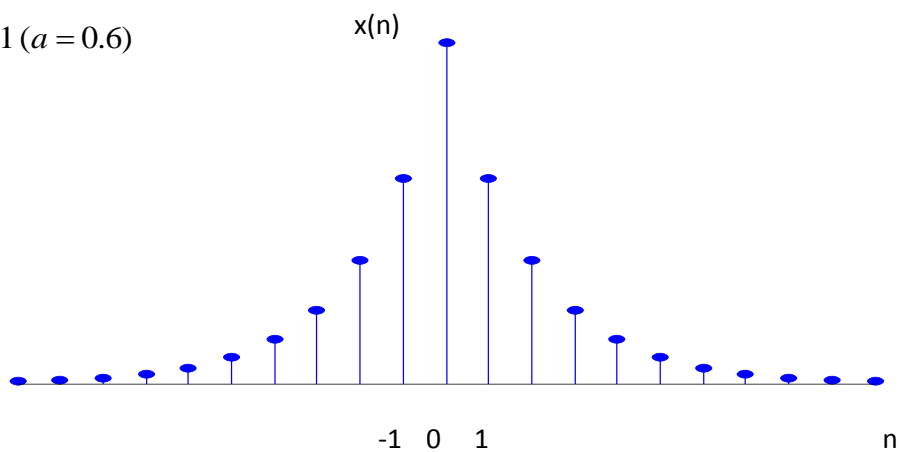
Soit $x(n) = a^{|n|}$, $|a| < 1$

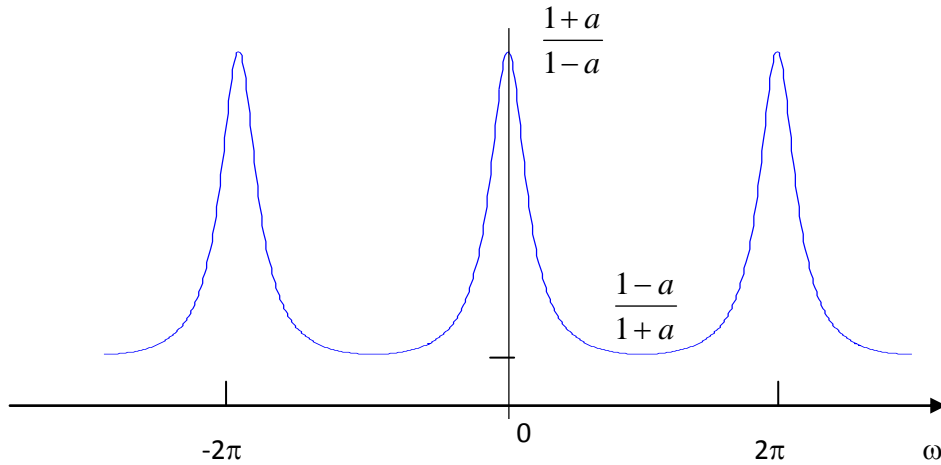
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n}$$

En posant $m=-n$ dans la deuxième sommation, il vient

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{+\infty} (ae^{j\omega})^m = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \omega + a^2} \quad (4)$$

$0 < a < 1$ ($a = 0.6$)





Exemple 3

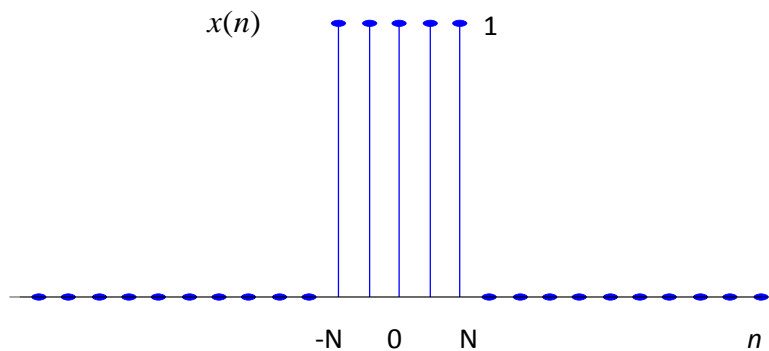
Considérons l'impulsion rectangulaire définie par:

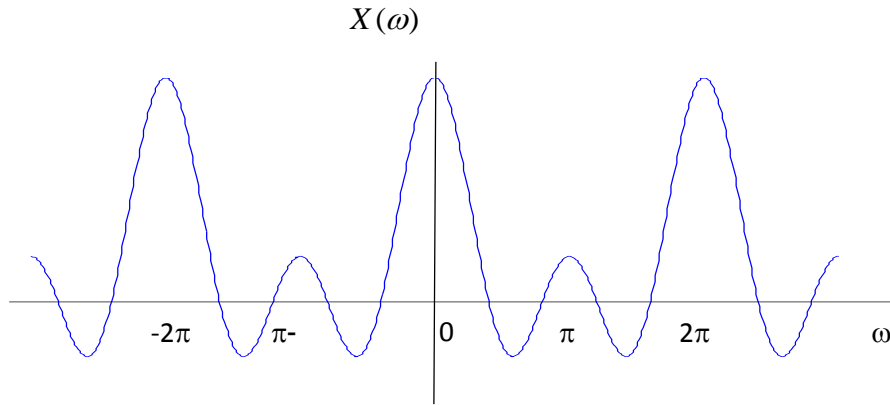
$$x(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-N}^N e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega N} - e^{j\omega(N+1)}}{1 - e^{j\omega}} = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} \left(e^{-j\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)} - e^{j\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)} \right)}{e^{j\frac{\omega}{2}} \left(e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}} \right)} \\ &= \frac{\sin \omega \left(N + \frac{1}{2} \right)}{\sin \frac{\omega}{2}} \end{aligned} \quad (5)$$

$X(\omega)$ s'annule aux valeurs $\omega = k \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

$x(n)$ et $X(\omega)$ sont représentés sur la figure pour $N=2$.





La fonction dans (5) est la forme discrète de la fonction sinus cardinal qui apparaît dans la transformée de Fourier à temps continu de l'impulsion rectangulaire. Une différence fondamentale entre les deux fonctions est que la fonction dans (5) est périodique de période 2π alors que la fonction sinus cardinal n'est pas périodique.

2.3. Convergence de la transformée de Fourier à temps discret

La somme donnée par (1) converge si:

- $x(n)$ est absolument sommable

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty \quad (6)$$

- ou si $x(n)$ a une énergie finie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty \quad (7)$$

2.4. Transformée de Fourier des signaux périodiques

Considérons le signal $x(n)=e^{j\omega_0 n}$. Dans le cas continu, la transformée de Fourier de $e^{j\omega_0 t}$ est une impulsion de Dirac en $\omega=\omega_0$. Dans le cas discret, la transformée de Fourier doit être périodique de période 2π . La transformée de Fourier de $x(n)$ est composée donc d'impulsions de Dirac en $\omega_0, \omega_0 \pm 2\pi, \omega_0 \pm 4\pi, \dots$. La transformée de Fourier de $x(n)$ est un train d'impulsions de Dirac:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - k2\pi) \quad (8)$$

Pour vérifier la validité de cette expression, calculons la transformée de Fourier inverse :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - k2\pi) e^{j\omega n} d\omega$$

N'importe quel intervalle de longueur 2π contient exactement une impulsion de Dirac. Si l'intervalle d'intégration est choisi de façon à contenir une impulsion en $\omega_0 + 2\pi k$, il vient:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}$$

Considérons maintenant la séquence périodique $x(n)$ de période N dont la représentation en série de Fourier est donnée par:

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (9)$$

$k=\langle N \rangle$ signifie que la sommation se fait sur une longueur N .
Les coefficients de Fourier sont donnés par:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \quad (10)$$

Dans ce cas, la transformée de Fourier est:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (11)$$

La transformée de Fourier d'un signal périodique peut être directement calculée à partir de ces coefficients de Fourier.

Exemple 1

Considérons le signal périodique

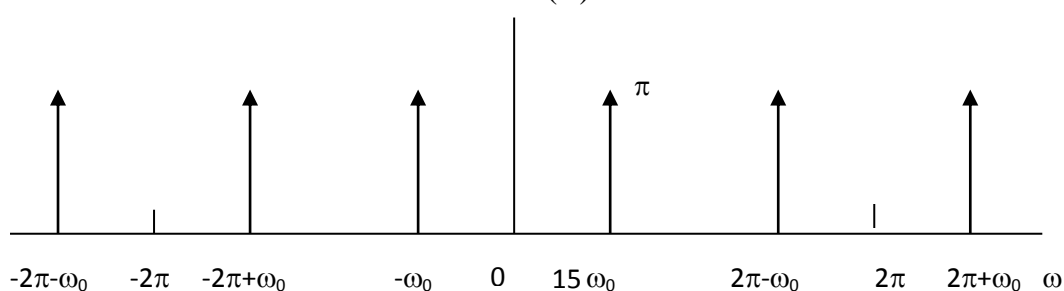
$$x(n) = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{5}$$

A partir de l'équation (9), on peut écrire

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} - k2\pi\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} - k2\pi\right) \quad (12)$$

Donc

$$X(\omega) = \begin{cases} \pi \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right) & -\pi \leq \omega < \pi \\ X(\omega) \text{ périodique de période } 2\pi \end{cases} \quad (13)$$



Exemple 2

Considérons la séquence périodique train d'impulsions unité:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n - kN) \quad (14)$$

Les coefficients de la série de Fourier de ce signal sont:

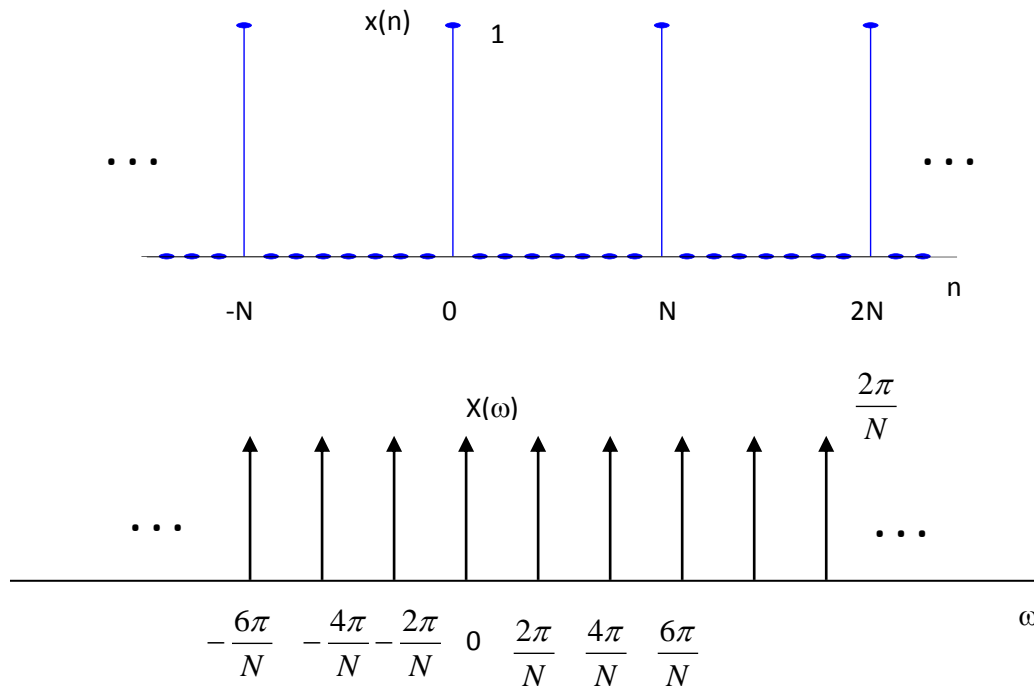
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-jk \left(\frac{2\pi}{N} \right) n} \quad (15)$$

En choisissant l'intervalle de sommation $0 \leq n \leq N-1$, on obtient

$$a_k = \frac{1}{N}$$

La transformée de Fourier de ce signal est donc:

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$$



2.5. Propriétés de la TFTD

2.5.1. Périodicité de la transformée de Fourier à temps discret

La TFTD est périodique en ω de période 2π :

$$X(\omega+2\pi)=X(\omega) \quad (16)$$

Contrairement à la TF à temps continu qui est généralement non périodique.

2.5.2. Linéarité

$$\text{si } x_1(n) \xleftrightarrow{TFTD} X_1(\omega)$$

$$\text{et } x_2(n) \xleftrightarrow{TFTD} X_2(\omega)$$

alors

$$ax_1(n) + bx_2(n) \xleftrightarrow{TFTD} aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

2.5.3. Translation temporelle et fréquentielle

$$\text{si } x(n) \xleftrightarrow{TFTD} X(\omega)$$

$$\text{alors } x(n - n_0) \xleftrightarrow{TFTD} e^{-j\omega n_0} X(\omega)$$

et

$$e^{j\omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{TFTD} X(\omega - \omega_0)$$

2.5.4. Complexe conjugué et symétrie conjuguée

$$\text{si } x(n) \xleftrightarrow{TFTD} X(\omega)$$

alors

$$x^*(n) \xleftrightarrow{TFTD} X^*(-\omega)$$

De même, si $x(n)$ est réel alors sa TFTD possède une symétrie conjuguée:

$$X(\omega) = X^*(-\omega) \quad x(n) \text{ réel}$$

A partir de ceci, il en découle que $\text{Re}[X(\omega)]$ est une fonction paire de ω et $\text{Im}[X(\omega)]$ est une fonction impaire de ω . De manière similaire, le module de $X(\omega)$ est une fonction paire et la phase est une fonction impaire.

$$\text{Si } x(n) \xleftrightarrow{TFTD} X(\omega)$$

avec $x(n) = x_p(n) + x_i(n)$

$x_p(n)$: partie paire $x_i(n)$: partie impaire

On a:

$$\begin{aligned} x_p(n) &\stackrel{TFTD}{\leftrightarrow} \operatorname{Re}[X(\omega)] \\ x_i(n) &\stackrel{TFTD}{\leftrightarrow} j \operatorname{Im}[X(\omega)] \end{aligned}$$

Si $x(n)$ est réel et pair alors sa TFTD est réelle et paire.

2.5.5. Différentiation et accumulation

$$\begin{aligned} \text{Soit } x(n) &\stackrel{TFTD}{\leftrightarrow} X(\omega) \\ x(n) - x(n-1) &\stackrel{TFTD}{\leftrightarrow} (1 - e^{-j\omega})X(\omega) \end{aligned}$$

Considérons le signal

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$

Puisque $y(n) - y(n-1) = x(n)$, on conclut que la TFTD de $y(n)$ est liée à la TFTD de $x(n)$ par division par $(1 - e^{-j\omega})$. La relation précise est:

$$\sum_{m=-\infty}^n x(m) \stackrel{TFTD}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(\omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

Le train d'impulsions de Dirac reflète la valeur continue ou la moyenne qui peut résulter de la sommation.

Exemple

$x(n) = u(n)$: séquence échelon unité

Calculons la TFTD de $x(n)$ en utilisant la propriété d'accumulation et sachant que

$$g(n) = \delta(n) \stackrel{TFTD}{\leftrightarrow} 1 = G(\omega)$$

On a:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^n g(m)$$

En prenant la TFTD des deux membres, il vient:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} G(\omega) + \pi G(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \\
&= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)
\end{aligned}$$

2.5.6. Inversion du temps

Soit $x(n)$ un signal ayant pour spectre $X(\omega)$ et soit $y(n)=x(-n)$. On a:

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n)e^{-j\omega n} \quad (19)$$

Posons $m=-n$, il vient

$$Y(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{-j(-\omega)m} = X(-\omega) \quad (20)$$

Donc

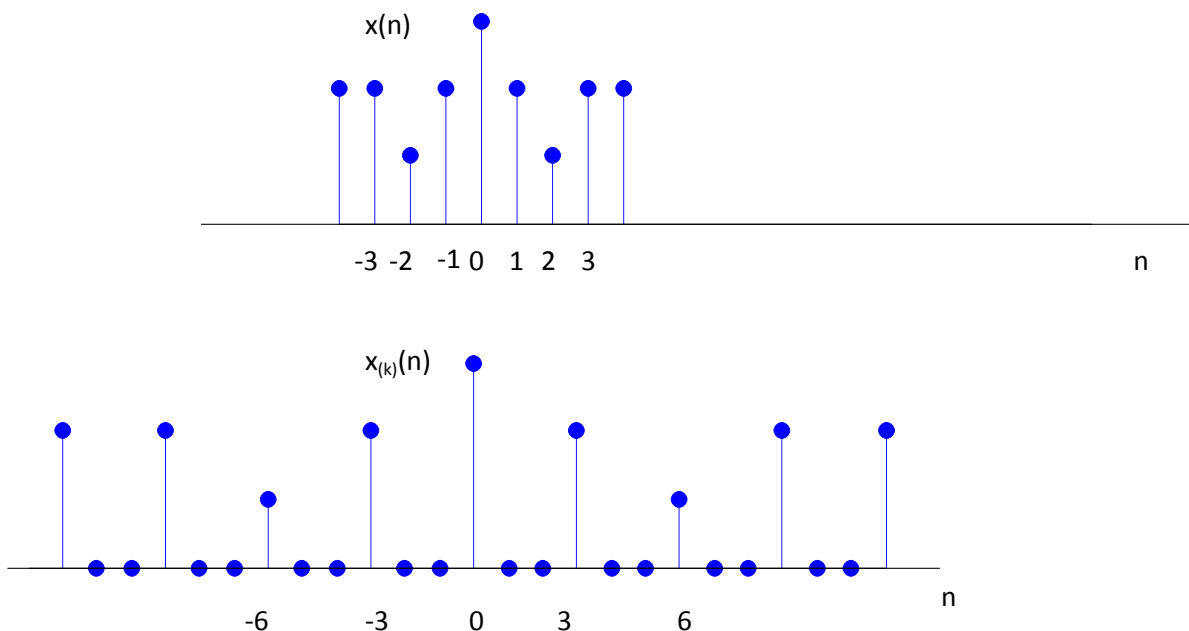
$$x(-n) \xleftrightarrow{TFTD} X(-\omega)$$

2.5.7. Expansion temporelle

Soit k un entier positif et définissons le signal

$$x_{(k)}(n) = \begin{cases} x(n/k) & \text{si } n \text{ est un multiple de } k \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas multiple de } k \end{cases} \quad (21)$$

Comme illustré sur la figure, $x_{(k)}(n)$ est obtenu à partir de $x(n)$ en plaçant $k-1$ zéros entre les valeurs successives du signal original.



Puisque $x_{(k)}(n)=0$ sauf si n est un multiple de k , c-a-d sauf si $n=rk$, la TFTD de $x_{(k)}(n)$ est donnée par:

$$X_{(k)}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(rk) e^{-j\omega rk} \quad (22)$$

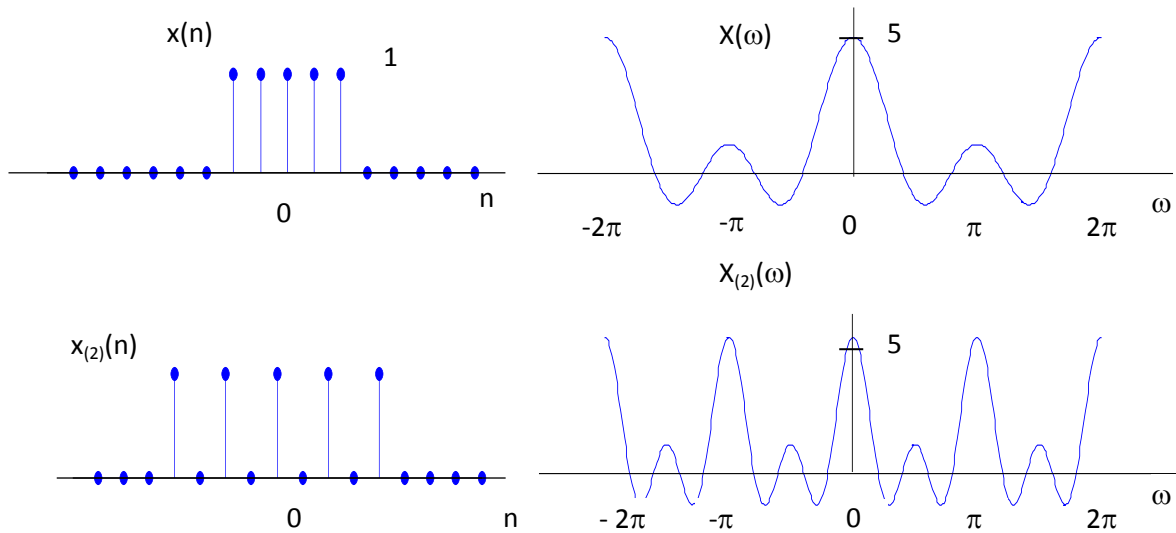
et puisque $x_{(k)}(rk)=x(r)$, on trouve

$$X_{(k)}(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(r) e^{-j(\omega k)r} = X(k\omega) \quad (23)$$

Soit donc:

$$x_{(k)}(n) \xleftrightarrow{TFTD} X(k\omega)$$

Plus le signal est large dans le temps (en prenant $k>$) plus sa TFTD est compressée. Par exemple si $X(\omega)$ est périodique de période 2π , $X(k\omega)$ est périodique de période $2\pi/k$ (Figure)



2.5.8. Dérivation fréquentielle

$$\text{Soit } x(n) \xleftrightarrow{TFTD} X(\omega)$$

Si on dérive les deux membres de l'équation d'analyse, on obtient:

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx(n) e^{-j\omega n}$$

En multipliant les deux membres de l'équation par j , on déduit que:

$$nx(n) \xleftrightarrow{TFTD} j \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

2.5.9. Théorème de Parseval

Si $x(n)$ et $X(\omega)$ constituent une paire de TFTD alors:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (24)$$

La quantité à gauche de l'équation est l'énergie totale contenue dans le signal. La relation de Parseval affirme que cette énergie peut être aussi calculée en intégrant l'énergie par unité de fréquence $|X(\omega)|^2 / 2\pi$ sur un intervalle de longueur 2π .

2.5.10. Propriété de la convolution

Si $x(n)$, $h(n)$ et $y(n)$ sont, respectivement, l'entrée, la réponse impulsionnelle et la sortie d'un système linéaire invariant:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

alors

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

On reconnaît que la réponse fréquentielle d'un système linéaire invariant est la TFTD de sa réponse impulsionnelle.

Exemples

Exemple 1

Considérons un système linéaire invariant de réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \delta(n - n_0)$$

La réponse en fréquence est:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - n_0) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

Donc, pour toute entrée $x(n)$ de TFTD $X(\omega)$, la TFTD de la sortie est:

$$Y(\omega) = e^{-j\omega n_0} X(\omega)$$

et

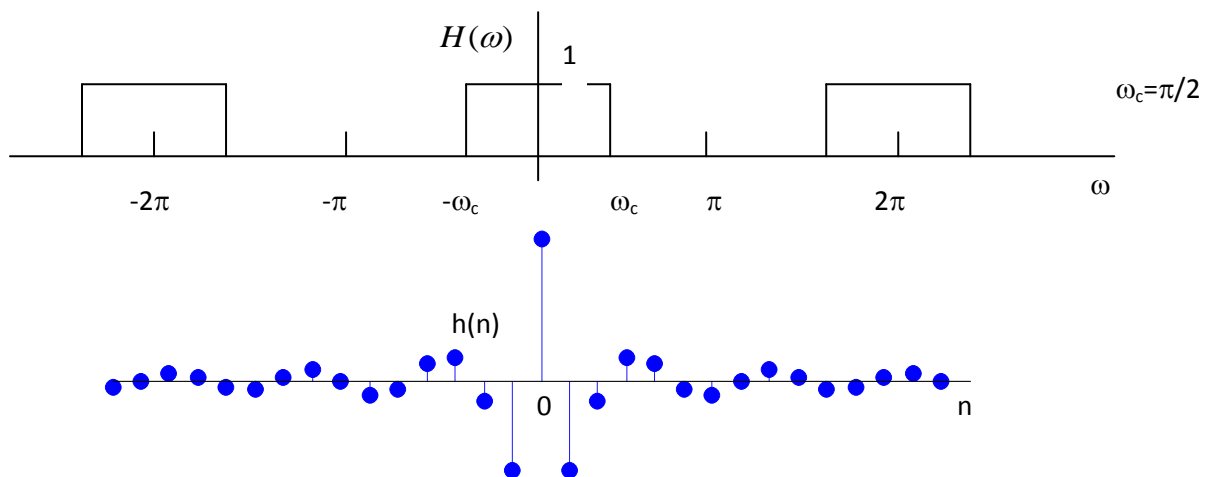
$$y(n) = x(n - n_0)$$

Exemple 2

Considérons le filtre passe bas à temps discret (Figure).

On peut écrire:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$



Puisque $h(n) \neq 0$ pour $n < 0$, ce filtre passe bas idéal n'est pas causal. La réponse impulsionnelle du filtre passe bas idéal est oscillatoire, une caractéristique indésirable dans beaucoup d'applications.

Exemple 2

Considérons un système linéaire invariant de réponse impulsionnelle :

$$h(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1$$

Supposons que l'entrée du système est:

$$x(n) = b^n u(n), \quad |b| < 1$$

Les TFTD de $h(n)$ et $x(n)$ sont:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}$$

Donc

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} = \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - be^{-j\omega}}$$

Tout calcul fait, on trouve

$$A = \frac{a}{a - b}, \quad B = -\frac{b}{a - b} \quad \text{si } a \neq b$$

A partir de la propriété de linéarité, on obtient la TFTD inverse:

$$y(n) = \frac{a}{a-b} a^n u(n) - \frac{b}{a-b} b^n u(n) \quad a \neq b$$

$$= \frac{1}{a-b} (a^{n+1} u(n) - b^{n+1} u(n))$$

Pour $a=b$, on a:

$$Y(\omega) = \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)^2$$

qui peut être exprimé comme:

$$Y(\omega) = \frac{j}{a} e^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)$$

On peut utiliser la propriété de dérivation fréquentielle:

$$a^n u(n) \xleftrightarrow{TFTD} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Donc

$$na^n u(n) \xleftrightarrow{TFTD} j \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)$$

Pour faire apparaître le terme $e^{j\omega}$, on utilise la propriété de translation temporelle:

$$(n+1)a^{n+1}u(n+1) \xleftrightarrow{TFTD} je^{j\omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right)$$

Soit finalement:

$$y(n) = (n+1)a^n u(n+1)$$

2.5.11. Dualité

En considérant la transformée de Fourier à temps continu, on observe une symétrie ou dualité entre l'équation d'analyse et l'équation de synthèse. Il n'existe pas de dualité entre l'équation d'analyse et l'équation de synthèse pour la TFTD. Cependant, il existe une dualité dans les équations de la série de Fourier discrète et une relation de dualité entre la TFTD et la série de Fourier discrète.

3. Transformée de Fourier discrète

3.1. Définition

Soit $x(n)$ une séquence causale de durée N . La transformée de Fourier à temps discret de $x(n)$ est donnée par:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

En évaluant $X(\omega)$ aux fréquences discrètes

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

on obtient la transformée de Fourier discrète (TFD) de la séquence $x(n)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

ou encore

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

où

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (5)$$

La TFD inverse est donnée par

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

$x(n)$ et $X(k)$ constituent une paire de TFD

$$x(n) \overset{TFD}{\longleftrightarrow} X(k)$$

(3) est l'équation d'analyse et (6) est l'équation de synthèse.

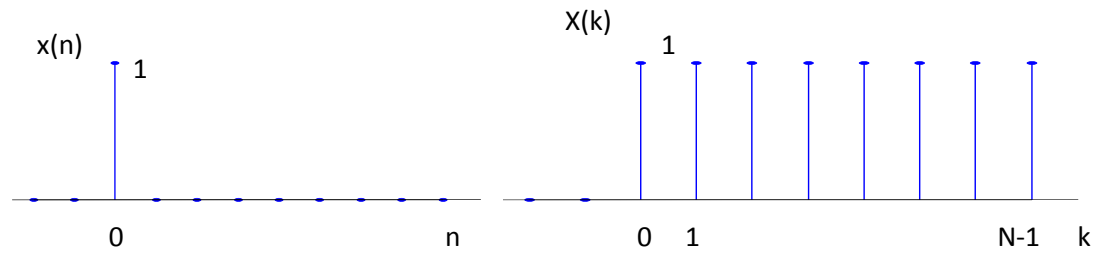
3.2. Exemples

Exemple 1: Calculons la TFD N points de l'impulsion unité.

$$a) x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & 0 < n \leq N-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= x(0)W_N^{0,k} = 1 \end{aligned}$$

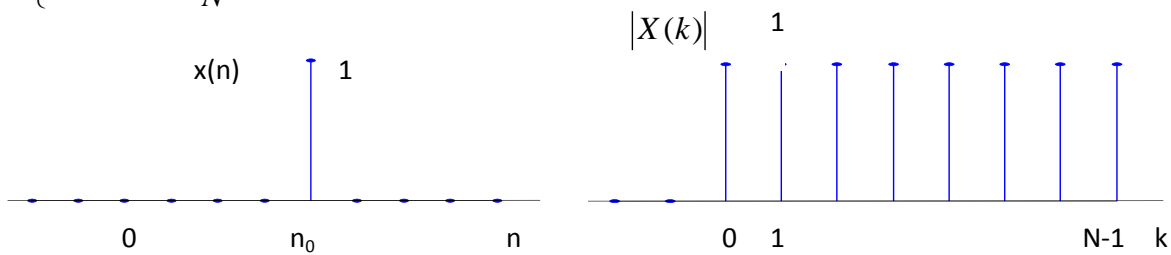
$$\delta(n) \overset{TFD}{\longleftrightarrow} 1$$



$$b) \ x(n) = \delta(n - n_0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq n < n_0 \\ 1 & n = n_0 \\ 0 & n_0 < n \leq N-1 \end{cases}$$

$$X(k) = x(n_0)W_N^{n_0 k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k}$$

$$\begin{cases} |X(k)| = 1 \\ \arg X(k) = \frac{2\pi}{N}n_0 k \end{cases}$$



Exemple 2

$$x(n) = a^n \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} (aW_N^k)^n = \frac{1 - (aW_N^k)^N}{1 - aW_N^k} = \frac{1 - a^N e^{-j\frac{2\pi}{N}kN}}{1 - ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \\ &= \frac{1 - a^N}{1 - ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

3.3. Propriétés de la transformée de Fourier discrète

3.3.1. Linéarité

Soit $x_1(n)$ et $x_2(n)$ deux séquences de durées finies.

Si $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ alors la TFD de $x_3(n)$ est

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$$

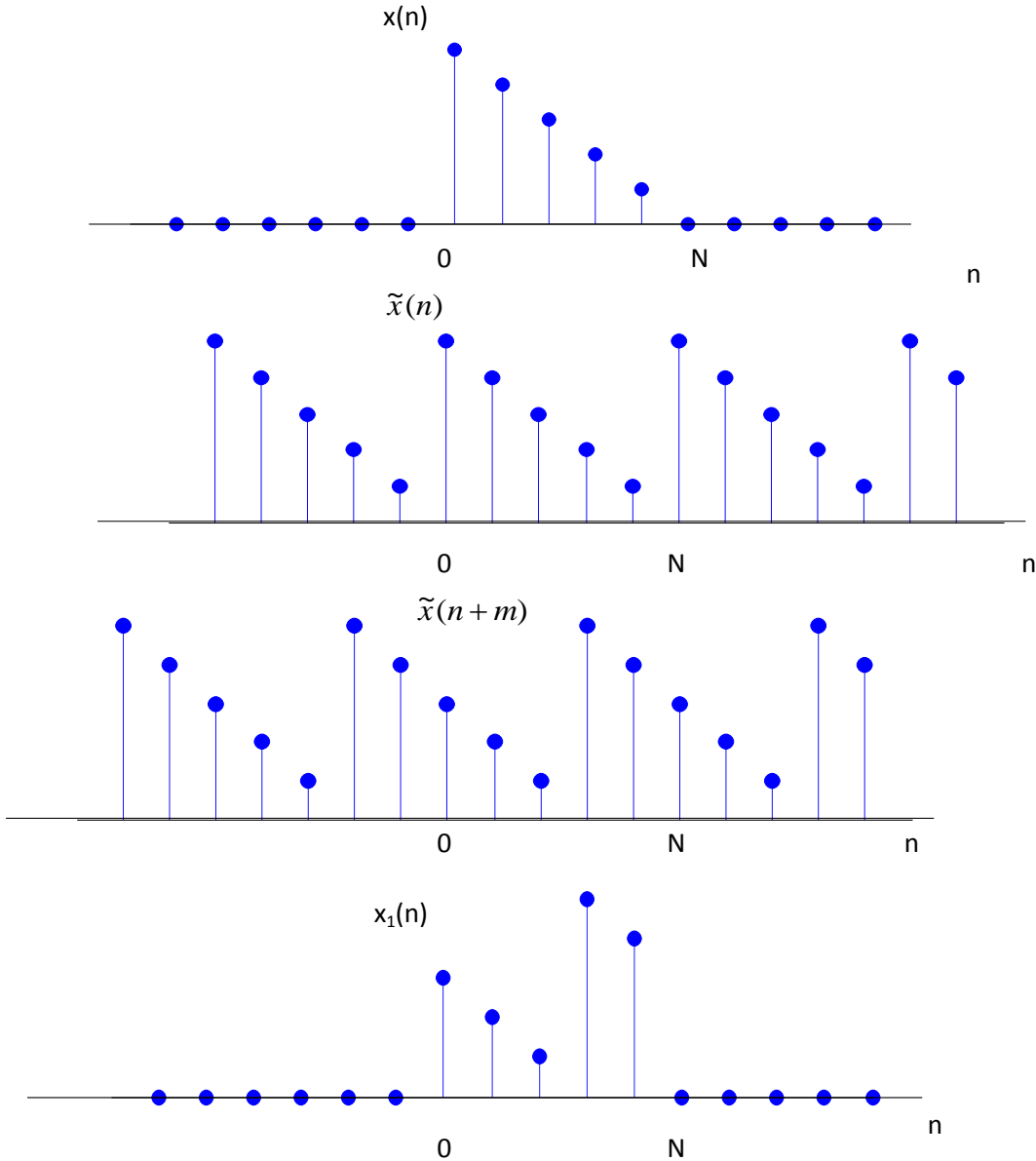
Si $x_1(n)$ est de durée N_1 et $x_2(n)$ de durée N_2 alors $x_3(n)$ est de durée $N_3 = \max(N_1, N_2)$.

3.3.2. Décalage circulaire ou cyclique d'une séquence

Soit $x(n)$ une séquence de durée N . soit $\tilde{x}(n)$ la séquence périodique de période N associée à $x(n)$: $\tilde{x}(n) = x((n)_N)$ et soit $\tilde{x}(n+m)$ le résultat de décalage de $\tilde{x}(n)$ de m échantillons:

$$\tilde{x}_1(n) = \tilde{x}(n+m) = x((n+m)_N)$$

$$x_1(n) = \tilde{x}_1(n)R_N(n) = x((n+m)_N)R_N(n) : \text{Décalage circulaire de } x(n).$$



$$x_1(n) = \tilde{x}(n+m)R_N(n) \stackrel{TFD}{\leftrightarrow} X_1(k) = W_N^{-km} X(k)$$

$$x_1(n) \stackrel{TFD}{\leftrightarrow} X_1(k) = W_N^{-km} X(k)$$

Si $x(n) \stackrel{TFD}{\leftrightarrow} X(k)$
alors

$x(n)W_N^{ln} \xleftrightarrow{TFD} X((k+l)_N)R_N(k)$: Décalage circulaire de $X(k)$ de l échantillons.

$R_N(k)$: fenêtre rectangulaire de durée N :

$$R_N(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3.3.3. Symétrie

Soit $x(n)$ une séquence de durée N et soit $\tilde{x}(n)$ la séquence périodique de période N associée à $x(n)$. La séquence $x(n)$ peut être décomposée en deux séquences de durées N . La première séquence notée $x_{pp}(n)$ correspond à une période du conjugué symétrique de $\tilde{x}(n)$ et la deuxième séquence notée $x_{ip}(n)$ correspond à une période du conjugué anti-symétrique de $\tilde{x}(n)$.

On peut écrire:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= x((n)_N) \\ \tilde{x}_p(n) &= \frac{1}{2}(\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)) \\ \tilde{x}_i(n) &= \frac{1}{2}(\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)) \end{aligned}$$

Définissons $x_{pp}(n)$ et $x_{ip}(n)$ comme:

$$\begin{aligned} x_{pp}(n) &= \tilde{x}_p(n)R_N(n) \\ x_{ip}(n) &= \tilde{x}_i(n)R_N(n) \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} x_{pp}(n) &= \frac{1}{2}(\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n))R_N(n) \\ x_{ip}(n) &= \frac{1}{2}(\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n))R_N(n) \end{aligned}$$

Les séquences $x_{pp}(n)$ et $x_{ip}(n)$ ne sont pas équivalentes aux séquences $x_p(n)$ et $x_i(n)$. On montre que:

$$x_{pp}(n) = (x_p(n) + x_p(n-N))R_N(n)$$

et

$$x_{ip}(n) = (x_i(n) + x_i(n-N))R_N(n)$$

où

$$\begin{aligned} x_p(n) &= \frac{1}{2}(x(n) + x^*(-n)) \\ x_i(n) &= \frac{1}{2}(x(n) - x^*(-n)) \end{aligned}$$

Les séquences $x_{pp}(n)$ et $x_{ip}(n)$ peuvent être générées par chevauchement de $x_p(n)$ et $x_i(n)$ dans l'intervalle $0 \leq n \leq N-1$.

Lorsque $x_{pp}(n)$ et $x_{ip}(n)$ sont réels, elles sont appelées, respectivement, les composantes paires et impaires de $x(n)$.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) &= \tilde{x}_p(n) + \tilde{x}_i(n) \\ x(n) &= \tilde{x}(n)R_N(n) = [\tilde{x}_p(n) + \tilde{x}_i(n)]R_N(n) = \tilde{x}_p(n)R_N(n) + \tilde{x}_i(n)R_N(n) \\ &= x_{pp}(n) + x_{ip}(n)\end{aligned}$$

$x(n) \xleftrightarrow{TFD} X(k)$		$x(n)$ réel
$x^*((-n)_N)R_N(n) \xleftrightarrow{TFD} X^*(k)$		$X(k) = X^*((-k)_N)R_N(k)$
$\text{Re}[x(n)] \xleftrightarrow{TFD} X_{pp}(k)$		$\text{Re}[X(k)] = \text{Re}[X((-k)_N)]R_N(k)$
$j \text{Im}[x(n)] \xleftrightarrow{TFD} X_{ip}(k)$		$\text{Im}[X(k)] = -\text{Im}[X((-k)_N)]R_N(k)$
$x_{pp}(n) \xleftrightarrow{TFD} \text{Re}[X(k)]$		$\arg[X(k)] = -\arg[X((-k)_N)]R_N(k)$
$x_{ip}(n) \xleftrightarrow{TFD} j \text{Im}[X(k)]$		

3.3.4. Convolution circulaire ou cyclique

Soit $x_1(n)$ et $x_2(n)$ deux séquences de durée N chacune et de TFD $X_1(k)$ et $X_2(k)$, respectivement. La convolution circulaire de $x_1(n)$ et $x_2(n)$ est définie par:

$$\begin{aligned}x_3(n) &= x_1(n) \bigcirc x_2(n) \\ x_3(n) &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \right] R_N(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} [x_1((m)_N) x_2((n-m)_N)] R_N(n)\end{aligned}$$

$$x_3(n) \leftrightarrow X_3(k) = X_1(k) X_2(k)$$

Exemple 1

Soit $x_2(n)$ un signal discret de durée N et soit $x_1(n) = \delta(n-n_0)$, $n_0 < N$.

$x_1(n)$ peut être considéré comme un signal de durée N :

$$x_1(n) = \begin{cases} 0 & 0 \leq n < n_0 \\ 1 & n = n_0 \\ 0 & n_0 < n \leq N-1 \end{cases}$$

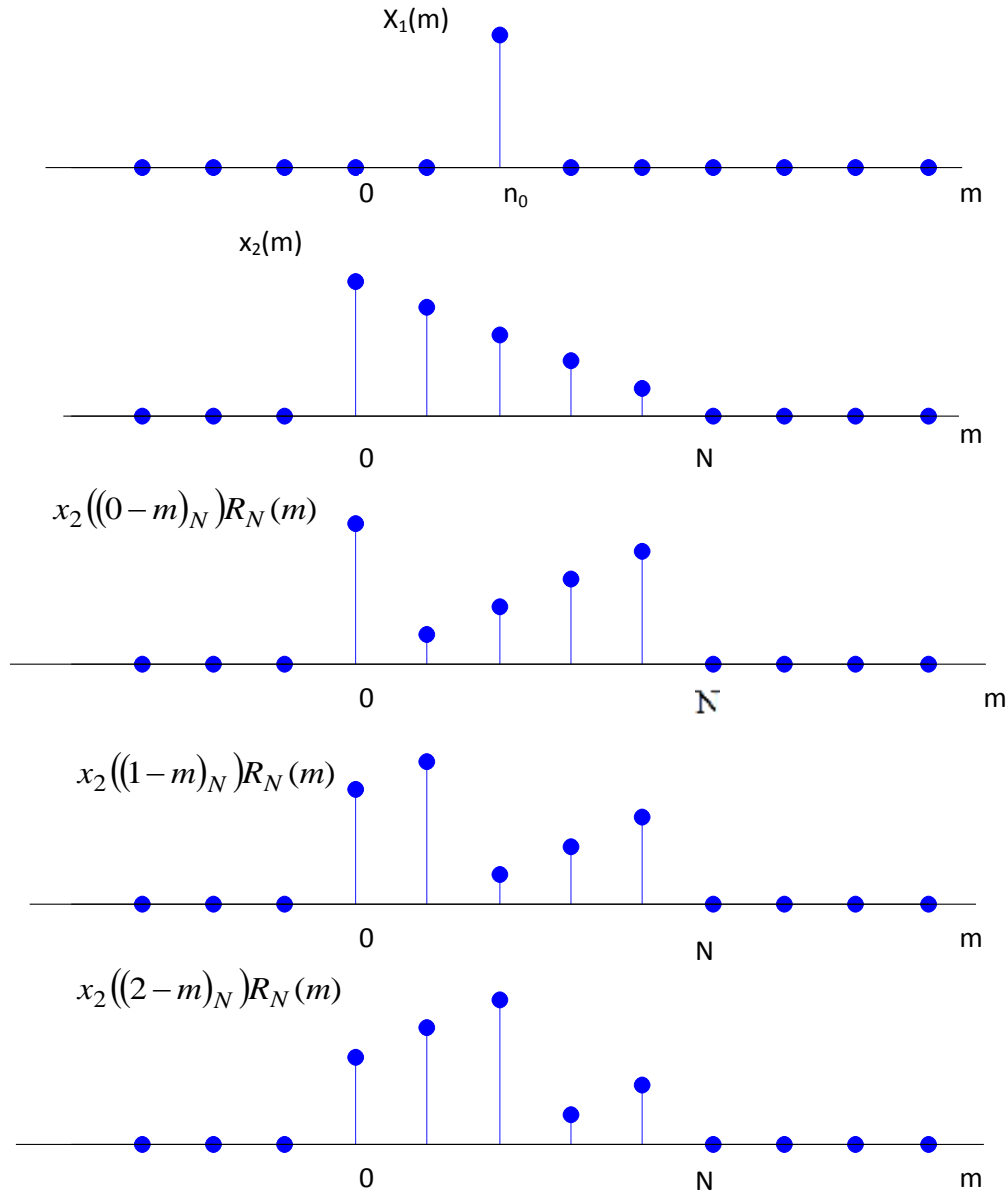
La TFD de $x_1(n)$ est

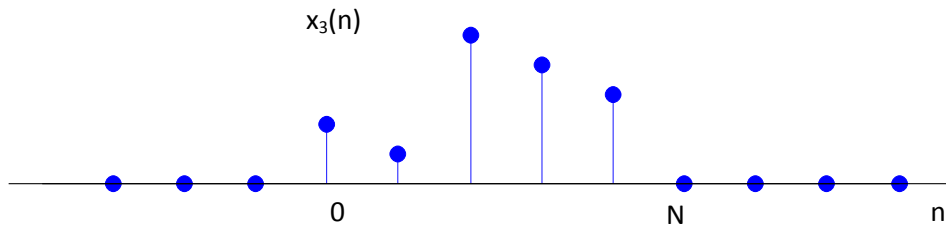
$$X_1(k) = W_N^{kn_0}$$

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k) = W_N^{kn_0} X_2(k)$$

$$x_3(n) = x_1(n) \bigcirc_N x_2(n)$$

La séquence de durée finie correspondante à $X_3(k)$ est la séquence $x_2(n)$ ayant subi un décalage circulaire de n_0 .





On peut considérer $x_1(n)$ et $x_2(n)$ comme des séquences de durée $2N$ en les prolongeant par N zéros. Si on calcule la convolution circulaire $2N$ points des séquences allongées, on obtient une séquence égale à la convolution linéaire des séquences de durée finie $x_1(n)$ et $x_2(n)$.

3.3.5. Multiplication

$$x(n)y(n) \xleftrightarrow{TFD} \frac{1}{N} X(k) \bigcirc_N Y(k) = \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l)_N Y((k-l)_N) \right] R_N(k)$$

3.3.6. Théorème de Parseval

Soit $x(n)$ une séquence de longueur N et soit $X(k)$ sa TFD. On a:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

3.4. Transformée de Fourier discrète d'un signal de durée infinie

La TFD est définie uniquement pour un signal de durée finie. Lorsque le signal est de durée infinie (longue durée) on doit d'abord le segmenter à une longueur appropriée puis calculer la TFD de chaque segment. Segmenter le signal est équivalent à multiplier le signal infiniment long par une fenêtre rectangulaire:

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit $x(n)$ et $y(n)=w(n)x(n)$ les signaux avant et après la troncature. La TTFD de $y(n)$ est:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) Y(\omega - \theta) d\theta$$

où $X(\omega)$ et $W(\omega)$ sont, respectivement, les TTFD de $x(n)$ et $w(n)$.

Puisque $X(\omega) \neq Y(\omega)$, les coefficients $Y(k)$ ne sont pas exactement les échantillons de $X(\omega)$ en $\omega = \frac{2\pi k}{N}$. La distorsion spectrale peut être réduite en augmentant la longueur de la fenêtre de troncature et/ou en utilisant une fenêtre de troncature différente. Quelques fenêtres de troncature (pondération) utilisées (Figure): Hamming, Hanning (Han), Kaiser, Blackman, Bartlett.

3.5. Résolution de la transformée de Fourier discrète

La résolution fréquentielle de la TFD est l'écart minimal entre les fréquences de deux composantes spectrales de mêmes amplitudes qui peuvent être discernées pour une séquence de N échantillons. La résolution fréquentielle de la TFD est inversement proportionnelle à la longueur de la séquence:

$$\Delta f = \frac{f_e}{N}$$

f_e dénote la fréquence d'échantillonnage.

3.6. Transformée de Fourier rapide

Soit $x(n)$ une séquence causale de durée N et $X(k)$ sa TFD. La paire de TFD et TFD inverse peut être représentée sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{X} = \mathbf{W} \mathbf{x}$$

avec

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Notons que :

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H$$

où $(.)^H$ dénote la matrice transposée conjuguée (Hermitienne).

A partir de la représentation matricielle de la TFD, on déduit que la complexité de calcul de la TFD est de l'ordre de $O(N^2)$.

La transformée de Fourier rapide (TFR) (Fast Fourier transform : FFT) est un algorithme efficace pour le calcul de la TFD. La complexité de calcul de la FFT est de $O(N \log_2(N))$

Algorithme de la transformée de Fourier rapide

Lors du développement de l'algorithme de la FFT (décimation temporelle), on suppose que N est une puissance de 2 : $N=2^v$, ou v est un entier.

Les coefficients de la TFD sont données par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Puisque $N=2^v$ est pair, on peut exprimer la somme précédente en deux termes, le premier terme fait intervenir les échantillons pairs et le deuxième terme fait intervenir les échantillons impairs :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n \text{ pair}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n \text{ impair}} x(n)W_N^{kn} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \end{aligned}$$

Le terme W_N^{2kr} peut être écrit comme

$$W_N^{2kr} = e^{-j2\pi(2kr)/N} = e^{-j2\pi(kr)/(N/2)} = W_{N/2}^{kr}$$

Par conséquent, $X(k)$ peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_{N/2}^{kr} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_{N/2}^{2kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_{N/2}^{2kr} \\ &= G(k) + W_N^k H(k) \end{aligned}$$

$$G(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r)W_{N/2}^{kr}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H(k) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1)W_{N/2}^{kr}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Puisque $W_{N/2}^{(m+N/2)r} = W_{N/2}^{mr}$

Cela veut dire que

$$G(m+N/2) = G(m), \quad m = 0, 1, \dots, N/2-1$$

$$H(m+N/2) = H(m), \quad m = 0, 1, \dots, N/2-1$$

Les valeurs $G(0), G(1), \dots, G(N/2-1)$ sont les coefficients TFD de la séquence $x(2n)$. De même, les valeurs $H(0), H(1), \dots, H(N/2-1)$ sont les coefficients TFD de $x(2n+1)$.

Donc, jusqu'à ce point, on a exprimé la TFD N points originale comme étant la somme de 2 TFD $N/2$ points. Un exemple pour le cas $N=8$ est représenté par la figure suivante.

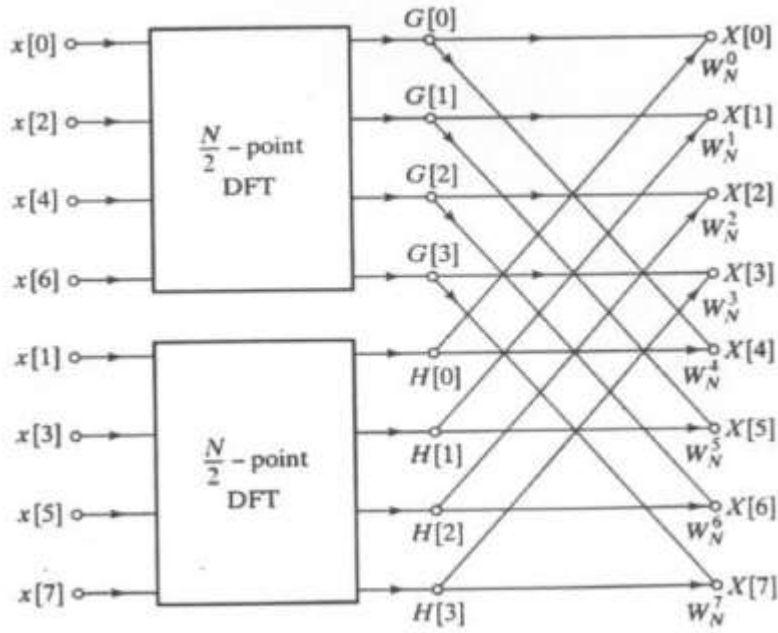


Figure 16: Décomposition de la TFD N points en la somme de 2 TFD $N/2$ points

Dans le diagramme précédent, les coefficients TFD 8 points $X(0)$ à $X(7)$ sont calculés à partir de $G(0)$, $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$ et $H(0)$, $H(1)$, $H(2)$, $H(3)$ en utilisant $N/2=4$ structures en papillon (butterfly) $N/2$ points. Chaque papillon est de la forme :

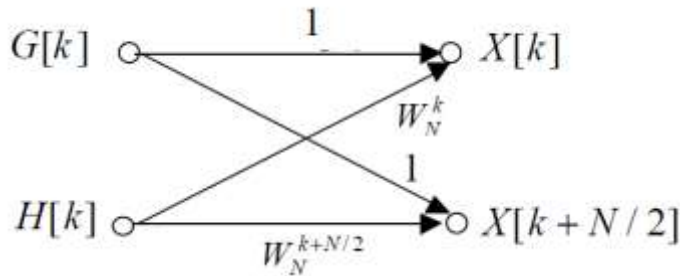


Figure 16: Structure en papillon

La structure en papillon représenté su la figure 16 nécessite 2 multiplications complexes et 2 additions complexes. Mais, puisque

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

Le nombre de multiplication peut être réduit à 1 si on utilise la structure de la figure 17.

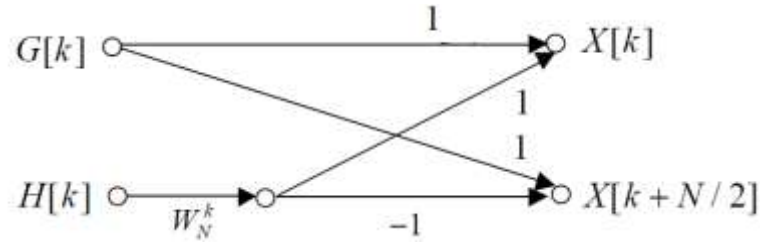


Figure 17 : Structure pour la réduction du nombre de multiplication à 1

Donc, au total, la complexité de calcul de 4 papillons dans l'exemple précédent est de 4 multiplications complexes et 8 additions complexes. En général, il y a $N/2$ multiplications complexes et N additions complexes.

Puisque $N=2v$, $N/2$ est aussi un nombre pair. Cela veut dire que chacun des deux $N/2$ points TFD dans l'exemple précédent peuvent être exprimés en fonction de deux $N/4$ points TFD. Pour $N=2v$, cette procédure peut être répétée v fois. Le schéma de la figure 18 illustre l'algorithme de la transformée de Fourier rapide pour une séquence de longueur $N=8$ échantillons.

Si $N=2v$, il y a toujours v étages dans la structure globale de calcul avec $N/2$ papillons dans chaque étage. Le nombre total de multiplications est donc :

$$n_M = v \times \frac{N}{2} \times 1 = \frac{1}{2} N \log_2(N)$$

Le nombre total d'additions est :

$$n_A = 2n_M = N \log_2(N)$$

En conclusion, la complexité de l'algorithme de la FFT à décimation dans le temps est de l'ordre de $N \log_2(N)$ qui est beaucoup plus petit que de N^2 pour les grandes valeurs de N .

Cet algorithme est appelé FFT radix-2. Il existe d'autres variantes d'algorithmes équivalents et plus rapide : radix-4 (N puissance de 4), radix-8 (N puissance de 8), etc.

Cet algorithme utilise la décimation en temps. Il existe des algorithmes duaux qui utilisent la décimation en fréquence.

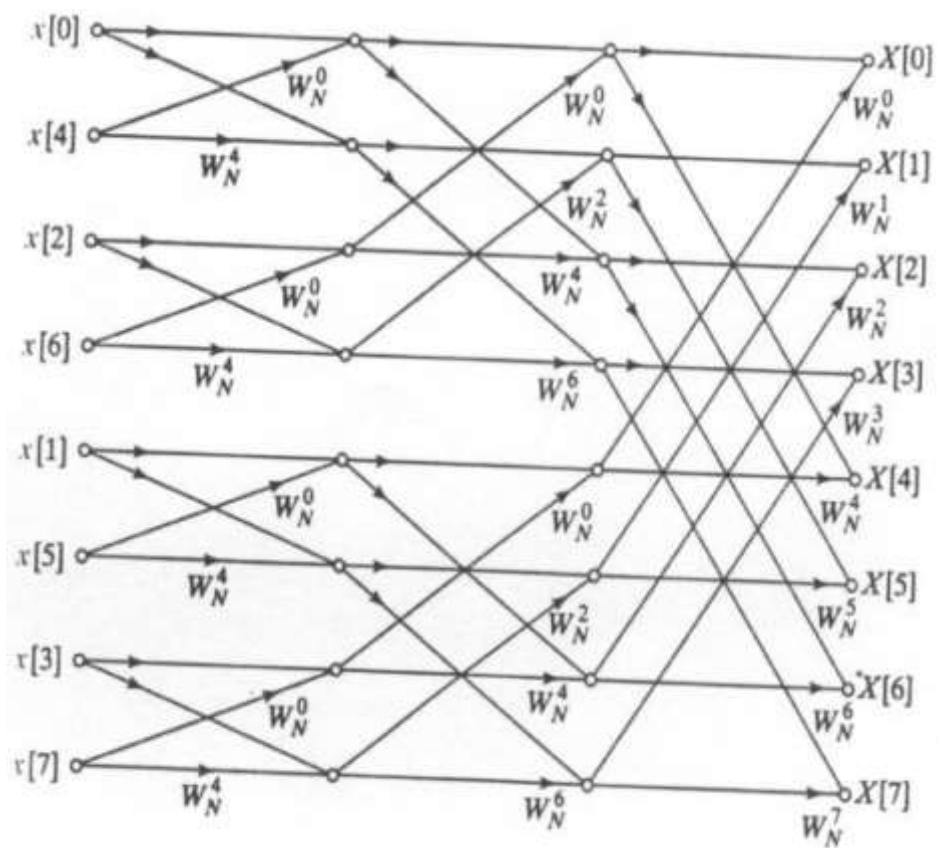


Figure 18 : Illustration du calcul de la transformée de Fourier rapide 8 points