

## Chapitre 3 : Synthèse des filtres RIF

### 1. Introduction

Si on veut implémenter un filtre au moyen de l'algorithme de la transformée de Fourier rapide, il est nécessaires d'avoir une réponse impulsionnelle finie (RIF).

Les filtres RII ont une très bonne réponse en fréquence mais ils sont caractérisés par une phase non linéaire. Les filtres RIF peuvent avoir une phase exactement linéaire.

Un filtre à réponse impulsionnelle de durée N est définie par sa fonction de transfert en z :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (1)$$

$H(z)$  possède  $(N-1)$  zéros qui peuvent être localisés n'importe où dans le plan Z et  $(N-1)$  pôles en  $z=0$ . La réponse en fréquence est

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega} \quad (2)$$

### 2. Filtres à phase linéaire

Les filtre RIF ont la caractéristique de pouvoir présenter une phase linéaire. Une phase linéaire implique un temps de propagation de groupe constant et par conséquent l'effet de la phase sur le signal sera un simple décalage temporel.

Soit  $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)}$  la réponse en fréquence du filtre.

Le temps de groupe est défini par

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

Si le filtre est à phase linéaire

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad (3)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes et  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ .

alors  $\tau(\omega) = \alpha = \text{constante}$ .

- Si  $\beta=0$  (filtres à phase strictement linéaire)

A partir des équations (2) et (3), on obtient :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega} = A(\omega) e^{j\alpha\omega}$$

En regroupant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\begin{cases} A(e^{j\omega}) \cos \alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos n\omega \\ A(e^{j\omega}) \sin \alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin n\omega \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\tan \alpha\omega = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin n\omega}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos n\omega} \quad (4)$$

Il existe deux possibilités pour l'équation (4).

### 1<sup>er</sup> cas

- $\alpha=0$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin n\omega}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos n\omega} = 0$$

$\Rightarrow h(n)=0$  pour  $n \neq 0$  la réponse impulsionale se réduit à une impulsion. Ce cas n'est pas très utile car le filtre se réduit à un simple gain.

- $\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos n\omega \sin \alpha\omega - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin n\omega \cos \alpha\omega = 0 \quad (5)$$

La solution unique de l'équation (5) est donnée par :

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \text{ et } h(n) = h(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 : h(n) \text{ réponse impulsionale symétrique}$$

### 2<sup>ème</sup> cas

Si  $\beta \neq 0$  (filtre à phase linéaire)

Des équations (2) et (3), on obtient :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega} = A(e^{j\omega}) e^{j(\beta - \alpha\omega)}$$

En suivant le même raisonnement que pour le cas  $\beta=0$ , on obtient

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, \quad \beta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 : \quad h(n) \quad \text{réponse impulsionnelle antisymétrique}$$

Donc, on distingue 4 types de filtres non récursifs à phase linéaire selon la symétrie de la réponse impulsionnelle et selon que l'ordre  $N$  du filtre est pair ou impair.

**Type I :** réponse impulsionnelle symétrique et  $N$  impair

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad N \text{ impair}$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \text{ est un entier} \Rightarrow h(n) \text{ est symétrique par rapport à } h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n} \\ &= h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n} \end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, posons  $m=N-1-n$ , il vient

$$\begin{aligned} H(z) &= h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(m) z^{-(N-1-m)} \\ H(z) &= h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(m) z^{-\frac{N-1}{2}} \left( z^{\frac{N-1}{2}-m} + z^{-\left(\frac{N-1}{2}-m\right)} \right) \\ &= z^{-\frac{N-1}{2}} \left[ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(m) \left( z^{\frac{N-1}{2}-m} + z^{-\left(\frac{N-1}{2}-m\right)} \right) \right] \end{aligned}$$

En posant  $n = \frac{N-1}{2} - m$ , on obtient

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \left[ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) (z^n + z^{-n}) \right]$$

En posant  $z=e^{j\omega}$  et en exploitant l'égalité  $e^{j\omega}+e^{-j\omega}=2\cos\omega$ , on obtient

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{N-1}{2}\omega} \left[ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) 2\cos n\omega \right]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-\frac{N-1}{2}\omega} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos n\omega \right]$$

où

$$\begin{cases} a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) \\ a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

**Type II :** Réponse impulsionnelle symétrique et N pair

$$h(n)=h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \text{ n'est pas entier}$$

La fonction de transfert est donnée par

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

Dans la deuxième somme, posons  $m=N-1-n$ . Il vient

$$H(z) = z^{-\left(\frac{N}{2}-1\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{\frac{N}{2}-1-n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-\left(\frac{N}{2}-1-n\right)} \right]$$

Posons  $m = \frac{N}{2} - 1 - n$ . On obtient

$$H(z) = z^{-\left(\frac{N}{2}-1\right)} \left[ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h\left(\frac{N}{2}-1-m\right) z^{m+\frac{1}{2}} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h\left(\frac{N}{2}-1-m\right) z^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$H(z) = z^{-\left(\frac{N}{2}-1\right)} \left[ \sum h\left(\frac{N}{2}-1-m\right) \left( z^{m+\frac{1}{2}} + z^{-\left(m+\frac{1}{2}\right)} \right) \right]$$

Poson  $z=e^{j\omega}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega\left(\frac{N}{2}-1\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h\left(\frac{N}{2}-1-n\right) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \right] \\ &= e^{-j\omega\left(\frac{N}{2}-1\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} b(n) \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega \right] \end{aligned}$$

avec

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2}-1-n\right), \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$\theta(\omega) = -\left(\frac{N}{2}-1\right)\omega$$

Remarquons que pour  $\omega=\pi$ ,  $H(e^{j\omega})=0$

Donc, ce type de filtres ne convient pas pour l'approximation des filtres passe haut.

**Type III :** Réponse impulsionale antisymétrique et N impair

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \text{ entier}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$\text{Puisque } h\left(\frac{N-1}{2}\right) = -h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n) z^{-n} - \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(N-1-n) z^{-n}$$

En posant dans la deuxième somme  $m=N-1-n$ , on obtient

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n+\frac{N-1}{2}} - \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h(n) z^{-\frac{N-1}{2}+n} \right]$$

Posons  $m = \frac{N-1}{2} - 1 - n$ . Il vient

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \left[ \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h\left(\frac{N-1}{2} - 1 - m\right) (z^{m+1} - z^{-(m+1)}) \right]$$

Poson  $z=e^{j\omega}$ , il vient

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h\left(\frac{N-1}{2} - 1 - n\right) 2j \sin((n+1)\omega) \right]$$

En écrivant  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ , il vient :

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h\left(\frac{N-1}{2} - 1 - n\right) 2 \sin((n+1)\omega) \right] \\ &= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} c(n) \sin((n+1)\omega) \right] \end{aligned}$$

où  $c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n - 1\right)$ ,  $n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2} - 1$

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$$

Pour n'importe quelle valeur de  $c(n)$ ,  $H(e^{j\omega}) = 0$  pour  $\omega=0$  et  $\omega=\pi$ .

Ce type de filtres est adapté pour l'approximation des filtres passe bande, des différentiateurs ou pour les transformateurs de Hilbert.

**Type IV : Réponse impulsionale antisymétrique et N pair**

$h(n) = -h(N-1-n)$   $0 \leq n \leq N-1$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$
 n'est pas entier

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} - \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n}
\end{aligned}$$

En posant dans la deuxième somme  $m=N-1-n$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} - \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(m)z^{-(N-1-m)} \\
&= z^{-\left(\frac{N}{2}-1\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{\frac{N}{2}-1-n} - \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-\left(\frac{N}{2}-1-n\right)} \right] \\
&= z^{-\left(\frac{N}{2}-1\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left( z^{\frac{N}{2}-1-n} + z^{-\left(\frac{N}{2}-1-n\right)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Posons  $m = \frac{N}{2} - 1 - n$ , il vient

$$H(z) = z^{-\left(\frac{N}{2}-1\right)} \left[ \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h\left(\frac{N}{2}-1-n\right) \left( z^{\frac{m+1}{2}} - z^{-\left(\frac{m+1}{2}\right)} \right) \right]$$

et

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= e^{-j\left(\frac{N}{2}-1\right)\omega} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h\left(\frac{N}{2}-1-n\right) 2j \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \\
&= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{N}{2}-1\right)\omega\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h\left(\frac{N}{2}-1-n\right) 2 \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \\
&= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{N}{2}-1\right)\omega\right)} \left[ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} d(n) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right]
\end{aligned}$$

où  $d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - 1 - n\right), 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{N}{2} - 1\right)\omega$$

Dans ce cas,  $H(e^{j\omega}) = 0$  pour  $\omega=0$ . Ce type de filtres est adapté pour l'approximation des différentiateurs ou pour les transformateurs de Hilbert.

### 3. Méthodes de synthèse des filtres FIR

On distingue trois principales méthodes de synthèse des filtres à RIF :

1. La méthode des fenêtres
2. méthode d'échantillonnage en fréquence
3. Les méthodes d'optimisation

#### 3.1. Méthode des fenêtres

Cette méthode consiste à tronquer la réponse impulsionnelle de durée infinie pour obtenir la réponse impulsionnelle de durée finie.

Soit  $H_d(e^{j\omega})$  la réponse en fréquence désirée idéale. On a :

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

où  $h_d(n)$  est la réponse impulsionnelle correspondante.

En général  $H_d(e^{j\omega})$  peut être constante par morceau et avoir des discontinuités aux frontières entre des bandes. Dans ce cas,  $h_d(n)$  est de durée infinie et doit être tronquée pour obtenir une réponse impulsionnelle de durée finie.

Si  $h_d(n)$  est de durée infinie, la réponse impulsionnelle causale de durée finie est :

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

où  $w(n)$  est la fenêtre rectangulaire de durée  $N$

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

En utilisant le théorème de la convolution complexe (Propriété de multiplication), on obtient :

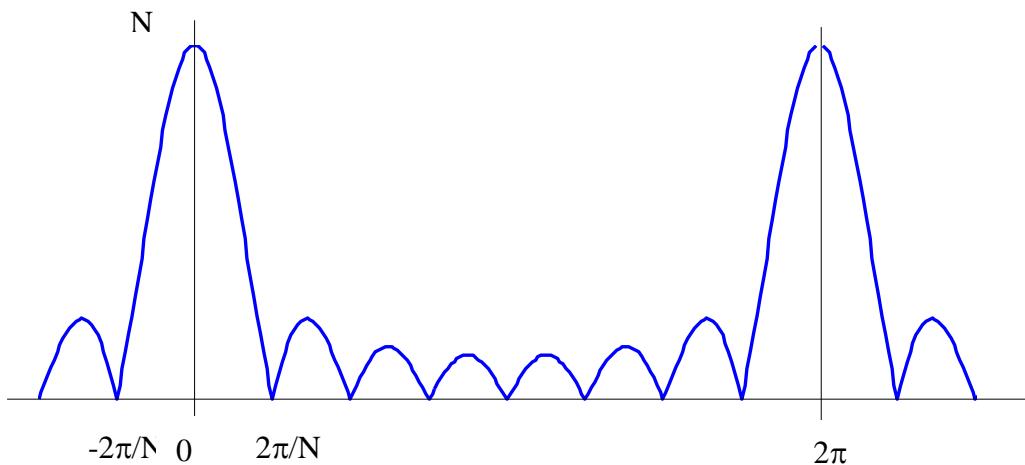
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (6)$$

$H(e^{j\omega})$  est donc la convolution périodique continue de la réponse en fréquence désirée avec la transformée de Fourier de la fenêtre de pondération.

A partir de (6), on observe que si  $W(e^{j\omega})$  est étroite comparée à aux variations de  $H_d(e^{j\omega})$  alors  $H((e^{j\omega}))$  ressemble à  $H_d((e^{j\omega}))$ .

On désire avoir une fenêtre  $W(n)$  de durée aussi courte que possible pour réduire la complexité de calcul du filtre et d'autre part, on désire avoir  $W(e^{j\omega})$  aussi étroite que possible dans le domaine fréquentiel pour mieux approximer la réponse en fréquence  $\Rightarrow$  ces deux conditions sont contradictoires.

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$



**Figure 1 :** Transformée de Fourier de la fenêtre de pondération

Lorsque  $N$  augmente, la largeur du lobe principal (région entre  $-2\pi/N$  et  $2\pi/N$ ) diminue. Pour la fenêtre rectangulaire, lorsque  $N$  augmente l'amplitude du lobe principal et des lobes secondaires augmentent alors que la largeur de chaque lobe diminue de sorte que l'aire de chaque lobe reste constante. Comme résultat  $H(e^{j\omega})$  donné par (6) varie de manière oscillatoire  $\Rightarrow$  phénomène de Gibbs.

Le phénomène de Gibbs peut être réduit en utilisant une fenêtre de troncature moins brutale.

En utilisant une fenêtre de troncature qui tend progressivement vers zéro à chaque extrémité, l'amplitude des lobes secondaires peut être réduite mais au prix d'une augmentation de la largeur du lobe principal. Les fonctions de pondération les plus utilisées sont la fenêtre de Bartlett, Hamming, Blacman et Hanning (Han).

### Exemple : Filtre passe bas

La fonction de transfert d'un filtre passe bas causal à phase linéaire est donnée par :

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

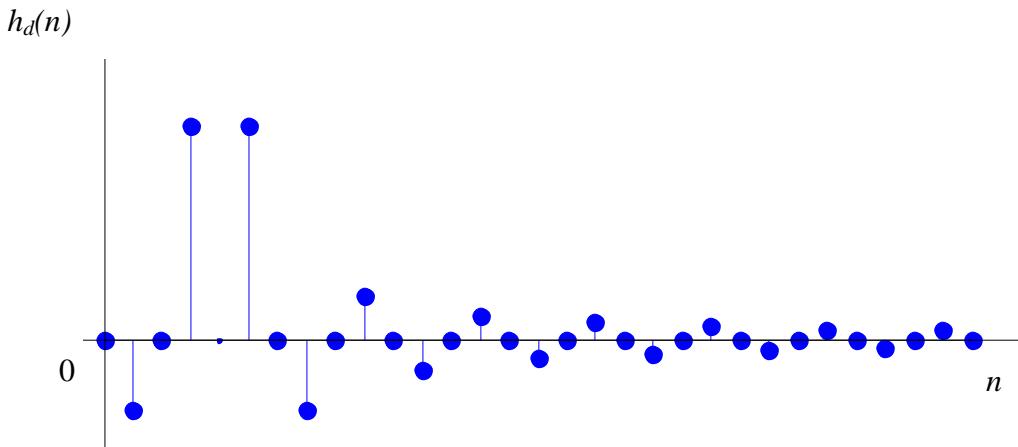
La réponse impulsionnelle correspondante est donnée par

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \quad n \neq \alpha$$

avec  $\alpha = \frac{N-1}{2}$

$h_d(n)$  est de durée infinie. Pour obtenir un filtre à phase linéaire de durée  $N$  finie, on définit

$$h(n) = h_d(n)w(n).$$



**Figure 2 :** Réponse impulsionnelle du filtre passe bas à phase linéaire

Remarque : Si  $w(n)$  est symétrique, un choix de  $\alpha$  correspond à une réponse impulsionnelle  $h(n)$  satisfaisant la condition de linéarité de la phase.

### Limitations de la méthode :

- Aucune fenêtre de troncature n'est réellement optimale.
- Le choix de l'ordre  $N$  à utiliser en fonction des spécifications se fait par tâtonnement.

La méthode des fenêtres peut servir pour la synthèse des filtres à ordres élevés lorsque les méthodes optimales deviennent très lourdes.

### 3.2. Méthode d'échantillonnage en fréquence

Un filtre à réponse impulsionnelle finie peut être spécifié par sa réponse impulsionnelle  $h(n)$  ou par les coefficients de la transformée de Fourier discrète  $H(k)$ .

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{TFD} \quad (7)$$

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{kn=0}^{N-1} H(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{TFD inverse} \quad (8)$$

Les coefficients  $H(k)$  peuvent être considérés comme les échantillons de la TZ évaluée en N points également espacés sur le cercle unité :

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

En remplaçant (8) dans l'expression de la TZ, on obtient :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \right] z^{-n}$$

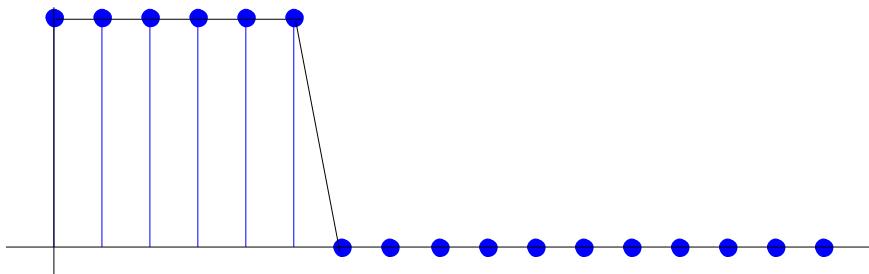
En inter-changeant l'ordre de sommation, on obtient :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k} z^{-1} \right]^n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \frac{\left(1 - e^{j2\pi k} z^{-N}\right)}{\left(1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}\right)}$$

Puisque  $e^{j2\pi k} = 1$ , il vient

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{\left(1 - z^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)} \quad (9)$$

Pour approximer la réponse en fréquence  $H(e^{j\omega})$ , on peut échantillonner en fréquence en N points également espacés sur le cercle unité et évaluer la réponse en fréquence continue par interpolation de la réponse en fréquence échantillonnée en utilisant (9).



**Figure 3 :** Echantillonnage en fréquence

L'erreur d'approximation est nulle aux fréquences d'échantillonnage et non nulle entre elles.

Pour améliorer la qualité d'approximation, on peut prendre un nombre d'échantillons fréquentiels comme variables sans contraintes. Les valeurs de ces variables sans contraintes sont en général optimisées pour minimiser une certaine fonction coût. On peut prendre comme variables sans contraintes les échantillons fréquentiels qui appartiennent à la bande de transition.

A partir de (9), la réponse en fréquence du filtre s'écrit :

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{-j\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \sin \frac{\omega N}{2} \quad (10)$$

L'équation (10) montre que la réponse en fréquence du filtre est une combinaison linéaire des échantillons fréquentiels  $H(k)$  avec la fonction d'interpolation de la forme :

$$A(\omega, k) = e^{-j\frac{k\pi}{N}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} = \pm e^{j\frac{k\pi}{N}} \frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)}$$

En choisissant comme variables sans contraintes les échantillons fréquentiels qui appartiennent aux bandes de transition, on peut concevoir des filtres de très bonne qualité.

### 3.3. Filtres optimaux

Le problème de synthèse des filtres à réponse impulsionnelle finie à phase linéaire est considéré comme un problème d'approximation de Chabyshev. On obtient un ensemble de conditions pour lesquelles on peut montrer que la solution est optimale et unique. Les techniques d'optimisation sont basées sur l'algorithme d'échange de Remez et la programmation linéaire. Les filtres obtenus sont appelés filtres à ondulation constante (equiripple FIR filters).