

## Chapitre 4 : Synthèse des filtres RII

### 1. Introduction

Un filtre numérique est un système linéaire invariant fonctionnant en temps discret et réalisé en utilisant une précision arithmétique finie. Le filtre numérique a pour objet de modifier d'une façon précise le contenu fréquentiel (spectre) d'une séquence discrète appliquée à son entrée.

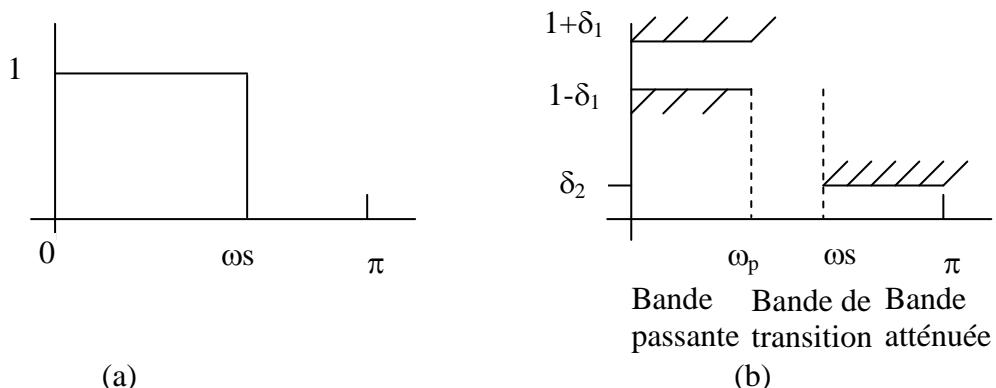
La conception (synthèse) des filtres numériques se fait en trois étapes:

- 1) La spécification des propriétés désirées du système.
- 2) L'approximation de ces spécifications en utilisant un système discret causal.
- 3) La réalisation du système en utilisant une précision arithmétique finie.

En général, le filtre numérique désiré est utilisé pour filtrer un signal numérique qui a été obtenu à partir d'un signal analogique par échantillonnage. Les spécifications pour les filtres analogiques et numériques sont souvent données dans le domaine fréquentiel: filtre passe bas, passe bande, passe haut,... Etant donné la fréquence d'échantillonnage, on doit convertir les spécifications fréquentielles sur le filtre analogique aux spécifications fréquentielles sur le filtre numérique correspondant, les fréquences analogiques sont en Hz et les fréquences numériques en radian.

### Exemple de spécifications

Dans le cas d'un filtre passe bas par exemple, les spécifications sont données sous la



**Figure 1 :** Spécification d'un filtre passe bas. (a) Filtre passe bas idéal. (b) Limites des tolérances pour l'approximation d'un filtre passe bas idéal

On distingue une bande passante où l'amplitude de la réponse en fréquence est approximée par 1 à une tolérance de  $\pm\delta_1$ :

$$1 - \delta_1 < |H(e^{j\omega})| < 1 + \delta_1 \quad |\omega| \leq \omega_p$$

Une bande atténuee ou bande d'arrêt où l'amplitude de la réponse en fréquence est approximée par 0 à une tolérance inférieure à  $\delta_2$ :

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2 \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi$$

Les fréquences de coupure de la bande passante  $\omega_p$  et de la bande d'arrêt  $\omega_s$  sont données en angle dans le plan Z. Pour rendre possible l'approximation du filtre passe

bas idéal, on doit fournir une largeur de bande de transition ( $\omega_s - \omega_p$ ) non nulle dans laquelle l'amplitude de la réponse en fréquence s'atténue progressivement de la bande passante à la bande d'arrêt.

Etant donnée les spécifications données par la figure, l'étape suivante consiste à trouver un système linéaire invariant discret dont la réponse en fréquence satisfait les tolérances spécifiées. Donc, le problème de conception du filtre devient un problème d'approximation.

Dans le cas des systèmes à réponse impulsionnelle infinie (RII) (Infinite impulse response: IIR), on doit approximer la réponse en fréquence désirée par une fonction rationnelle alors que dans le cas des filtres à réponse impulsionnelle (RIF) (Finite impulse response: FIR), la réponse en fréquence désirée est approximée par une fonction polynomiale.

### Système RII

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad M \neq 0 \quad N \neq 0$$

### Système RIF

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad M \neq 0$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

## 2. Méthode de synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infinie

### 2.1. Conception des filtres RII à partir des filtres analogiques

Cette approche consiste à transformer un filtre analogique en un filtre numérique qui répond aux spécifications désirées.

Considérons la fonction de transfert d'un filtre analogique

$$H_a(p) = \frac{Y_a(p)}{X_a(p)} = \frac{\sum_{k=0}^M d_k p^k}{\sum_{k=0}^N c_k p^k} \quad (1)$$

$x_a(t)$  et  $y_a(t)$  sont, respectivement, l'entrée et la sortie du filtre et  $Y_a(p)$  et  $X_a(p)$  sont leurs transformées de Laplace respectives.

Un système analogique de fonction de transfert  $H_a(p)$  peut être aussi décrit par une équation différentielle :

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M d_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k} \quad (2)$$

La fonction de transfert rationnelle correspondante pour les filtres numériques est de la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N c_k z^{-k}} \quad (3)$$

### 2.1.1. Méthode d'invariance impulsionale ou échantillonnage de la réponse impulsionale

Une approche pour transformer la synthèse d'un filtre analogique en celle d'un filtre numérique consiste à choisir la réponse impulsionale du filtre numérique en échantillonner la réponse impulsionale du filtre analogique:

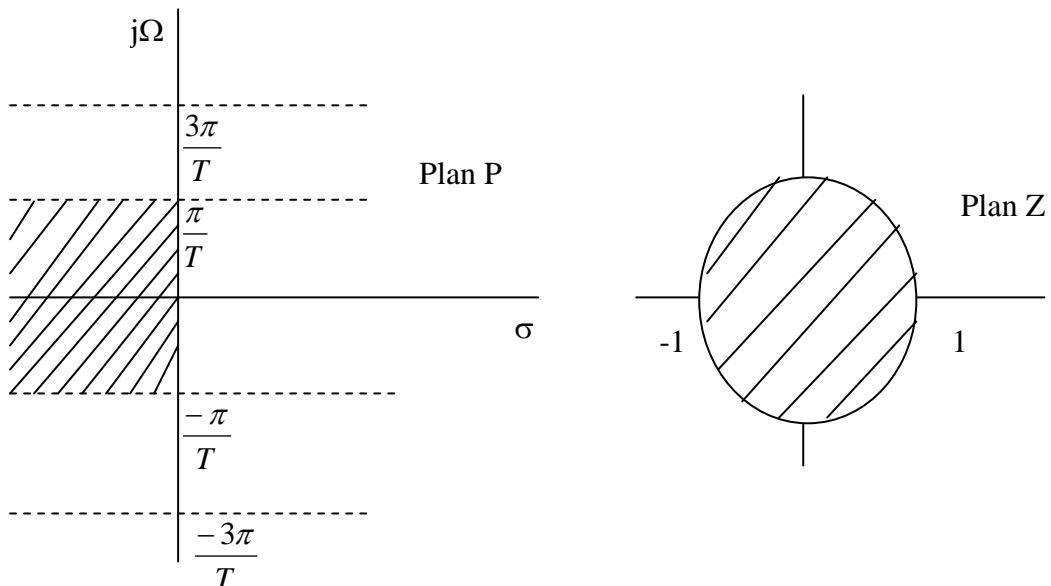
$$h(n) = h_a(nT)$$

T: période d'échantillonnage

On montre que la TZ de  $h(n)$  est liée à la transformée de Laplace par:

$$H(z)|_{z=e^{pT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(p + j \frac{2\pi}{T} k\right)$$

$z = e^{pT} \Rightarrow$  la tranche du plan P de largeur  $\frac{2\pi}{T}$  correspond au plan Z entier



**Figure 2 :** Correspondance entre le plan P et le plan Z

La réponse en fréquence du filtre numérique est liée à la réponse en fréquence du filtre analogique par:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi}{T}k\right) \quad (4)$$

A partir du théorème d'échantillonnage, on déduit que:

$$\text{Si } H_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$$

alors

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| \leq \pi$$

Cependant, en pratique, un filtre analogique n'est pas à bande limitée et donc il y a un chevauchement des termes de (4).

A cause du recouvrement lors du processus d'échantillonnage, la réponse en fréquence du filtre numérique ne sera pas identique à la réponse en fréquence du filtre analogique original.

### **Relation entre le plan P et le plan Z**

Considérons la fonction de transfert du filtre analogique exprimée sous forme de fractions simples:

$$H_a(p) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{p - p_k}$$

La réponse impulsionale correspondante est:

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t)$$

où  $u(t)$  est l'échelon unité.

La réponse impulsionale du filtre numérique est:

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k nT} u(nT) = \sum_{k=1}^N A_k \left(e^{p_k T}\right)^n u(n)$$

La fonction de transfert du filtre numérique est :

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

Un pôle en  $p=p_k$  dans le plan P est transformé en un pôle en  $z=e^{p_k T}$  dans le plan Z et les coefficients dans le développement en fractions simples sont identiques. Si le filtre analogique est stable, ce qui correspond à la partie réelle de  $p_k$  négative alors l'amplitude de  $e^{p_k T}$  est inférieure à 1 de sorte que le pôle correspondant du filtre

numérique est à l'intérieur du cercle unité et par conséquent, le filtre numérique est aussi stable.

Exemple

$$H_a(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$H_a(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+2}$$

$$h_a(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-2t} u(t)$$

$$h(n) = h_a(nT) = \frac{1}{2} e^{-nT} u(n) - \frac{1}{2} e^{-2nT} u(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-T} z^{-1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-2T} z^{-1}} = \frac{1}{2} \frac{(1 - e^{-2T} z^{-1}) - (1 - e^{-T} z^{-1})}{(1 - e^{-T} z^{-1})(1 - e^{-2T} z^{-1})}$$

$$\text{Pôles en } z=e^{-T} \text{ et } z=e^{-2T} \quad = \frac{1}{2} \frac{(e^{-T} - e^{-2T}) z^{-1}}{(1 - e^{-T} z^{-1})(1 - e^{-2T} z^{-1})}$$

## 2.2. Conception basée sur la solution numérique des équations différentielles

Une méthode de conception des filtres numériques consiste à approximer les dérivées dans l'équation différentielle (1) par des différences finies.

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M d_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k} \quad (5)$$

$$\left. \frac{dy_a(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T} = \Delta^{(1)}[y(n)] \quad (6)$$

avec  $y(n)=y_a(nT)$

Les approximations des dérivées d'ordre supérieur à 1 sont obtenues en appliquant successivement (2)

$$\left. \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} \right|_{t=nT} = \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{k-1} y_a(t)}{dt^{k-1}} \right) \right|_{t=nT}$$

$$\Delta^{(k)}[y(n)] = \Delta^{(1)}[\Delta^{(k-1)}[y(n)]]$$

avec

$$\Delta^{(0)}[y(n)] = y(n)$$

On obtient alors l'équation suivante :

$$\sum_{k=0}^N c_k \Delta^{(k)}[y(n)] = \sum_{k=0}^M d_k \Delta^{(k)}[x(n)] \quad (7)$$

où  $y(n) = y_a(nT)$  et  $x(n) = x_a(nT)$

L'opérateur  $\Delta^{(1)}[\cdot]$  est un système linéaire invariant et donc  $\Delta^{(k)}[\cdot]$  peut être considéré comme  $k$  opérateurs  $\Delta^{(1)}[\cdot]$  en cascade. Soit donc :

$$TZ[\Delta^{(1)}[x(n)]] = TZ\left[\frac{x(n) - x(n-1)}{T}\right] = \frac{1 - z^{-1}}{T} X(z)$$

et

$$TZ[\Delta^{(k)}[x(n)]] = \left[\frac{1 - z^{-1}}{T}\right]^k X(z)$$

Soit donc

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M d_k \left[\frac{1 - z^{-1}}{T}\right]^k}{\sum_{k=0}^N c_k \left[\frac{1 - z^{-1}}{T}\right]^k} \quad (8)$$

En comparant (8) à la fonction de transfert du filtre analogique (1), on remarque que la fonction de transfert du filtre numérique peut être obtenu directement à partir de la fonction de transfert du filtre analogique en posant

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (9)$$

Le remplacement des dérivées par des différences consiste donc en une correspondance du plan P au plan Z. L'axe imaginaire du plan P doit correspondre au cercle unité du plan Z et les filtres analogiques stables doivent correspondre à des filtres numériques stables.

En utilisant (9), on peut exprimer z en fonction de p :

$$z = \frac{1}{1 - pT}$$

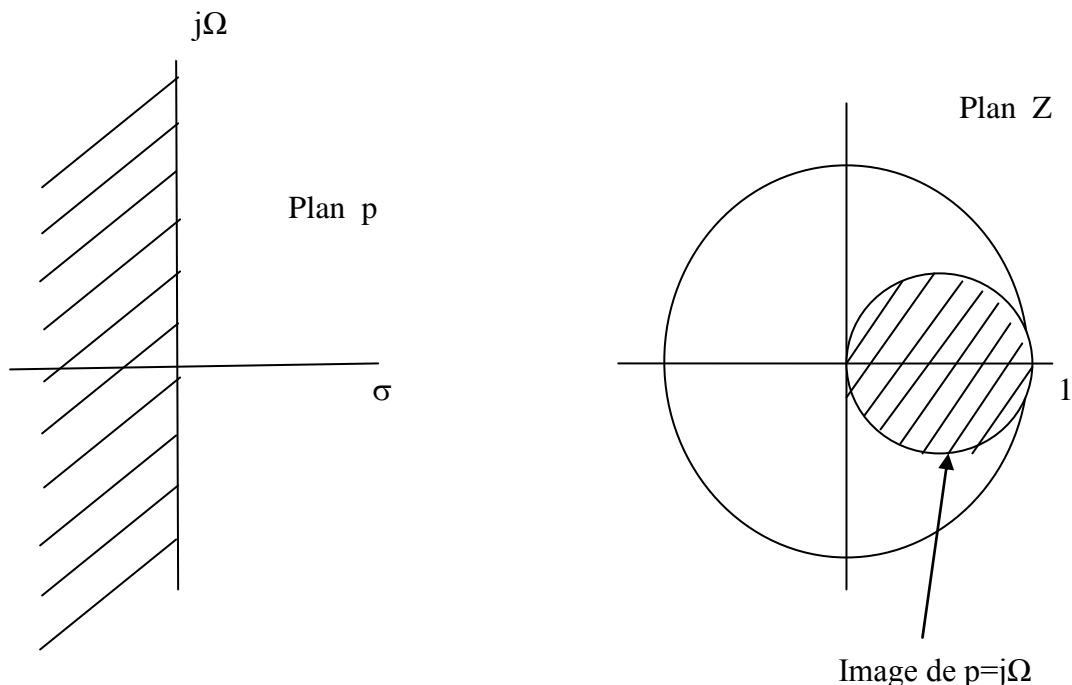
En posant  $p = j\Omega$ , il vient :

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T} \quad (10)$$

Puisque  $|z|=1$  pour toutes les valeurs de  $\Omega$  dans (10), on déduit que l'image de l'axe  $j\Omega$  (axe imaginaire) du plan P n'est autre que le cercle unité dans le plan Z. L'équation (10) peut être écrite sous forme :

$$z = \frac{1}{2} \frac{2}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{2} \frac{1 - j\Omega T + 1 + j\Omega T}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1 + j\Omega T}{1 - j\Omega T} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + e^{j2tg^{-1}(\Omega T)} \right] \quad (11)$$

L'équation (11) correspond à un cercle de centre  $z=1/2$  et de rayon  $1/2$ . Le demi-plan P correspond à l'intérieur du cercle et le demi-plan de droite correspond à l'extérieur du cercle. La correspondance de l'axe  $j\Omega$  au cercle unité n'est pas satisfaite mais le filtre numérique obtenu est stable puisque les pôles du demi-plan gauche correspondent à l'intérieur du petit cercle qui est à l'intérieur du cercle unité.



**Figure 3 :** Correspondance entre le plan P et le plan Z du filtre numérique synthétisé par la résolution numérique des équations différentielles.

### 2.1.3. Transformation bilinéaire

Une approche alternative consiste à intégrer l'équation différentielle et utiliser une approximation de l'intégrale. Pour un filtre analogique caractérisé par une équation différentielle du premier ordre, on a :

$$c_1 \dot{y}_a(t) + c_0 y_a(t) = d_0 x_a(t) \quad (12)$$

où  $\dot{y}_a(t) = \frac{dy_a(t)}{dt}$

La fonction de transfert du système est :

$$H_a(p) = \frac{d_0}{c_1 p + c_0}$$

On peut écrire  $y_a(t)$  comme l'intégrale de  $\dot{y}_a(t)$

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t \dot{y}_a(\tau) d\tau + y_a(t_0)$$

Si  $t=nT$  et  $t_0=(n-1)T$ , on obtient :

$$y_a(nT) = \int_{(n-1)T}^{nT} \dot{y}_a(\tau) d\tau + y_a((n-1)T)$$

Si on utilise une approximation trapézoïdale de l'intégrale, on obtient :

$$y_a(nT) = y_a((n-1)T) + \frac{T}{2} [\dot{y}_a(nT) + \dot{y}_a((n-1)T)] \quad (13)$$

A partir de (12), on peut écrire :

$$\dot{y}_a(nT) = -\frac{c_0}{c_1} y_a(nT) + \frac{d_0}{c_1} x_a(nT)$$

Remplaçons  $\dot{y}_a(nT)$  dans (13), il vient :

$$y(n) - y(n-1) = \frac{T}{2} \left[ -\frac{c_1}{c_0} (y(n) + y(n-1)) + \frac{d_0}{c_1} (x(n) + x(n-1)) \right] \quad (14)$$

où  $y(n)=y_a(nT)$  et  $x(n)=x_a(nT)$

En prenant la TZ des deux membres, il vient :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{d_0}{c_1 \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c_0} \quad (15)$$

A partir de l'équation (11), on observe que  $H(z)$  est obtenu à partir de  $H_a(p)$  en posant :

$$p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (16)$$

Soit

$$H(z) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} \quad (17)$$

Cette transformation est applicable pour un ordre N quelconque de l'équation différentielle.

A partir de (16), on peut exprimer z en fonction de p :

$$z = \frac{\frac{1+T}{2}p}{\frac{1-T}{2}p}$$

La transformation inversible (16) est appelée transformation bilinéaire. Cette transformation fait correspondre à l'axe imaginaire du plan P le cercle unité du plan Z.

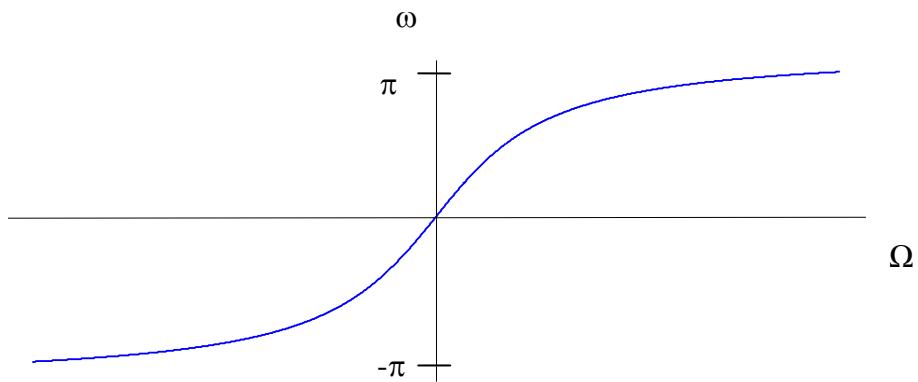
Soit  $z=e^{j\omega}$ , à partir de (16), on obtient :

$$p = \frac{2(1-e^{-j\omega})}{T(1+z^{-j\omega})} = \frac{2}{T} \frac{j \sin \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\omega}{2}} = \frac{2}{T} j \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sigma + j\Omega$$

Donc, pour z sur le cercle unité ( $z=e^{j\omega}$ ),  $\sigma=0$  et  $\Omega$  et  $\omega$  sont reliés par :

$$\frac{\Omega T}{2} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (18)$$

La figure suivante montre que les images des parties positives et négatives de l'axe imaginaire du plan P sont, respectivement, les demi-cercles unité supérieur et inférieur du plan Z.



**Figure 4 :** Relation entre la fréquence du filtre analogique et la fréquence du filtre numérique.

Le demi-plan gauche du plan P correspond à l'intérieur du cercle unité et le demi-plan P de droite correspond à l'extérieur du cercle unité.

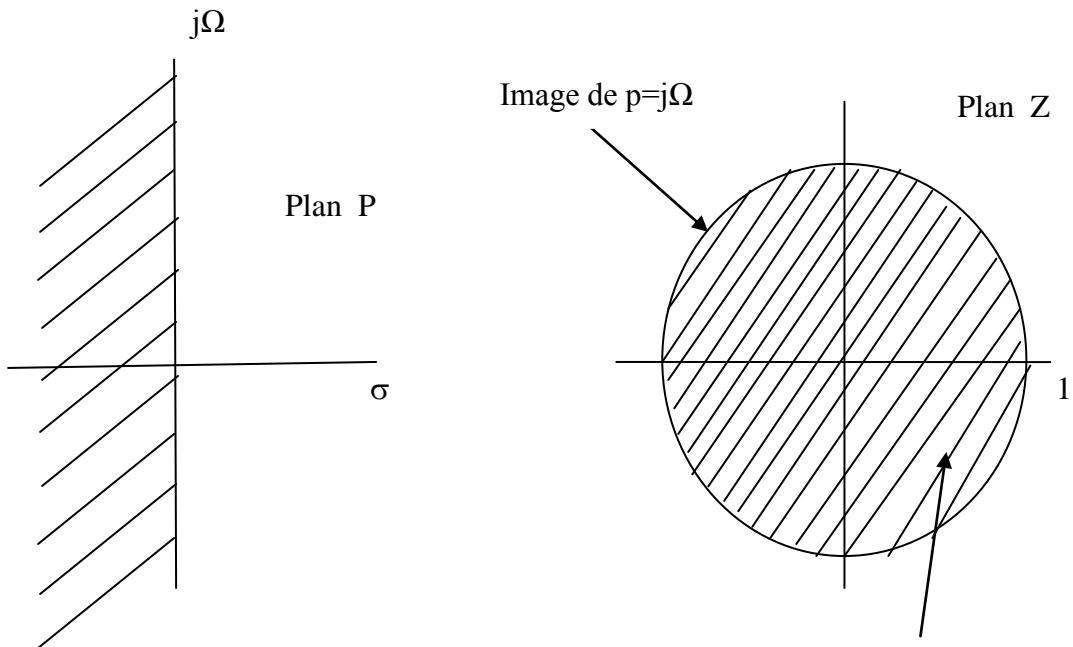


Image du demi-plan gauche

**Figure 5 :** Correspondance entre le plan P et le plan Z pour un filtre numérique synthétisé par la transformation bilinéaire.

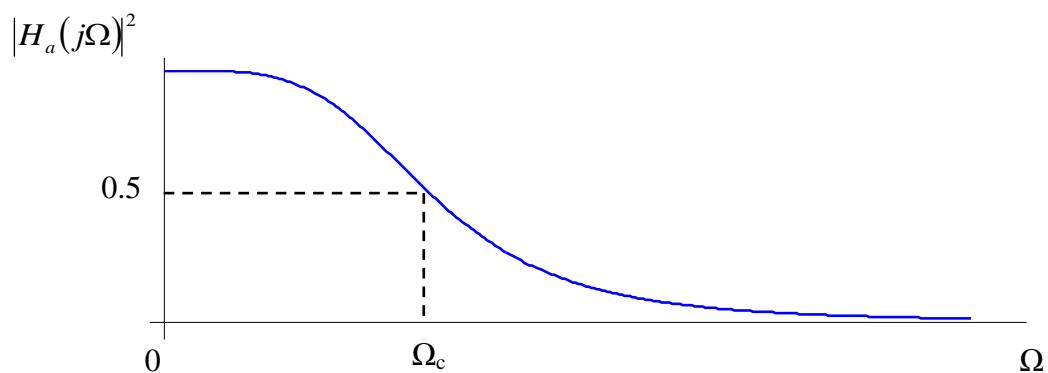
## 2.2. Filtres analogiques types

Les fonctions modèles utilisées pour le calcul des filtres analogiques sont caractérisées par la propriété de sélectivité. Les fonctions les plus utilisées sont les fonctions de Butterworth, Chebyshev et les fonctions elliptiques.

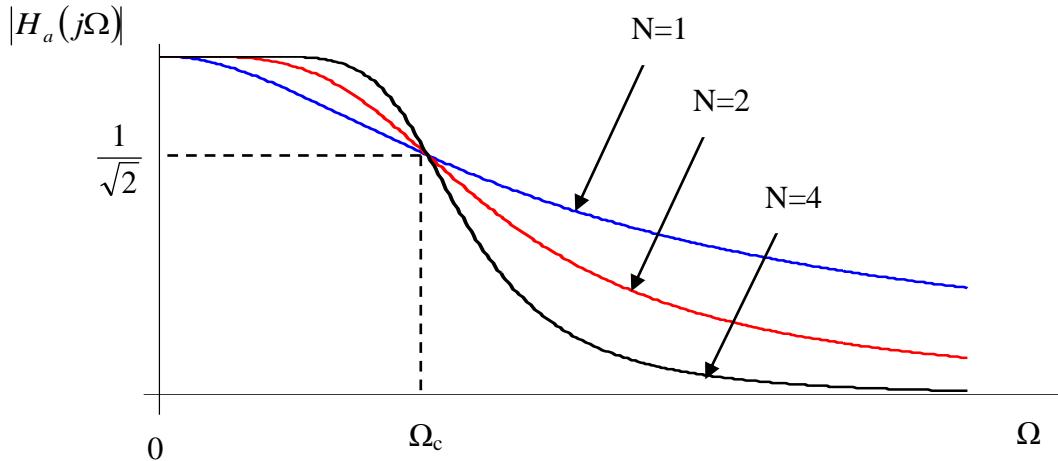
### 2.2.1. Filtres de Butterworth

Le carré du module de la réponse en fréquence d'un filtre de Butterworth analogique d'ordre N est défini par :

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



**Figure 5 :** Carré du module de la réponse en fréquence du filtre de Butterworth



**Figure 6 :** Réponse en fréquence du filtre de Butterworth pour différents ordres.

Pour  $\Omega = \Omega_c$ , on a  $|H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Omega_c$  est la fréquence de coupure à 3 dB

Les filtres de Butterworth sont complètement déterminés par  $N$  et  $\Omega_c$ .

j

$$\text{On a } |H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$H_a(p)$  doit être donc de la forme

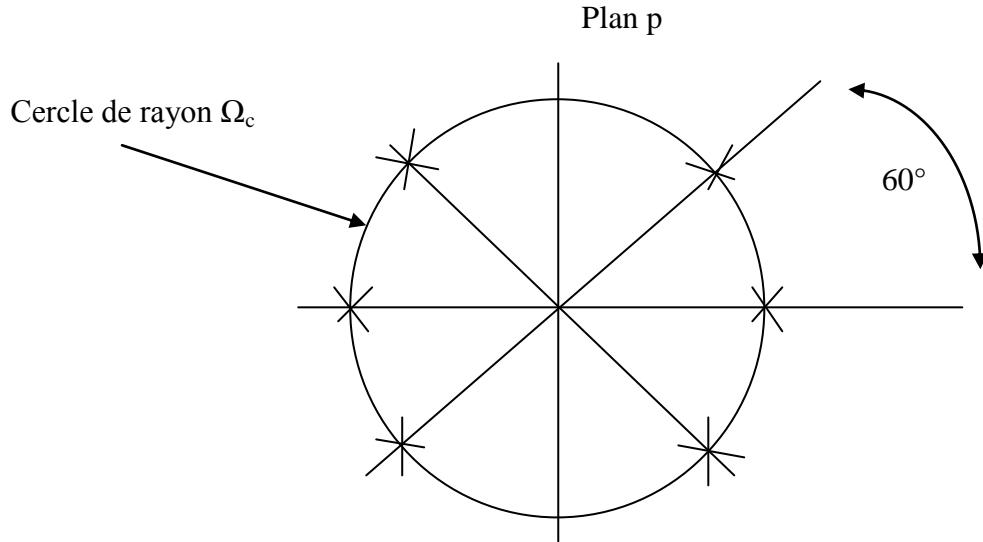
$$H_a(p)H_a(-p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Les pôles de cette fonction sont :

$$p_k = (-1)^{\frac{1}{2N}}(j\Omega_c) \quad (19)$$

Donc, on a  $2N$  pôles à angles également espacés sur le cercle de rayon  $\Omega_c$  dans le plan P. Ces pôles sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire. L'espacement angulaire entre 2 pôles est  $\frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N}$ .

Pour déterminer la fonction de transfert du filtre analogique correspondant au carré du module, on doit effectuer la factorisation  $H_a(p)H_a(-p)$ . Les pôles du carré du module de la fonction de transfert de Butterworth sont organisés par pairs : si on a un pôle en  $p=p_k$  alors on a un pôle en  $p=-p_k$ . Donc, pour construire  $H_a(p)$  à partir du carré du module, on peut choisir un pôle de chaque paire. Si on impose la stabilité du filtre, ces pôles doivent correspondre aux pôles situés dans le demi-plan gauche du cercle de Butterworth.



**Figure 7 :** Organisation des pôles dans le plan P pour un filtre de Butterworth d'ordre N=3.

### Exemple

On veut synthétiser un filtre numérique passe bas de Butterworth ayant les spécifications suivantes :

Fréquence d'échantillonnage : 10000 Hz

Bande passante : de 0 à 1000 Hz avec une oscillation de moins de 1 dB

Domaine d'arrêt : de 1500 Hz à 5000 Hz supérieur à 15 dB

Passons au domaine des fréquences angulaires  $0 \leq \omega \leq \pi$

$$5000 \text{ Hz} \rightarrow \omega = \pi$$

$$1000 \text{ Hz} \rightarrow \omega_1 = 0.2\pi$$

$$1500 \text{ Hz} \rightarrow \omega_1 = 0.3\pi$$

Donc, les spécifications sont :

$$0 \leq \omega \leq \omega \quad 0 \geq 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| \geq -1$$

$$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| \leq -15$$

Le modèle analogique est un filtre de Butterworth d'ordre N

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Les fréquences caractéristiques du filtre analogique sont obtenues en utilisant la relation (17)

$$\Omega_1 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} 18^\circ$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} 27^\circ$$

Choisissons  $T=1$ , ce qui donne

$$\begin{cases} \Omega_1 = 0.65 \\ \Omega_2 = 1.019 \end{cases}$$

Les paramètres  $N$  et  $\Omega_c$  sont déterminés par :

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \left( \frac{0.65}{\Omega_c} \right)^{2N} = 10^{0.1} \\ 1 + \left( \frac{0.65}{\Omega_c} \right)^{2N} = 10^{1.5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \frac{0.65}{1.019} \right)^{2N} = \frac{10^{0.1} - 1}{10^{1.5} - 1}$$

$$\text{Soit donc } 2N = \frac{\log \left( \frac{10^{0.1} - 1}{10^{1.5} - 1} \right)}{\log \left( \frac{0.65}{1.019} \right)} = 10.6161$$

Ce qui donne  $N=5.3$ . On choisit donc  $N=6$  et  $\Omega_c=0.76622$  de façon à réaliser exactement le domaine d'arrêt à 15 dB.

Calcul des pôles

Les pôles sont donnés par (19)

$$p_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c)$$

$$\text{Racines de } -1 : -1 = e^{j\pi} = x^{2N} \rightarrow x = e^{j\left(\frac{\pi}{2N} + k\frac{2\pi}{2N}\right)}$$

Soit donc, pour  $N=6$  :

$$p_k = j\Omega_c e^{j\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}\right)}, \quad k=0, 1, \dots, 11$$

On prend uniquement les pôles à partie réelle négative :

$$p_0 = -0.1983 + j0.7401$$

$$p_1 = -0.5418 + j0.5418$$

$$p_2 = -0.7401 + j0.1983$$

$$p_3 = -0.7401 - j0.1983$$

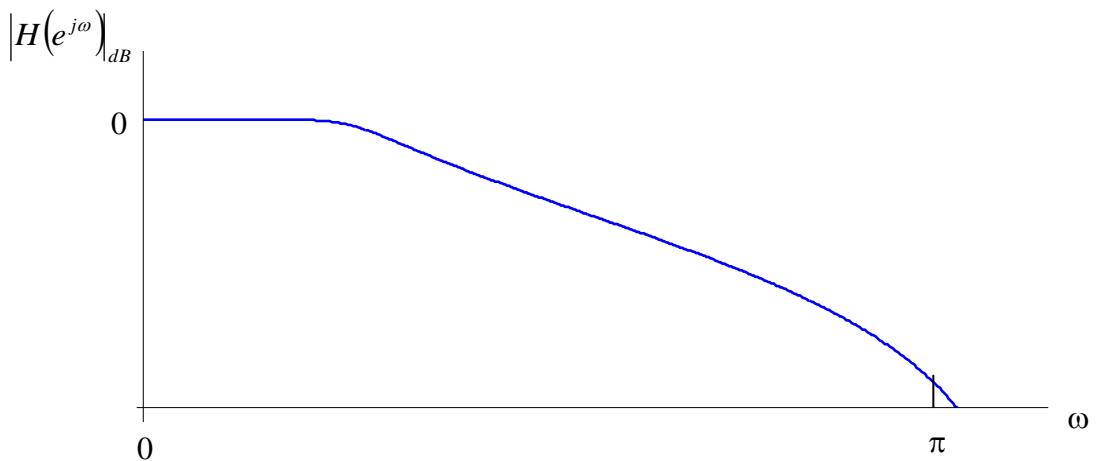
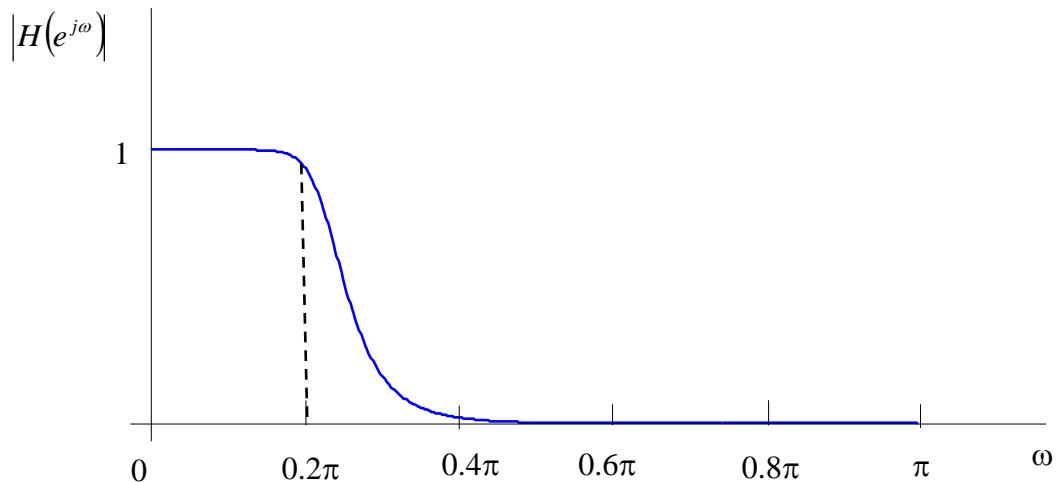
$$p_4 = -0.7401 - j0.5418$$

$$p_5 = -0.1983 - j0.7401$$

$$\Omega_c^N = 0.76622^6 = 0.2024$$

En remplaçant  $p$  par  $2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ , on obtient :

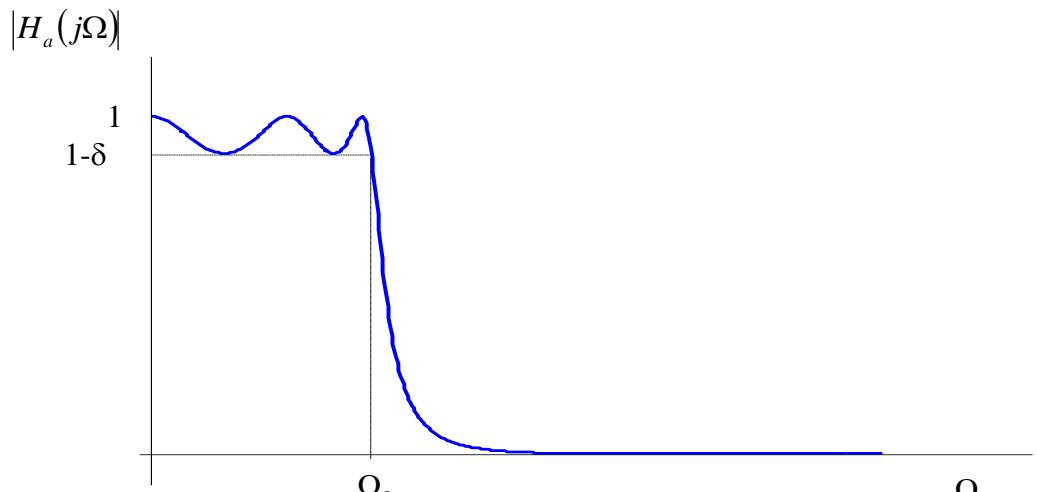
$$H(z) = \frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$



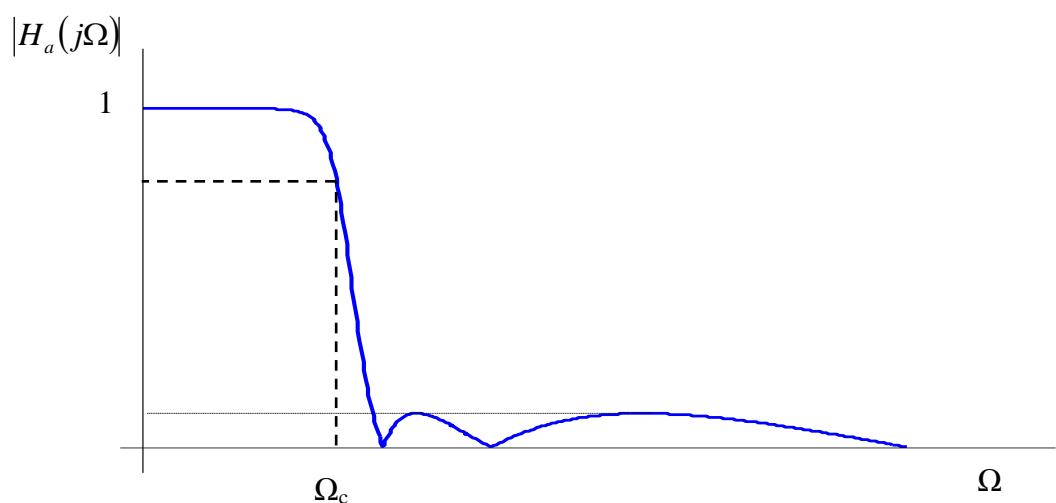
**Figure 8 :** Réponse en fréquence du filtre numérique synthétisé par la transformation linéaire.

### 2.2.2 Filtres de Chebyshev

Les filtres de Chebyshev sont caractérisés une réponse en fréquence en module qui oscille entre une valeur minimale et une valeur maximale dans la bande passante et monotone dans la bande d'arrêt (Type I) ou monotone dans la bande passante et oscillante entre une valeur minimale et une valeur maximale dans la bande d'arrêt.



Filtre de Chebyshev type I



Filtre de Chebyshev type II

**Figure 9 :** Réponses en fréquence du filtre de Chebyshev de type I et II.

Le carré du module de la fonction de Chebyshev est donné par :

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2 \left( \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)} \quad (20)$$

où  $V_N(x)$  est le polynôme de Chebyshev d'ordre  $N$  défini par :

$$V_N(x) = \cos(N \cos^{-1}(x)) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} N=0 \quad V_N(x) &= 1 \\ N=1 \quad V_N(x) &= \cos(\cos^{-1}(x)) \\ N=2 \quad V_N(x) &= \cos(2\cos^{-1}(x)) = 2x - 1 \end{aligned}$$

En appliquant les formules trigonométriques au polynôme de Chebyshev, on peut démontrer la formule de récurrence suivante :

$$V_{N+1}(x) = 2xV_N(x) - V_{N-1}(x) \quad (22)$$

Le filtre de Chebyshev est complètement spécifié par  $\varepsilon$ ,  $\Omega_c$  et  $N$ . En pratique,  $\varepsilon$  est spécifié par l'ondulation autorisé dans la bande passante et  $\Omega_c$  par la fréquence de coupure souhaitée. L'ordre  $N$  est choisi de sorte à satisfaire les spécifications dans la bande atténuee.

Les pôles du filtre de Chebyshev sont localisés sur une ellipse dans le plan P. Le rayon de l'axe mineur est  $a\Omega_c$ , avec  $a = \frac{1}{2} \left( \alpha^{\frac{1}{N}} - \alpha^{-\frac{1}{N}} \right)$ ,  $\alpha = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1 + \varepsilon^2}$

Le rayon de l'axe majeur est  $b\Omega_c$ , avec  $b = \frac{1}{2} \left( \alpha^{\frac{1}{N}} + \alpha^{-\frac{1}{N}} \right)$ ,

### 2.2.3. Filtres elliptiques ou de Cauer

Dans les filtres de Butterworth et de Chebyshev, l'erreur décroît de manière monotone dans la bande atténuee. Il est possible d'améliorer la réponse en fréquence en distribuant l'erreur uniformément dans la bande atténuee.

Ce type de filtres à ondulations dans la bande passante et la bande atténuee est optima pour un ordre de filtre  $N$  donné, pour des valeurs données de  $\Omega_p$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , la bande de transition ( $\Omega_s - \Omega_p$ ) est plus petite possible. Une telle approximation est donnée pour les filtres analogiques par :

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\Omega)}$$

où  $U_N(\Omega)$  est la fonction Jacobienne elliptique.

### 2.2.4. Transformation fréquentielle des filtres RII passe bas

Les exemples présentés précédemment concernent les méthodes de conception des filtres RII passe bas. Il existe deux méthodes pour concevoir les autres types de filtres (passe haut, passe band, coupe bande).

#### Première méthode :

1. Concevoir un prototype analogique passe bas à fréquence normalisée.
2. Obtenir par une transformation algébrique la réponse en fréquence désirée : passe bas, passe haut, passe band ou coupe bande à partir du prototype passe bas.

3. Transformer le filtre analogique obtenu en (2) en un filtre numérique en utilisant l'une des transformations présentées.

L'inconvénient de cette méthode est qu'on ne peut pas transformer les filtres passe haut et coupe bande en utilisant la méthode d'invariance impulsionale à cause du problème de recouvrement qui peut en résulter.

**Deuxième méthode :**

1. Concevoir un prototype de filtre numérique passe bas.
2. Appliquer une transformation au filtre numérique passe bas pour obtenir le filtre numérique ayant la réponse en fréquence désirée.

Cette approche peut être appliquée indépendamment de la procédure utilisée dans la conception du filtre numérique passe bas.

Les transformations du filtre numérique passe bas au filtre numérique désirée sont données dans le tableau suivant.

### Transformations fréquentielles des filtres RII passe bas

Transformation à partir d'un filtre prototype passe bas de fréquence de coupure  $\theta_p$ .  
 $z$  : variable complexe associée à la fonction de transfert  $H_p(z)$  du filtre numérique passe bas.

$Z$  : variable complexe associée à la fonction de transfert  $H_d(Z)$  du filtre numérique désiré.

Type de filtre	Transformation	Formules associées
Passe bas	$z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p}{2}\right)}$ $\omega_p : \text{fréquence de coupure désirée}$
Passe haut	$z^{-1} = -\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_p + \theta_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_p - \theta_p}{2}\right)}$ $\omega_p : \text{fréquence de coupure désirée}$
Passe bande	$z^{-1} = \frac{-Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)}$ $k = \cot g\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_p}{2}\right)$ $\omega_1 \text{ et } \omega_2 : \text{fréquences de coupure et haute désirées}$
Coupe bande	$z^{-1} = \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}Z^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+k}Z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)}$ $k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_p}{2}\right)$ $\omega_1 \text{ et } \omega_2 : \text{fréquences de coupure et haute désirées}$