

Chapitre 5. Filtres numériques multicadences

1. Interpolation et suréchantillonnage

Dans plusieurs applications telles que l'interconnexion numérique des systèmes de traitement fonctionnant à des rythmes différents on opère à des changements de la fréquence d'échantillonnage. L'augmentation de la fréquence d'échantillonnage se fait par interpolation qui consiste à insérer des échantillons supplémentaires entre les échantillons du signal original à faible taux d'échantillonnage. Les échantillons insérés sont calculés en utilisant un filtre à réponse impulsionnel finie (FIR). La figure 1 illustre processus de suréchantillonnage d'un facteur de 4.

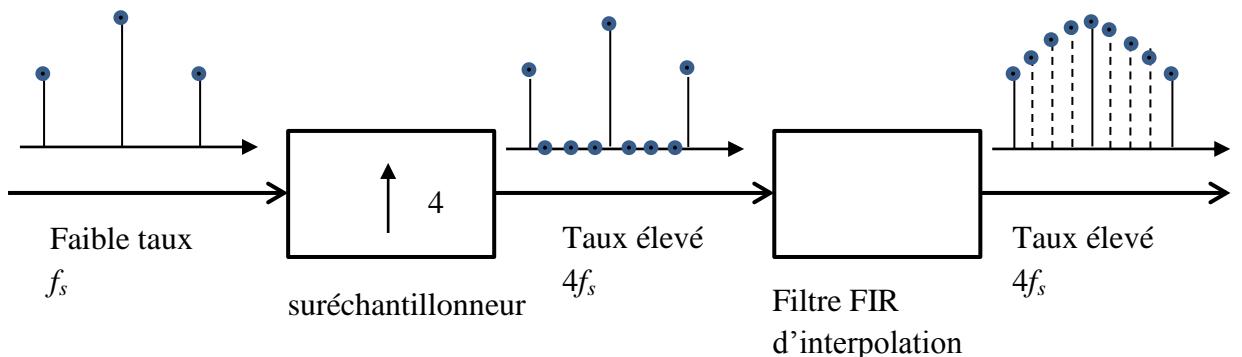


Figure 1 : Augmentation de la fréquence d'échantillonnage par interpolation.

Le filtre interpolateur est parfois appelé filtre numérique de suréchantillonnage car il fonctionne à un taux d'échantillonnage de $4fs$. Cependant, comme un seul échantillon sur quatre est non nul, les opérations de filtrage requises peuvent être réorganisées de telle manière à fonctionner uniquement sur les échantillons à faible débit, réduisant ainsi efficacement le temps de calcul du filtre par un facteur quatre dans ce cas.

Ceci est réalisé en remplaçant le filtre FIR interpolateur à haut débit par quatre sous filtres FIR plus courts, appelés appelés filtres polyphasés, fonctionnant au faible débit f_s . La longueur de chaque sous-filtre correspond au quart de celle du filtre d'origine. Parce que chaque échantillon d'entrée à faible débit génère quatre sorties interpolées à haut débit (elle-même et trois autres), chacun des quatre sous-filtres à faible débit est dédié au calcul d'une seule des quatre sorties. Une telle réalisation est efficace sur en termes de complexité de calcul et se prête naturellement aux implémentations matérielles multiprocesseurs parallèle dans lesquelles une puce DSP différente peut être utilisée pour implémenter chaque sous-filtre.

Une application intéressante de l'interpolation est l'utilisation de filtres numériques de suréchantillonnage dans les lecteurs CD où ils contribuent à réduire le besoin d'appareils analogiques de haute qualité postfiltres anti-image dans le système de lecture. De plus, chaque échantillon à haut débit peut être requantifié sans perte de qualité sur un nombre inférieur de bits (même aussi bas que 1 bit par échantillon) en utilisant des quantificateurs de mise en

forme du bruit appropriés, échangeant ainsi des bits contre des échantillons et simplifier la structure de la partie analogique du système de lecture.

Considérons un signal analogique échantillonné à une fréquence $f_s = 44,1 \text{ kHz}$ comme pour l'audio numérique. Le signal analogique est préfiltré par un préfiltre anti-repliement passe-bas analogique ayant une fréquence de coupure $f_c \leq f_s/2$ puis échantillonné au taux f_s et quantifié. Cette opération est illustrée à la Figure 2.

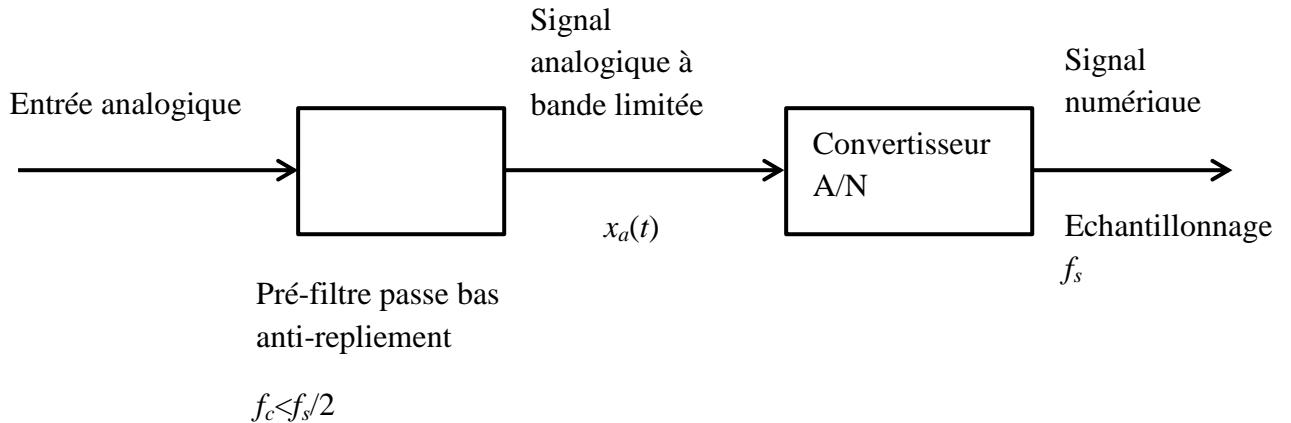


Figure 2: Pré-filtrage et échantillonnage du signal analogique.

Le pré-filtre garantit que les images spectrales générées par le processus d'échantillonnage à des multiples entiers de f_s ne se chevauchent pas, comme l'exige le théorème d'échantillonnage et illustré par la figure 3.

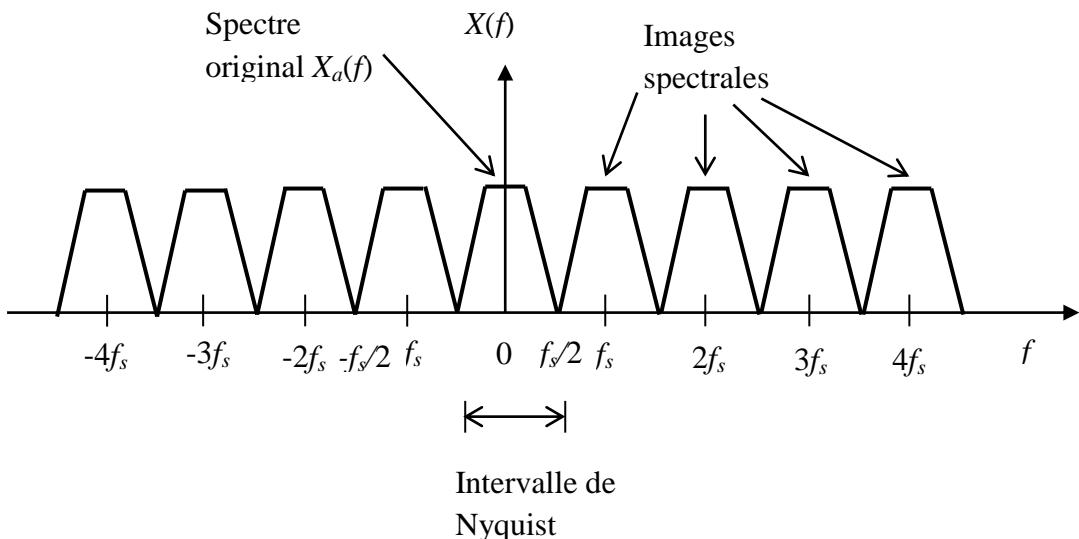


Figure 3 : Spectre du signal échantillonné à une faible fréquence d'échantillonnage f_s .

Après traitement numérique, le signal échantillonné est reconstruit sous forme analogique par un convertisseur N/A sous forme de fonction en escalier suivi d'un post-filtre passe-bas anti-image analogique avec une fréquence de coupure de $f_s/2$ comme le montre la figure 4.

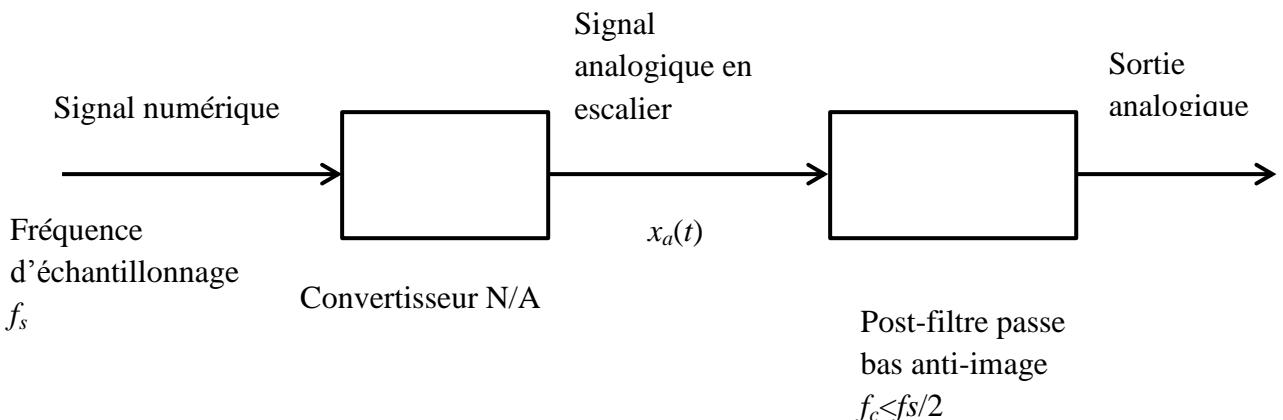


Figure 4 : Reconstruction du signal analogique à partir du signal échantillonné.

Le convertisseur N/A, ayant une réponse impulsionnelle typique $\sin x/x$ supprime les images spectrales partiellement; le post-filtre termine leur suppression. La combinaison du convertisseur N/A en escalier et le post-filtre émule le filtre analogique de reconstruction idéal. Le filtre de reconstruction idéal est un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c=f_s/2$. Il a une bande de transition très raide comme le montre la figure 5.

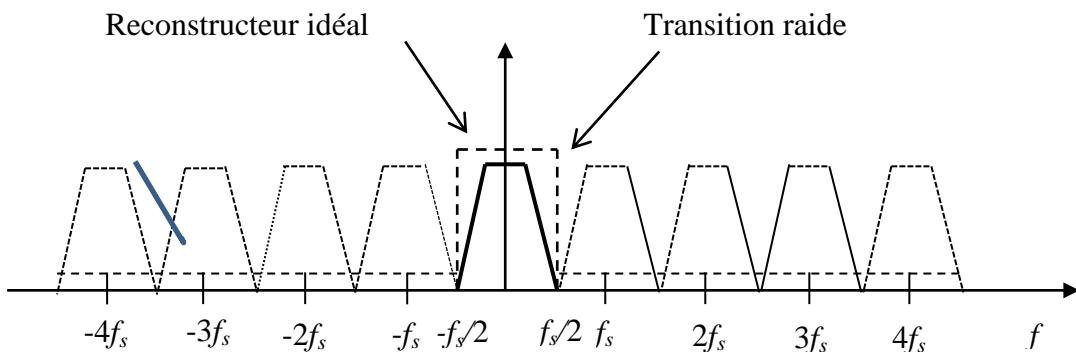


Figure 5 : Suppression des images spectrales.

Dans les applications hi-fi telles que l'audio numérique, pour maintenir une haute qualité du signal analogique reconstruit, un post-filtre analogique de très haute qualité est nécessaire, ce qui peut être coûteux. Une façon de réduire le besoin d'un post-filtre de haute qualité est d'augmenter la fréquence d'échantillonnage. Cela entraînerait une séparation plus large des images spectrales et, par conséquent, nécessite un post-filtre passe-bas moins strict et plus simple. Ceci est représenté dans la Figure 6 pour une nouvelle fréquence d'échantillonnage quatre fois supérieur à celle requise, $f'_s = 4f_s$.

La bande passante du post-filtre s'étend jusqu'à $f_p = f'_s/8 = f_s/2$ mais sa bande d'arrêt ne commence qu'à partir de $f_{stop} = f'_s - f'_s/8 = 7f'_s/8 = 7f_s/8$. C'est cette large région de transition entre la bande passante et la bande d'arrêt qui permet l'utilisation d'un post-filtre moins strict. Par exemple, dans les applications audio numériques suréchantillonnées, un simple post-filtre analogique de Butterworth ou de Bessel de troisième ordre est utilisé.

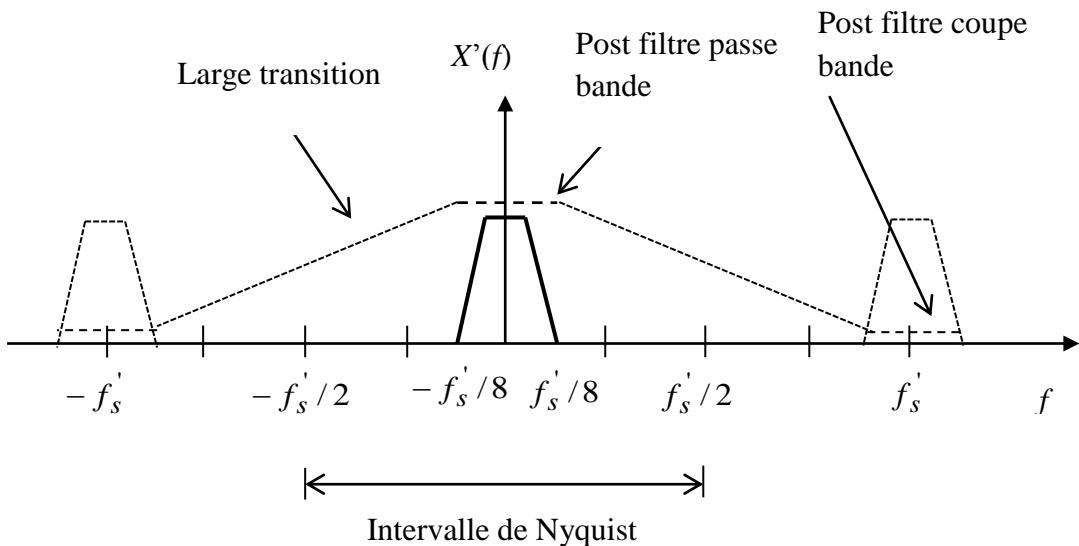


Figure 6 : Augmentation de la largeur de séparation de images spectrale par augmentation de la fréquence d'échantillonnage.

La figure 7 montre la sortie analogique en escalier du convertisseur N/A pour deux fréquences d'échantillonnage f_s et $f_s' = 4f_s$. Plus le taux d'échantillonnage est élevé, plus l'escalier approxime mieux le signal réel et plus il est facile pour le post-filtre de lisser les niveaux d'escalier.

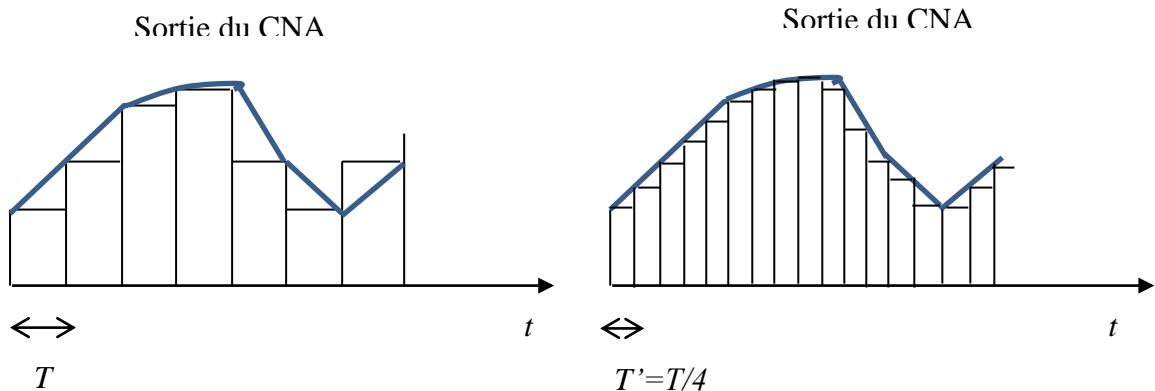


Figure 7 : Lissage de la sortie du CNA par suréchantillonnage.

L'approche précédente n'est pas pratique car elle nécessite un véritable rééchantillonnage du signal analogique au taux le plus élevé f_s . Par exemple, dans un lecteur CD, les échantillons de faible débit sont déjà stockés sur le CD à la fréquence prescrite de 44.1 kHz et le signal audio ne peut pas être rééchantillonné.

La philosophie du suréchantillonnage consiste à augmenter numériquement la fréquence d'échantillonnage à l'aide d'un filtre d'interpolation qui fonctionne uniquement sur les échantillons d'entrée disponibles à faible débit. Par rapport à la nouvelle fréquence d'échantillonnage f_s' et le nouvel intervalle de Nyquist $(-f_s'/2, f_s'/2)$, le spectre des échantillons à bas débit sera comme montré sur la figure 8.

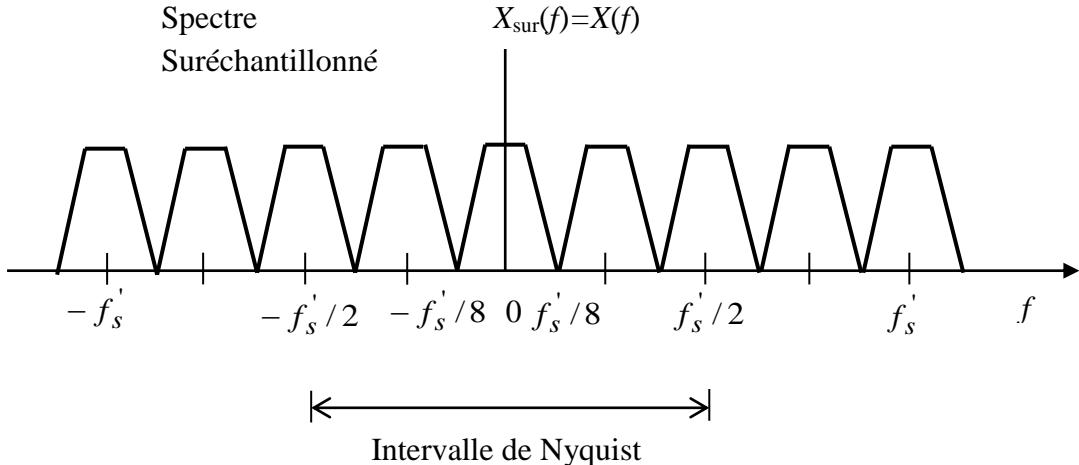


Figure 8 : Spectre des échantillons à bas débit par rapport à la fréquence d'échantillonnage élevée.

Un filtre FIR passe-bas numérique ayant une fréquence de coupure $f_s'/8$ et fonctionnant à la fréquence élevé f_s' éliminerait les trois répliques spectrales qui se trouvent entre les répliques à des multiples de f_s' résultant en un spectre identique à celui d'un signal échantillonné à une fréquence élevée f_s' .

Le système global est représenté par la figure 9.

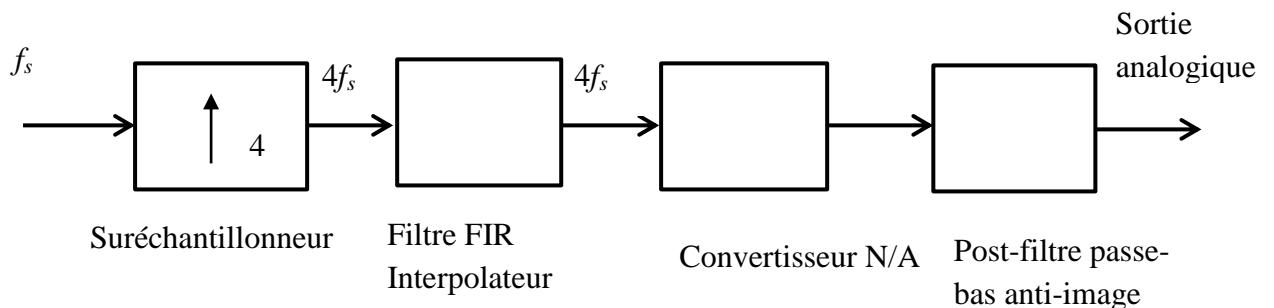


Figure 9 : Illustration de la reconstruction du signal analogique après filtrage numérique à suréchantillonnage 4 fois la fréquence initiale.

Pour illustrer le type d'opérations qu'il doit effectuer, considérons un interpolateur quadruple et un ensemble de six échantillons successifs à faible débit $\{A, B, C, D, E, F\}$ comme indiqué sur la figure 10.

$Y \quad Z \quad D$

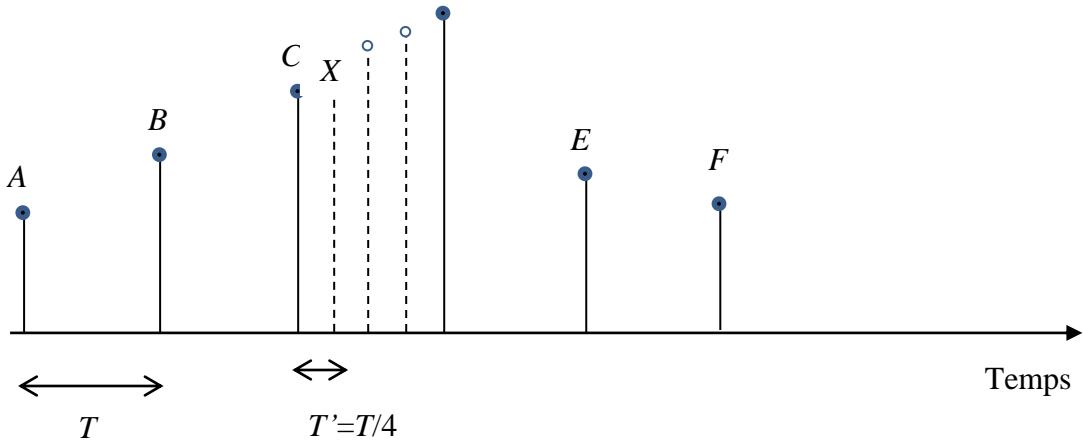


Figure 10 : Calcul des valeurs des échantillons par le filtre d'interpolation

Le filtre calcule trois échantillons intermédiaires, tels que {X, Y, Z}, entre deux échantillons à faible débit en formant des combinaisons linéaires des échantillons à faible débit voisins. Selon le type d'interpolateur et la qualité souhaitée des valeurs calculées, plusieurs différentes manières de calculer {X, Y, Z} sont possibles. Par exemple, le plus simple est de garder la valeur de l'échantillon précédent C constante tout au long de l'intervalle d'échantillonnage et définir :

$$X=Y=Z=C$$

Ce choix correspond à ce que l'on appelle l'interpolator avec maintien ou bloqueur d'ordre zéro. Une autre possibilité simple consiste à interpoler linéairement entre les échantillons {C,D} en calculant {X, Y, Z} comme suit :

$$\begin{aligned} X &= 0.75C + 0.25D \\ Y &= 0.50C + 0.50D \\ Z &= 0.25C + 0.75D \end{aligned}$$

En effet, la droite reliant C et D est paramétrée comme $C+(D-C)t/T$, pour $0 \leq t \leq T$. En posant $t = T/4, 2T/4, 3T/4$ avec $T = T/4$ donne les expressions ci-dessus pour {X, Y, Z}. Pour une interpolation plus précise, davantage d'échantillons environnants doivent être pris en compte. Par exemple, en utilisant quatre échantillons, nous avons :

$$\begin{aligned} X &= -0.18B + 0.90C + 0.30D - 0.13E \\ Y &= -0.21B + 0.64C + 0.64D - 0.21E \\ Z &= -0.13B + 0.30C + 0.90D - 0.18E \end{aligned}$$

correspondant à une approximation FIR de longueur 17 du filtre d'interpolation idéal. De la même manière, une approximation de longueur 25 de l'interpolator idéal utilise six échantillons voisins à faible débit comme suit :

$$\begin{aligned} X &= 0.10A - 0.18B + 0.90C + 0.30D - 0.13E + 0.08F \\ Y &= 0.13A - 0.21B + 0.64C + 0.64D - 0.21E + 0.13F \\ Z &= 0.08A - 0.13B + 0.30C + 0.90D - 0.18E + 0.10F \end{aligned}$$

En général, plus on utilise des échantillons voisins, plus les valeurs calculées sont précises. Dans les lecteurs de CD typiques dotés de filtres de suréchantillonnage 4 fois, environ 20 à 30 des échantillons à faible débit sont utilisés.

Les expressions précédentes sont des cas particuliers des réalisations polyphasées des filtres d'interpolation et sont équivalents à la convolution.

2. Conception du filtre d'interpolation

2.1. Forme directe

Considérons le cas général d'un interpolateur L fois, qui augmente le taux d'échantillonnage par un facteur L , soit $f_s' = Lf_s$. L'extenseur de taux L -fois insère $L-1$ zéros entre des échantillons adjacents à faible débit et les valeurs interpolées $L-1$ correspondantes sont calculées par un filtre numérique FIR fonctionnant au débit élevé Lf_s , comme le montre la Figure 11.

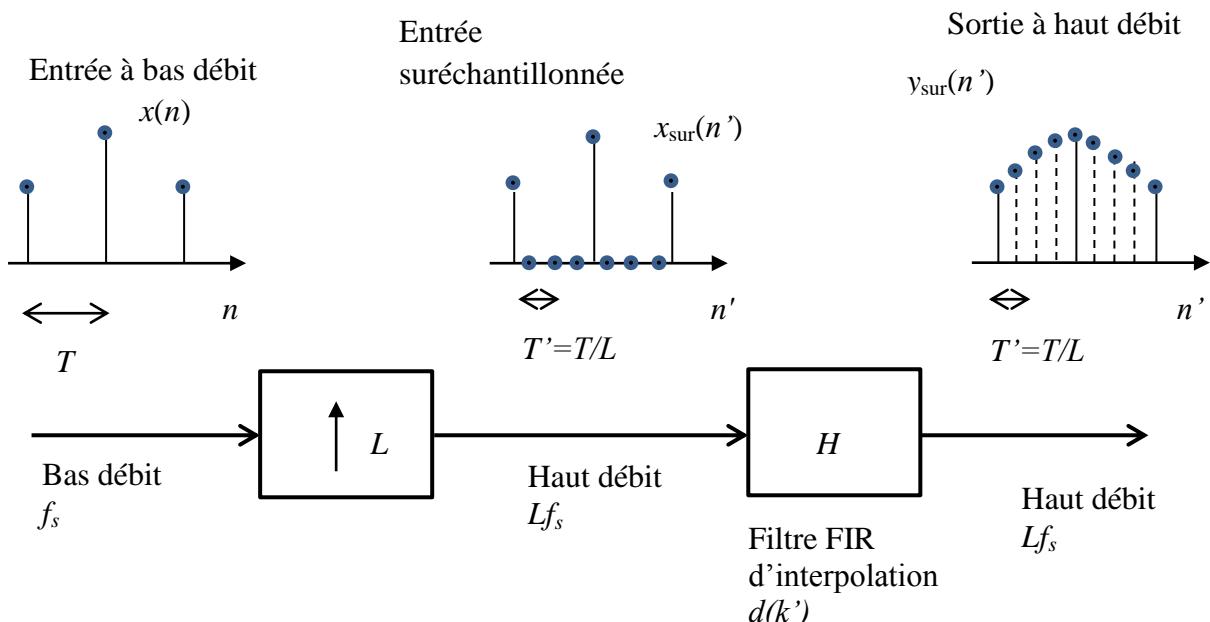


Figure 11 : Interpolateur numérique L fois

Soit les $x(n)$ les échantillons à bas débit appliqués à l'entrée de l'extenseur de taux et soit $x_{\text{sur}}(n')$ sa sortie à haut débit consistant aux échantillons à bas débit séparés par $L-1$ zéros. Par rapport à l'indice temporel n' à haut débit, les échantillons à bas débits se produisent chaque L échantillons à haut débit, c-a-d à des entiers multiple de L , $n'=nL$:

$$x_{\text{sur}}(n)=x(nL)$$

Les échantillons intermédiaires entre $x_{\text{sur}}(nL)$ et $x_{\text{sur}}(NL+L)$ sont nuls.
 $x_{\text{sur}}(nL+i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, L-1$

Ceci est illustré sur la figure 12.

L'interpolateur L fois idéal est un filtre passe bas qui opère à la fréquence échantillonnage élevée f_s' , avec une fréquence de coupure égale à la fréquence de Nyquis à bas débit $f_c = f_s'/2$, ou

$$f_c = \frac{f_s}{2} = \frac{f_s'}{2L}$$

Ou en utilisant la fréquence angulaire $\omega' = 2\pi f / f_s'$

$$\omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s'} = \frac{\pi}{L}$$

La réponse en fréquence de ce filtre est représentée sur la figure 14. Son gain dans la bande passante est égal à L au lieu de 1. Les coefficients de la réponse impulsionnelle idéale sont obtenus à partir de la transformée de Fourier inverse :

$$d(k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D(\omega') e^{jk'\omega'} d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} L e^{jk'\omega'} d\omega' = \frac{\sin(\pi k' / L)}{\pi k' / L}$$

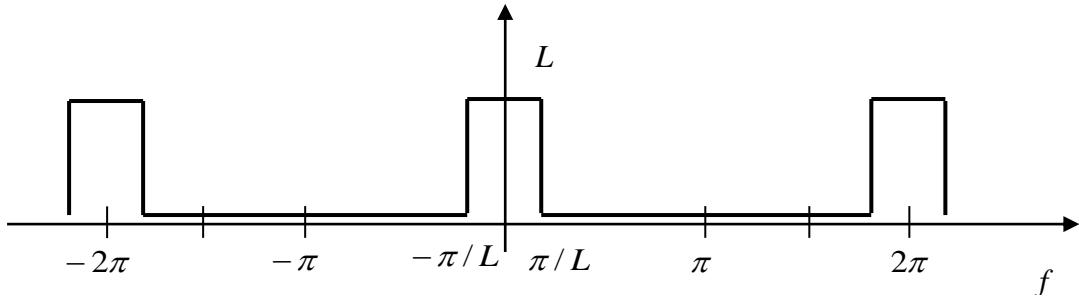


Figure 12 : Filtre passe bas idéal opérant à la fréquence élevée Lf_s .

Une approximation FIR de l'interpolateur est obtenue en tronquant $d(k')$ à une longueur finie $N=2M+1$:

$$d(k') = \frac{\sin(\pi k' / L)}{\pi k' / L}, \quad -M \leq k' \leq M$$

Une version causale du filtre peut être obtenue en le retardant de M échantillons :

$$h(n') = d(n' - LM) = \frac{\sin(\pi(n' - LM) / L)}{\pi(n' - LM) / L}, \quad n' = 0, 1, \dots, N-1$$

et une version pondérée est obtenue par

$$h(n') = w(n')d(n' - LM), n' = 0, 1, \dots, N - 1$$

Où $w(n)$ est une fenêtre de troncature appropriée de longueur N telle que la fenêtre de Hamming :

$$w(n') = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n'}{N-1}\right), \quad n' = 0, 1, \dots, N-1$$

La sortie du filtre d'interpolation idéal est obtenue comme la convolution du signal suréchantillonné $x_{sur}(n')$ avec la réponse impulsionale $d(k')$:

$$y_{sur}(n') = \sum_{k'=-LM}^{LM} d(k')x_{sur}(n' - k'), \quad n' = 0, 1, \dots, N-1$$

2.2. Forme polyphasée

Les valeurs interpolées entre les échantillons à faible débit $x_{sur}(nL)$ et $x_{sur}(nL + L)$, c'est-à-dire que les valeurs aux instants $n' = nL + i$, sont calculées par le filtre comme suit :

$$y_{sur}(nL + i) = \sum_{k'=-LM}^{LM} d(k')x_{sur}(nL + i - k'), \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

En posant $k' = kL + j$, avec $j \leq 0 \leq L-1$, et remplaçant la sommation unique sur k' par une double sommation sur k et j , il vient :

$$y_{sur}(nL + i) = \sum_{k=-M}^M \sum_{j=0}^{L-1} d(kL + j)x_{sur}(nL + i - kL - j), \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

Pour le cas $i = 0$, la somme sur k doit être dans l'intervalle $-M \leq k \leq M$. Mais le terme $k = M$ ne contribue pas à la somme. Définir le i ème sous-filtre polyphasé par :

$$d_i(k) = d(kL + i), \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

Pour $i = 0, 1, \dots, L-1$, on peut réécrire la valeur du i ème échantillon interpolé comme :

$$y_{sur}(nL + i) = \sum_{k=-M}^{M-1} \sum_{j=0}^{L-1} d_j(k)x_{sur}(nL - kL + i - j),$$

Mais le signal d'entrée suréchantillonné est non nul uniquement aux instants multiples de L . Donc

$$x_{res}(nL - kL + i - j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

Donc, en gardant uniquement le terme $i=j$ dans la somme de convolution, on obtient :

$$y_{sur}(nL + i) = \sum_{k=-M}^{M-1} d_i(k)x_{sur}(nL - kL), \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

Ou en fonction des échantillons à bas débit :

$$y_i(nL+i) = \sum_{k=-M}^{M-1} d_i(k)x(n-k), \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

où on a posé $y_i(n)=y_{\text{sur}}(nL+i)$

La i ème valeur interpolée $y_{\text{sur}}(nL+i)$ est calculée par le sous-filtre polyphasé $d_i(k)$ qui a une longueur $2M$ et agit uniquement sur les échantillons d'entrée $x(n)$ à bas débit. Chaque valeur interpolée est calculée comme une combinaison linéaire des M échantillons précédents et des M échantillons suivants à faible débit comme le montre la figure 13.

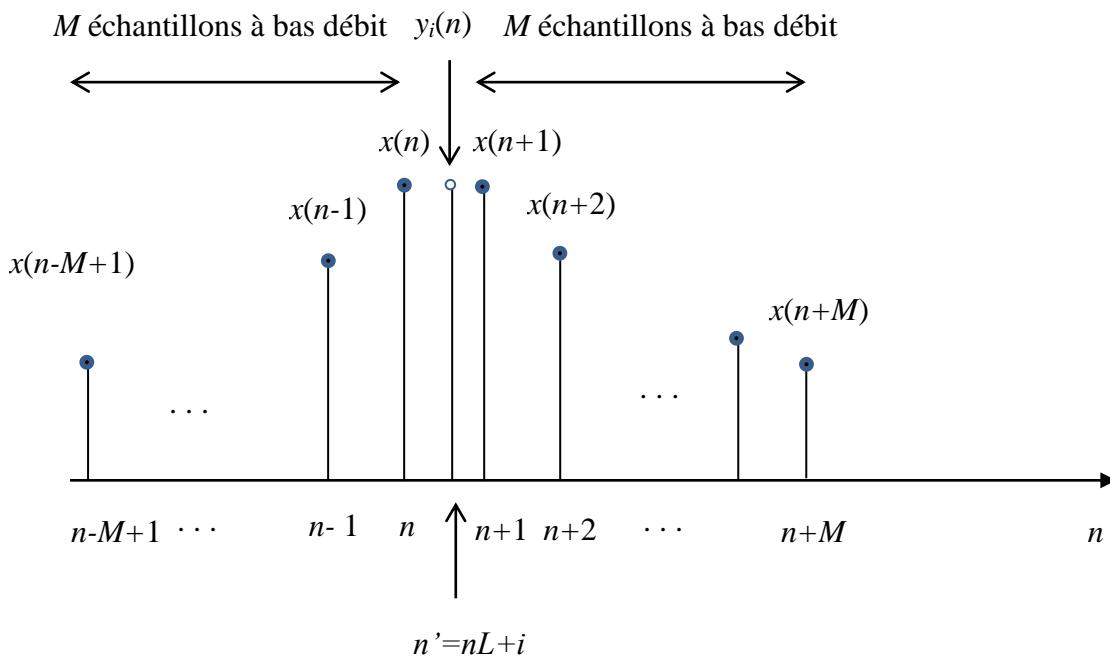


Figure 13: Interpolateur utilisant M échantillons avant et M échantillons après $y_{\text{sur}}(nL+i)$.

En utilisant M sous filtres, l'interpolation est réalisée à un coût de calcul réduit par rapport au coût du filtre d'interpolation complet $d(k')$ de longueur N agissant sur le signal suréchantillonné $x_{\text{sur}}(n')$.

Le coût de calcul de l'équation de la forme directe (12.2.9) est essentiellement des $2LM$ multiplications par valeur interpolée ou $2L^2M$ multiplications pour calculer L valeurs interpolées. En revanche, l'équation de la forme polyphasée nécessite $2M$ multiplications par sous-filtre polyphasé, ou $2LM$ multiplications pour L valeurs interpolées. Ainsi, la mise en œuvre du sous-filtre polyphasé permet d'économiser le calcul d'un facteur de L .

La mise en œuvre polyphasée est illustrée à la Figure 13, où pendant chaque période d'échantillonnage T , le commutateur lit, dans une séquence de $T = T/L$ secondes, les L valeurs interpolées aux sorties des sous-filtres.

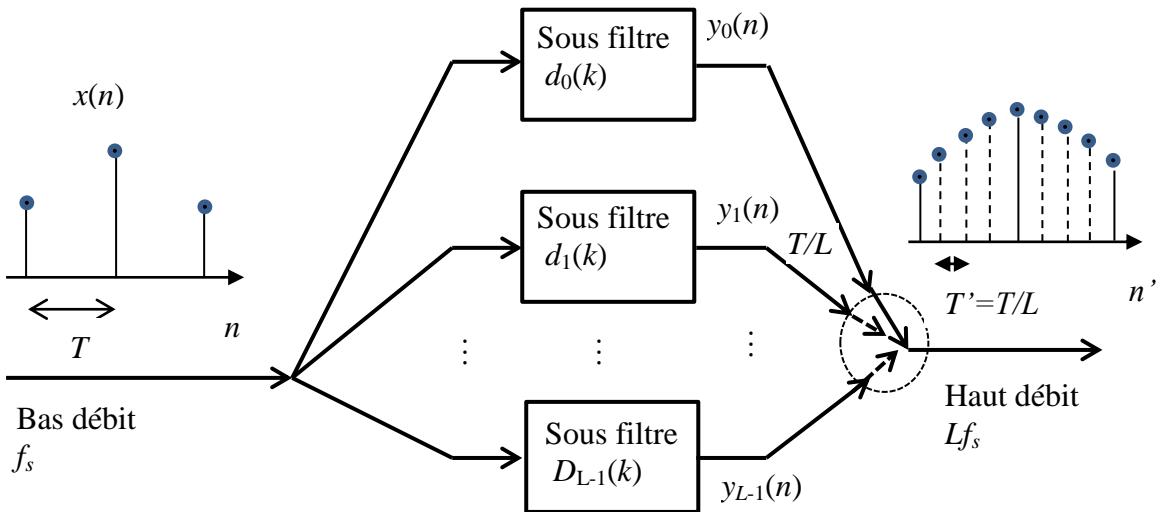


Figure 13 : Forme polyphasée du filtre d'interpolation

Soit ζ^{-1} le délai unité par rapport à la fréquence d'échantillonnage élevée Lf_s et soit z^{-1} le délai unité par rapport à la faible fréquence d'échantillonnage f_s . Puisque L délais à haut débit sont égaux à un délai à bas débit, $LT'=T$, on peut écrire :

$$z = \zeta^L \Rightarrow \zeta = z^{1/L}$$

La transformée en ζ de la sortie du filtre à haut débit $y_{sur}(n')$ peut être exprimée en fonction de la transformée en z des L signaux de sortie à bas débit $y_i(n)$ comme suit. En posant $n'=nL+i$, $0 \leq i \leq L-1$, on a :

$$\begin{aligned} Y_{sur}(\zeta) &= \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} y_{sur}(n') \zeta^{-n'} = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_{sur}(nL+i) \zeta^{-nL-i} \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} \zeta^{-i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_i(n) \zeta^{-nL} \end{aligned}$$

Ou

$$Y_{sur}(\zeta) = \sum_{i=0}^{L-1} \zeta^{-i} Y_i(\zeta^L) = \sum_{i=0}^{L-1} z^{-i/L} Y_i(z)$$

qui montre comment les L signaux de sortie à faible débit sont assemblés, dans la séquence de T/L des retards à haut débit pour constituer le signal de sortie interpolé à haut débit. De la même manière, nous pouvons déduire la relation entre la transformée en ζ du filtre haut débit et les transformées z de ses sous-filtres polyphasés justifiant la réalisation de la figure 13 :

$$D(\zeta) = \sum_{i=0}^{L-1} \zeta^{-i} D_i(\zeta^L) = \sum_{i=0}^{L-1} z^{-i/L} D_i(z)$$

Considérons le 0ème sous-filtre polyphasé, $d_0(k)$, qui joue un rôle particulier. Il découle des équations précédentes que :

$$d_0(k) = d(kL) = \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = \delta(k), \quad -M \leq k \leq M$$

et par conséquent, sa sortie sera trivialement égale à son entrée, c'est-à-dire l'échantillon d'entrée à faible débit $x(n) = x_{\text{sur}}(nL)$. Nous avons de ce qui précède :

$$y_0(n) = y_{\text{sur}}(nL) = \sum_{k=-M}^M d_0(k) x(n-k) = \sum_{k=-M}^M \delta(k) x(n-k) = x(n)$$

Cette propriété est conservée même pour le cas fenêtré car toutes les fenêtres $w(n)$ sont égales à l'unité en leur milieu. Ce résultat justifie l'exigence pour que le gain de bande passante du filtre interpolateur soit L au lieu de 1. Si le gain était de 1, nous aurions $y_{\text{sur}}(nL) = x(n)/L$. L'implémentation du filtre causal exige de retarder la sortie ou avancer l'entrée de M unités. Choisissons ce dernier. Les sous-filtres polyphasés dans les équations peuvent être rendus causaux par un retard de M échantillons à faible débit :

$$h_i(n) = d_i(n-M) = d((n-M)L + i) = d(nL + i - ML), \quad n=0, 1, \dots, 2M-1$$

Pour le cas fenêtré, on :

$$h_i(n) = d(nL + i - ML)w(nL + i), \quad n=0, 1, \dots, 2M-1$$

En termes de sous-filtres causaux $h_i(n)$, il vient :

$$y_i(n) = \sum_{k=-M}^M d_i(k) x(n-k) = \sum_{k=-M}^M h_i(k+M) x(n-k)$$

soit en posant $m=k+M$, $k=m-M$

$$y_i(n) = \sum_{m=0}^P h_i(m) x(M+n-m), \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

Où $P=2M-1$ dénote l'ordre de chaque sous-filtre polyphasé. Les échantillons interpolés sont obtenus par filtrage FIR causal des échantillons d'entrée à bas débit avancés dans le temps.