

## Chapitre 6 : Transformation en ondelettes discrètes

### 1. Transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes a été introduite originellement comme une représentation temps-échelle. Elle permet de décomposer un signal à énergie finie sur des fonctions dilatées et translatées. Une ondelette est une fonction  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  de moyenne nulle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (6.1)$$

Elle est normalisée et centrée au voisinage de  $t = 0$ . Une famille d'atomes temps-échelle est obtenue par échelonnement d'un facteur  $s$  et translation d'un facteur  $u$  de l'ondelette mère  $\psi(t)$

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (6.2)$$

où  $s > 0$  est le paramètre échelle et  $u$  est le paramètre de translation temporelle.

L'action du paramètre  $s$  sur  $\psi$  (qui doit être oscillatoire) est une dilatation si  $s > 1$  ou une compression si  $s < 1$ . La forme de la fonction  $\psi$  reste inchangée. Le facteur  $1/\sqrt{s}$  maintient une norme constante  $\|\psi_{u,s}(t)\| = 1$ .

La transformée en ondelettes continue d'un signal  $x(t)$  est définie par

$$W_x(u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \quad (6.3)$$

La formulation temps-fréquence de la transformée en ondelettes permet d'établir une comparaison de cette dernière avec la transformée de Fourier à court terme. En définissant l'échelle d'analyse par  $s = f_0 / f$ , où  $f_0$  est la fréquence centrale de  $\psi(t)$ , la transformée en ondelettes prend la forme suivante

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \sqrt{\left|\frac{f}{f_0}\right|} \psi^*\left(\frac{f}{f_0}(\tau-t)\right) d\tau \quad (6.4)$$

La transformée en ondelettes possède les propriétés de translation en temps et en échelle. Cependant, elle ne préserve pas la translation fréquentielle.

La fonction  $\psi(t)$  est localisée dans les domaines spatial (temporel) et fréquentiel. Pour que la transformée en ondelette soit inversible, la fonction ondelette  $\psi(t)$  doit vérifier la condition, dite d'admissibilité, exprimée par

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} |\Psi(f)|^2 \frac{df}{f} < \infty \quad (6.5)$$

où  $\Psi(f)$  est la transformée de Fourier de  $\psi(t)$ . Dans la plupart des cas, la condition (6.5) se réduit au fait que l'ondelette  $\psi(t)$  soit de moyenne nulle. La formule de reconstruction s'écrit comme

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \psi_{u,s}(t) W_x(u, s) \quad (6.6)$$

L'expression (6.6) montre que la transformée en ondelettes permet la représentation du signal comme une superposition linéaire d'ondelettes  $\psi_{u,s}(t)$  pondérées par les coefficients  $W_x(u, s)$ .

La distribution d'énergie de la transformée en ondelettes appelée scalogramme et définie par  $SC_x(u, s) = |W_x(u, s)|^2$  est un membre d'une classe quadratique de distributions appelée classe affine. Le scalogramme préserve les propriétés de translation temporelle et d'échelonnement temporel. Il est non linéaire de nature et, donc, il présente un comportement très similaire au spectrogramme vis à vis des termes d'interférences et de leur géométrie. Le chevauchement des supports temps-échelle des transformées en ondelettes de chaque paire de composantes d'un signal multi-composantes conduit à l'apparition d'un terme d'interférence dans le scalogramme. Par conséquent, le scalogramme d'un signal à  $K$  composantes peut contenir au minimum zéro terme d'interférence et au maximum  $C_K^2$  termes d'interférences.

## 2. Interprétation de la transformée en ondelettes en terme de filtrage et résolution temps-fréquence

La transformée en ondelettes  $W_x(u, s)$  peut être interprétée comme la convolution du signal  $x(t)$  avec la version conjuguée et inversée dans le temps de l'ondelette notée  $\bar{\psi}(t)$

$$W_x(u, s) = \bar{\psi}_s(u) \otimes x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(u-t) x(t) dt \quad (6.7a)$$

où

$$\bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( -\frac{t}{s} \right) \quad (6.7b)$$

Cela signifie que la transformée en ondelettes continue agit comme un filtre dont la réponse impulsionale est de moyenne nulle.

Une propriété fondamentale de la transformée en ondelettes est qu'elle permette une localisation des événements en temps et en fréquence. Le segment de  $x(t)$  qui contribue à la valeur de  $W_x(u, s)$  est celui qui coïncide avec l'intervalle de  $\psi_{u,s}(t)$  caractérisé par la plus grande énergie. La sélectivité en fréquence de la transformée en ondelettes peut être expliquée en utilisant son interprétation comme un ensemble de filtres linéaires temps-invariant dont les réponses impulsionales sont les versions dilatées et translatées de l'ondelette mère inversée dans le temps.

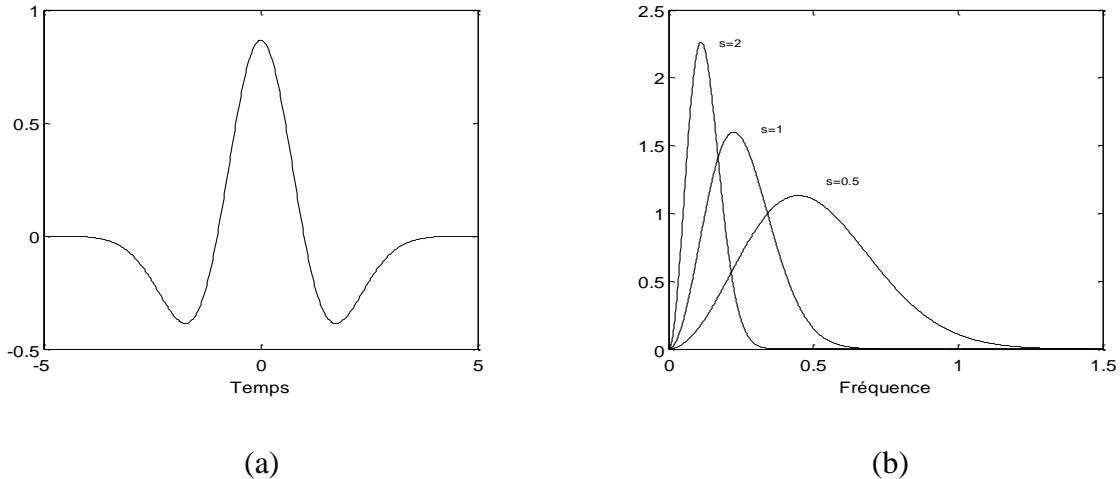
Comme illustration de la sélectivité en fréquence de la transformée en ondelettes, considérons l'ondelette appelée chapeau Mexicain définie comme la seconde dérivée de la fonction gaussienne

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3\sigma}} \left( \frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad (6.8)$$

où  $\sigma$  est un facteur d'échelle permettant d'ajuster le support temporel de l'ondelette.

La figure 6.1 montre l'évolution temporelle de l'ondelette chapeau Mexicain normalisée pour  $\sigma = 1$  et son spectre d'énergie d'amplitude  $|\Psi(f)|$  pour trois valeurs différentes du facteur d'échelle. La figure 6.1b montre que l'ondelette est de type passe bande. Le facteur  $Q$  défini comme le rapport de la fréquence centrale à la largeur de bande à 3 dB reste invariant vis à vis de la dilatation de l'ondelette.

Pour les grandes valeurs de l'échelle  $s$ , le filtre associé à l'ondelette possède une réponse fréquentielle centrée sur une fréquence de faible valeur et, donc, la transformée en ondelettes  $W_x(u, s)$  capte le contenu fréquentiel de  $x(t)$  autour de cette faible valeur de la fréquence. Pour les petites valeurs de  $s$ , la bande passante du filtre associé est plus décalée vers les hautes fréquences et, donc, la transformée en ondelettes capte l'information correspondante aux hautes fréquences de son spectre.



**Figure 6.1 :** Ondelette chapeau Mexicain normalisée. (a) Représentation temporelle pour  $\sigma = 1$ . (b) Spectre d'amplitude pour trois valeurs différentes du facteur d'échelle  $s$ .

Les mesures quantitatives de la résolution temps-fréquence sont basées sur la durée et la largeur de bande de l'ondelette mère. Le moment d'ordre 1 de l'ondelette  $\psi(t)$  donné par

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt} \quad (6.9a)$$

fournit une mesure du centre de  $\psi(t)$ . De manière similaire, on peut définir une mesure du centre de  $|\Psi(f)|^2$ , transformée de Fourier de  $\psi(t)$ , par le moment d'ordre 1 donné par

$$f_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f |\Psi(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(f)|^2 df} \quad (6.9b)$$

Les mesures de la durée de l'ondelette  $\Delta t$  et de sa largeur de bande  $\Delta f$  sont données par

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt}} \quad (6.10a)$$

$$\Delta f = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (f - f_0)^2 |\Psi(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(f)|^2 df}} \quad (6.10b)$$

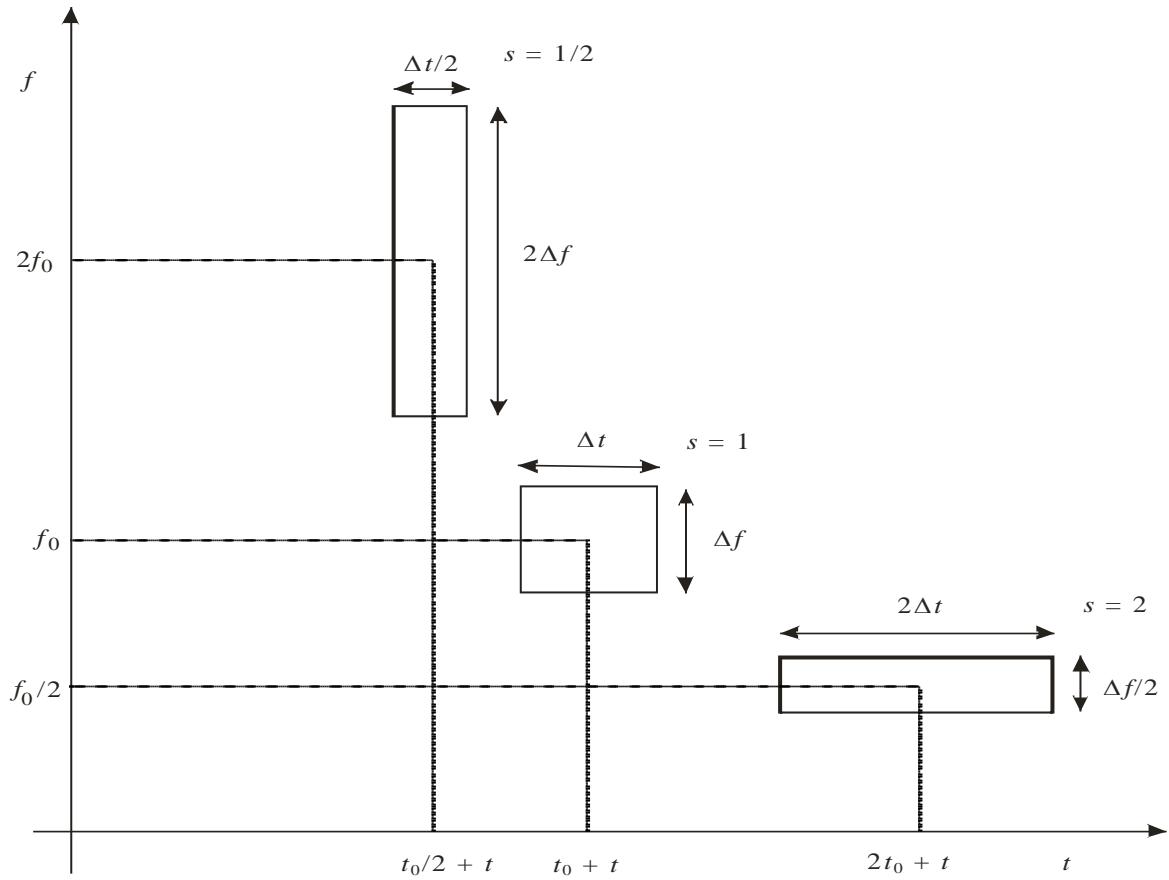
Pour que les valeurs des intégrales dans les numérateurs des expressions (6.10a) et (6.10b) soient finies, l'ondelette doit être à décroissance rapide dans les domaines temporel et fréquentiel. Pour les fonctions dont la décroissance n'est pas suffisamment rapide, des mesures alternatives telles que la longueur de l'intervalle contenant une grande proportion de son énergie peuvent être utilisées.

Le produit de la durée de l'ondelette par sa largeur de bande est indépendant de la dilatation, ce qui se traduit par l'égalité suivante

$$\Delta t_\psi(s) \Delta f_\psi(s) = \Delta t_\psi \Delta f_\psi = c_\psi \quad (6.10c)$$

où  $c_\psi$  est une constante.

La transformée en ondelettes peut être considérée comme une représentation temps-fréquence à résolution variable. La variation de la résolution temps-fréquence en fonction du paramètre d'échelle  $s$  est illustrée graphiquement sur la figure 6.2.



**Figure 6.2 :** Illustration de la résolution temps-fréquence en fonction du paramètre d'échelle. Une augmentation de la résolution fréquentielle entraîne une diminution de la résolution temporelle et vice versa. L'aire des atomes temps-fréquence est toujours constante.

### 3. Transformée en ondelettes discrète

La transformée en ondelettes continue d'un signal est redondante. En discréétisant les paramètres  $s$  et  $u$ , la transformation demeure inversible. Cependant, le pas d'échantillonnage qui permet de préserver toute l'information contenue dans le signal analysé ne peut dépasser le pas d'échantillonnage critique défini par

$$s = 2^j, u = k 2^j, \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (6.11)$$

L'échantillonnage critique fournit la base minimale nécessaire à la reconstruction du signal. Le choix d'un pas d'échantillonnage plus grand que le pas d'échantillonnage critique conduit à une perte d'information et donc le signal d'origine ne peut être parfaitement reconstruit. La base obtenue suite à un échantillonnage critique est donnée par  $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$ .

La décomposition d'un signal  $x(t)$  à énergie finie dans la base d'ondelettes s'écrit comme

$$x(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (6.12)$$

Pour un échantillonnage plus général exprimé par

$$s = s_0^j, u = k u_0 s_0^j, j, k \in \mathbb{Z}, s_0 > 1, u_0 > 0 \quad (6.13)$$

il est toujours possible de reconstruire le signal original si la base  $\{\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t - ku_0), j, k \in \mathbb{Z}\}$  constitue une frame. La frame satisfait l'inégalité suivante :

$$0 < R_1 \leq \sum_k |\Psi(f+k)|^2 \leq R_2 < \infty \quad (6.14)$$

où  $0 < R_1 \leq R_2 < \infty$  sont appelées les bornes de la frame. Pour l'échantillonnage défini par (6.13), l'ondelette s'exprime comme

$$\psi_{j,k}(t) = s_0^{-j/2} \psi\left(\frac{t - ku_0 s_0^j}{s_0^j}\right) = s_0^{-j/2} \psi(s_0^{-j} t - ku_0) \quad (6.15)$$

La décomposition en ondelettes permet une localisation temps-fréquence du signal en le représentant par quelques coefficients. Elle présente un grand intérêt dans l'analyse d'une large classe de signaux. Les coefficients intervenant dans la décomposition décroissent rapidement lorsque  $j$  et  $k$  augmentent. Cette propriété est particulièrement utile dans les problèmes de compression des signaux et des images, le débruitage et la détection. La décomposition en ondelettes fournit une description plus précise et une séparation des caractéristiques du signal. En effet, un coefficient d'ondelette représente une composante qui est-elle même locale et facile à interpréter.

La théorie des ondelettes est étroitement liée au concept de l'analyse multirésolution. En effet, il est possible de construire des bases d'ondelettes orthonormées et développer des algorithmes rapides en utilisant la théorie de l'analyse multirésolution.

#### 4. Analyse multirésolution

Une meilleure interprétation peut être donnée à l'analyse en ondelettes en utilisant l'analyse multirésolution dont la formulation nécessite deux fonctions de base étroitement liées : la fonction échelle notée  $\varphi(t)$  et la fonction ondelette notée  $\psi(t)$ . L'analyse multirésolution consiste à décomposer une fonction compliquée en plusieurs fonctions plus simples qu'on analyse séparément. C'est le cas, par exemple, d'une fonction constituée d'un segment à variation rapide et d'un segment à variation lente. En utilisant une combinaison des fonctions échelle et ondelette, une large classe de signaux peut être décomposée sous forme

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j_0,k} \varphi(2^{-j_0} t - k) + \sum_{j=-\infty}^{j_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_{j,k} \psi(2^{-j} t - k) \quad (6.16)$$

où l'indice  $j_0$  désigne un niveau d'approximation quelconque.

L'objectif d'une telle décomposition est de disposer de coefficients qui donnent une meilleure description du signal que celle offerte par la forme originale. En particulier, la description des discontinuités dans les signaux nécessite un grand nombre de composantes spectrales, alors que quelques types d'ondelettes sont appropriées pour représenter les signaux incluant les discontinuités.

Pour définir une analyse multirésolution, il faut avoir une fonction à énergie finie  $\varphi(t)$  appelée fonction échelle qui génère une séquence emboîtée  $\{A_j\}$  de sous espaces de  $L^2$  telle que

$$\{0\} \subset \dots \subset A_1 \subset A_0 \subset A_{-1} \subset \dots \rightarrow L^2(\mathbf{R}) \quad (6.17)$$

et satisfaisant les conditions suivantes

- (i)  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j = L^2(\mathbf{R})$
- (ii)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} A_j = \{0\}$
- (iii)  $x(t) \in A_j \Leftrightarrow x(2^{-1}t) \in A_{j+1}$
- (iv)  $x(t) \in A_0 \Leftrightarrow x(t-k) \in A_0$

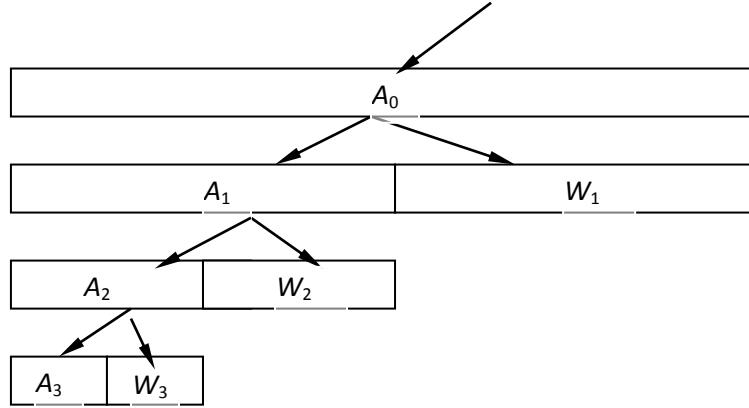
Si ces conditions sont satisfaites, on montre qu'il existe une fonction appelée fonction échelle, notée  $\varphi(t)$ , qui par dilatation et translation engendre une base orthonormée de  $A_j$ . En combinant les conditions (iii) et (iv), on obtient une base orthonormée de la forme

$$\left\{ \varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (6.18)$$

Chaque séquence  $A_j$  peut être interprétée comme un espace d'approximation : l'approximation de  $x(t) \in L^2(\mathbf{R})$  à la résolution  $j$  est obtenue par sa projection sur  $A_j$ . La résolution est d'autant plus fine que  $j$  est petit. Les détails additionnels nécessaires pour passer de la résolution  $j$  à  $j - 1$  sont obtenus par projection de  $s$  sur l'espace  $W_j$  complémentaire de  $A_j$  dans  $A_{j-1}$  :

$$A_j \oplus W_j = A_{j-1}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (6.19)$$

où le symbole  $\oplus$  dénote la somme directe. La figure 6.4 illustre le principe de l'analyse multirésolution.



**Figure 6.3 :** Principe de l'analyse multirésolution.

En fixant un certain niveau de résolution  $j_0$ , on peut écrire les deux relations suivantes :

$$A_{j_0} = \bigoplus_{l=j_0+1}^{\infty} W_l \quad (6.20a)$$

$$L^2(\mathbb{R}) = A_{j_0} \oplus \left( \bigoplus_{j \leq j_0} W_j \right) \quad (6.20b)$$

L'ensemble des sous espaces  $W_j$  est généré par une fonction  $\psi(t)$  appelée ondelette mère calculée explicitement à partir de  $\varphi(t)$  telle que  $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$  constitue une base de  $L^2(\mathbb{R})$ .

## 5. Propriétés des ondelettes

### 5.1. Orthogonalité

Lorsqu'on parle de bases d'ondelettes orthogonales cela sous-entend que les ondelettes sont orthogonales par rapport à l'échelle et par rapport à la translation pour une échelle donnée. Par contre, l'orthogonalité de la fonction échelle implique que les fonctions échelle sont orthogonales uniquement par rapport à la translation pour une échelle donnée et non par rapport aux différentes échelles puisque les sous espaces d'approximation sont emboîtés. La condition permettant d'assurer l'orthogonalité de la fonction échelle et qui est très utilisée pour construire le filtre associé est exprimée dans le domaine fréquentiel par

$$\sum_n |\Phi(f+n)|^2 = 1 \quad (6.21)$$

où  $\Phi(f)$  est la transformée de Fourier de la fonction échelle et  $f$  dénote la fréquence normalisée.

Le sous espace  $W_j$  est complémentaire de  $A_j$  dans  $A_{j-1}$ . Si en plus, on impose l'orthogonalité entre  $W_j$  et  $A_j$  ( $W_j \perp A_j$ ), la décomposition est dite orthogonale. En particulier, la relation d'orthogonalité entre  $A_0$  et  $W_0$  se traduit par l'équation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \psi(t-l) dt = 0, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (6.22)$$

La condition d'orthogonalité n'est pas une condition nécessaire pour la reconstruction du signal. Cependant, elle permet de développer des méthodes de calcul simples. Supposons que  $W_j$  n'est pas orthogonale à  $A_j$  et que l'ondelette  $\psi_{j,k}(t) \in W_j$  possède une ondelette duale  $\tilde{\psi}_{j,k}(t) \in \tilde{W}_j$ . La dualité implique que la relation suivante est satisfaite

$$\langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{l,m}(t) \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (6.23)$$

où  $\delta_{j,k}$  désigne le symbole de Kronecker. Pour reconstruire le signal  $x(t)$ , le sous espace  $\tilde{W}_j$  doit être orthogonal à  $A_j$ . La base d'ondelettes  $\{\psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\}$  est dite biorthogonale.

## 5.2. Relations à deux échelles

Les relations à deux échelles établissent un lien entre les fonctions échelle et ondelette à un niveau d'échelle donné à la fonction échelle au niveau d'échelle immédiatement inférieur. Ces relations peuvent être déduites des propriétés suivantes

$$\varphi(t) \in A_0 \subset A_{-1} \quad (6.24a)$$

$$\psi(t) \in W_0 \subset A_{-1} \quad (6.24b)$$

Il s'en suit que la fonction échelle  $\varphi(t)$  et l'ondelette mère  $\psi(t)$  peuvent être exprimées par une combinaison linéaire de fonctions de  $A_{-1}$  :

$$\varphi(t) = \sum_k g_0(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k) \quad (6.25a)$$

$$\psi(t) = \sum_k g_1(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k) \quad (6.25b)$$

où  $g_0(k)$  et  $g_1(k)$  sont deux séquences de  $\ell^2$  avec  $\ell^2$  dénotant l'ensemble des séquences discrètes à énergie finie.

Les équations (6.24a) et (6.24b) définissent les relations à deux échelles. En général, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , les relations liant  $A_j$  et  $A_{j-1}$  sont exprimées par :

$$\varphi(2^{-j} t) = \sum_k g_0(k) \sqrt{2} \varphi(2^{-j+1} t - k) \quad (6.25a)$$

$$\psi(2^{-j} t) = \sum_k g_1(k) \sqrt{2} \varphi(2^{-j+1} t - k) \quad (6.25b)$$

En prenant la transformée de Fourier des relations (6.25a) et (6.25b), il vient

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_0\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right) \quad (6.26a)$$

$$\Psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_1\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right) \quad (6.26b)$$

$\Phi(f)$ ,  $\Psi(f)$ ,  $G_0(f)$  et  $G_1(f)$  sont les transformées de Fourier de  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $g_0(k)$  et  $g_1(k)$ , respectivement.

Du fait que les ondelettes génèrent les espaces orthogonaux complémentaires et que les versions translatées de l'ondelette sont orthogonales, on montre que les séquences  $g_0(k)$  et  $g_1(k)$  sont reliées par

$$g_1(k) = (-1)^k g_0(1-k) \quad (6.27)$$

La relation (6.27) définit ce qu'on appelle des filtres miroirs en quadrature dans la littérature des bancs de filtres.

## 6. Représentation d'un signal dans les espaces d'approximation et d'ondelette

Les sous espaces d'approximation  $A_n$  sont emboîtés. Si on considère un signal arbitraire à énergie finie, on ne peut affirmer qu'il est dans l'un des sous espaces, c'est à dire qu'on ne peut garantir l'existence d'une séquence  $a_{j,k}$  telle que

$$x(t) = \sum_k a_{j,k} \varphi(2^{-j}t - k) \quad (6.28)$$

Cependant, pour une certaine valeur de  $j$ ,  $x(t)$  peut être approximé par  $x_j(t) \in A_j$ , soit donc

$$x(t) \approx \sum_k a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) = \sum_k a_{j,k} \varphi(2^{-j}t - k) \quad (6.29)$$

Les coefficients  $a_{j,k}$  de la fonction échelle sont calculés à partir des échantillons du signal. Puisque  $A_j$  est un sous espace de  $L^2$  et  $x(t) \in L^2$ ,  $x_j(t)$  peut être considéré comme une projection orthogonale de  $x(t)$  dans le sous espace  $A_j$ . Donc, l'erreur  $x(t) - x_j(t)$  qui résulte de la projection est orthogonale à  $A_j$  et, par conséquent, à la fonction échelle, ce qui permet d'écrire

$$\langle x, \varphi_{j,l} \rangle - \langle x_j, \varphi_{j,l} \rangle = 0 \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{Z} \quad (6.30)$$

Si la fonction échelle et ses versions translatées forment une base orthonormée, le développement de (6.30) permet d'aboutir à l'équation suivante :

$$a_{j,m} = \langle x, \varphi_{j,m} \rangle \quad (6.31)$$

Si le signal  $x(t)$  est échantillonné à des instants  $t = k2^j$ , la discréttisation de (6.31) donne

$$\begin{aligned}
a_{j,m} &= 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi^*(2^{-j}t - m) dt \\
&\approx 2^{-j/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k2^j) \varphi^*(k - m)
\end{aligned} \tag{6.32}$$

La diminution de la valeur de  $j$  entraîne un espace d'approximation plus large puisque  $\varphi_{j,k}(t)$  est plus étroite et est translatée avec des pas plus petits d'où la possibilité de représenter des détails plus fins. En augmentant la valeur de  $j$ , la fonction échelle devient plus large et elle est translatée avec des pas plus grands. Par conséquent, les fonctions échelle larges peuvent représenter uniquement une information grossière et, donc, l'espace qu'elles engendrent est plus petit. Les caractéristiques du signal ne sont pas décrites en utilisant  $\varphi_{j,k}(t)$  et en diminuant  $j$  pour augmenter la dimension du sous espace qu'elle engendre mais en définissant un ensemble d'ondelettes  $\psi_{j,k}(t)$  qui génèrent la différence entre les espaces engendrés par les fonctions échelle. La partie du signal correspondant à cette différence s'écrit comme

$$d = \sum_{j=-\infty}^{j_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_{j,k} \psi_{j,k}(t) \tag{6.33}$$

où les coefficients d'ondelettes sont calculés en utilisant une formule similaire à (6.31) avec la fonction échelle remplacée par la fonction ondelette

$$w_{j,m} = \langle x, \psi_{j,m} \rangle \tag{6.34}$$

Si la base d'ondelettes est biorthogonale, les coefficients d'échelle et d'ondelette sont calculés en remplaçant  $\varphi_{j,k}(t)$  et  $\psi_{j,k}(t)$  dans (6.31) et (6.34), respectivement, par leurs duals.

## 8. Algorithme de décomposition

L'algorithme de décomposition permet de trouver à partir d'une approximation à une échelle donnée, l'approximation et les détails à l'échelle immédiatement inférieure par itérations successives. L'algorithme de Mallat permet d'obtenir la décomposition pour les analyses multirésolutions orthogonales et biorthogonales. Désignons par  $s = 2^j$  le paramètre échelle et par  $u = k 2^j$  le paramètre de translation, où  $j$  et  $k$  représentent deux entiers. La transformée en ondelettes discrète de  $x(t)$  au point  $(k 2^j, 2^j)$  représente la corrélation entre  $x(t)$  et  $\psi^*(t)$  en ce point. Cette transformation génère un ensemble de points dans le plan temps-échelle donnés par

$$w_{j,k} = W_x(k 2^j, 2^j) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t - k 2^j}{2^j}\right) dt \tag{6.35}$$

L'algorithme de décomposition sépare le signal en composantes à différentes échelles où chaque composante peut être traitée séparément. L'algorithme retient l'information

pertinente de sorte qu'on peut reconstituer le signal. L'algorithme de décomposition peut être développé en exprimant les fonctions échelle et ondelette à un niveau  $j$  comme une combinaison linéaire des fonctions d'échelle au niveau  $j - 1$ .

Puisque  $A_0 \subset A_{-1}$ , on peut écrire

$$\varphi(t) = \sum_k g_0(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k)$$

donc

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \sum_p g_0(p) \sqrt{2} \varphi(2^{-j}t - k - p)$$

En regroupant les indices et les exposants, on obtient

$$\varphi_{j,k}(t) = \sum_p g_0(p) \varphi_{j-1,p+2k}(t)$$

Donc, on peut calculer les coefficients  $a_{j,k} = \langle x, \varphi_{j,k} \rangle$  de l'approximation au niveau  $j$  comme

$$a_{j,k} = \sum_p g_0(p) \langle x, \varphi_{j-1,p+2k} \rangle$$

Si on pose  $l = p + 2k$ , il vient

$$a_{j,k} = \sum_l g_0(l - 2k) \langle x, \varphi_{j-1,l} \rangle$$

Si on désigne par  $\bar{g}_0(k) = g_0(-k)$ , on obtient

$$a_{j,k} = \sum_l \bar{g}_0(2k - l) \langle x, \varphi_{j-1,l} \rangle$$

soit donc

$$a_{j,k} = \sum_l \bar{g}_0(2k - l) a_{j-1,l} \tag{6.36}$$

Considérons maintenant une ondelette de  $W_0$ . Sa décomposition sur la base de  $A_{-1}$  donne

$$\psi(t) = \sum_k g_1(k) \varphi_{-1,k} = \sum_k g_1(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k)$$

ce qui permet d'aboutir à l'expression de  $g_1(k)$  suivante

$$g_1(k) = \langle \psi, \varphi_{-1,k} \rangle$$

Un calcul analogue au précédent permet d'aboutir à l'expression des coefficients d'ondelettes suivante

$$w_{j,k} = \langle x, \psi_{j,k} \rangle$$

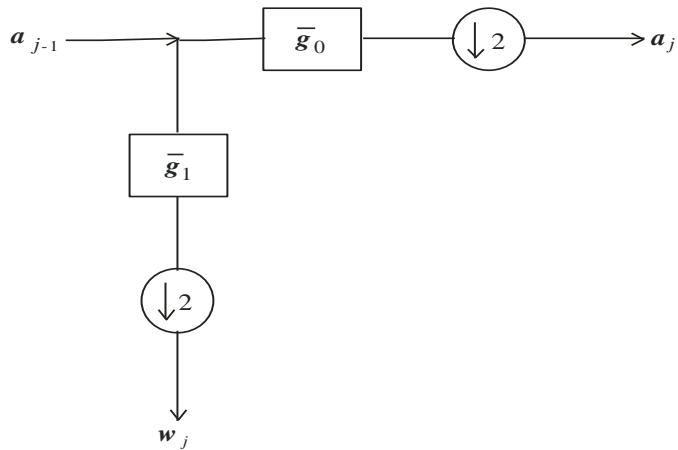
$$= \sum_p g_1(p) \langle x, \varphi_{j-1,p+2k} \rangle$$

En posant  $\bar{g}_1(k) = g_1(-k)$ , on obtient l'équation de décomposition en ondelettes à l'échelle  $j$

$$\begin{aligned} w_{j,k} &= \sum_l \bar{g}_1(2k-l) \langle x, \varphi_{j-1,l} \rangle \\ &= \sum_l \bar{g}_1(2k-l) a_{j-1,l} \end{aligned} \quad (6.37)$$

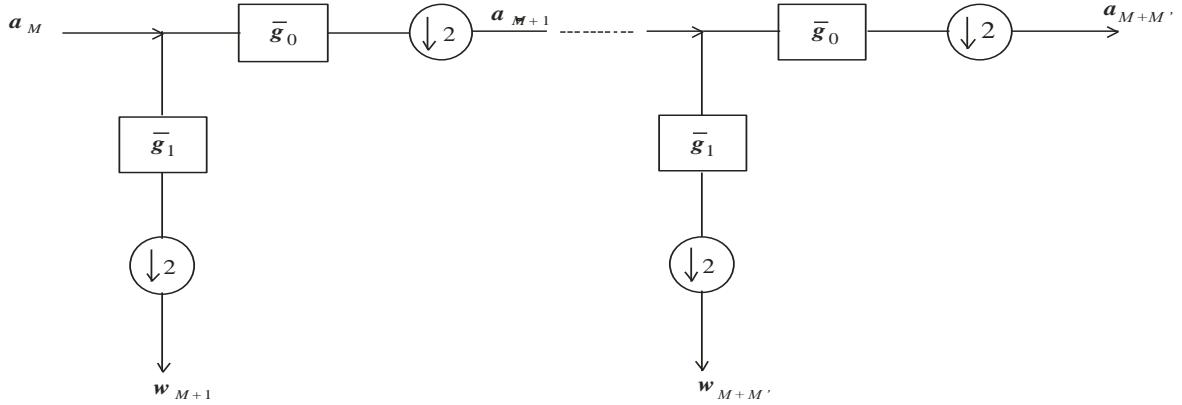
Les membres de droite des équations (6.36) et (6.37) correspondent à une décimation par deux après convolution. Les coefficients échelle et ondelette à un niveau de résolution  $j$  peuvent être obtenus par convolution des coefficients échelle au niveau de résolution  $j - 1$  avec les coefficients des filtres associés  $\bar{g}_0$  et  $\bar{g}_1$  suivie d'une décimation par deux. Le filtre  $\bar{g}_0$  est passe bas alors que le filtre  $\bar{g}_1$  est passe haut. Par itération, on obtient les composantes du signal associées aux différents niveaux de résolution. On retrouve ces structures dans la littérature de bancs de filtres où des algorithmes efficaces ont été développés. La figure 6.4 illustre le processus de décomposition en utilisant la notation vectorielle suivante

$$\mathbf{a}_j = \{a_{j,k}\}, \mathbf{w}_j = \{w_{j,k}\}, \bar{\mathbf{g}}_0 = \{\bar{g}_0(k)\}, \bar{\mathbf{g}}_1 = \{\bar{g}_1(k)\}$$



**Figure 6.4 :** Processus de décomposition en ondelette à un niveau.

Ce bloc de décomposition est appliqué de manière itérative aux coefficients de la fonction échelle à une échelle supérieure pour obtenir l'arbre dyadique de décomposition en ondelettes représenté sur la figure 6.5.



**Figure 6.5:** Arbre dyadique de décomposition en ondelettes.

## 9. Algorithme de reconstruction

La transformée en ondelette discrète possède une transformée inverse unique permettant la reconstruction parfaite du signal. L'algorithme de reconstruction retrouve le signal à partir des composantes à différentes échelles en exploitant les relations à deux échelles entre la fonction échelle et l'ondelette. Considérons la somme des composantes au niveau de résolution  $j$  :

$$x_j(t) + d_j(t) = \sum_k a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) + \sum_k w_{j,k} \psi_{j,k}(t) = x_{j-1}(t) \quad (6.38)$$

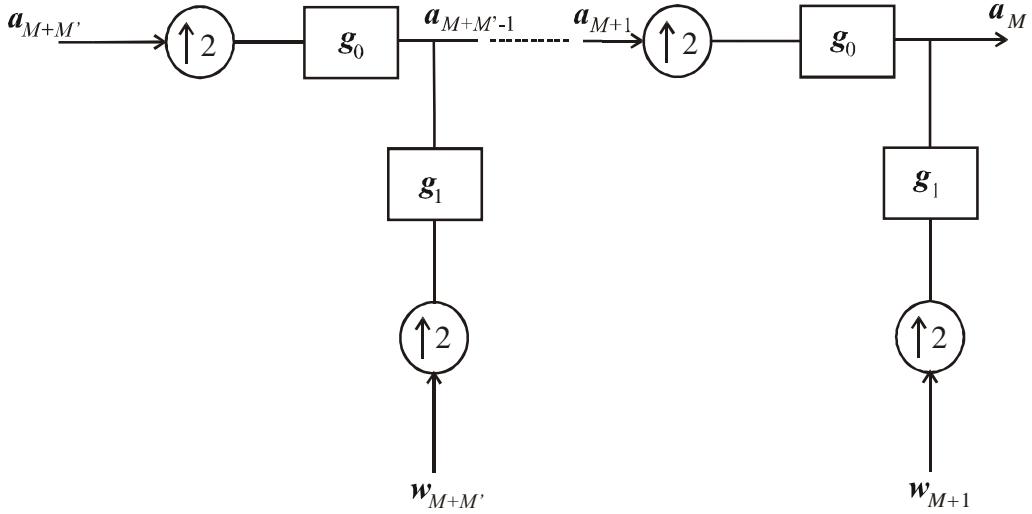
En substituant les relations à deux échelles (2.42a) et (2.42b) dans (2.55), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_k a_{j,k} \sum_l g_0(l) \varphi(2^{-j+1}t - 2k - l) + \sum_k w_{j,k} \sum_l g_1(l) \varphi(2^{-j+1}t - 2k - l) \\ = \sum_l a_{j-1,l} \varphi(2^{-j+1}t - l) \end{aligned} \quad (6.39)$$

Par comparaison des coefficients de  $\varphi(2^{-j+1}t - l)$  dans les deux membres de l'égalité (6.39), il vient

$$a_{j-1,l} = \sum_k [g_0(l-2k) a_{j,k} + g_1(l-2k) w_{j,k}] \quad (6.40)$$

Le membre de droite de (6.40) correspond à une interpolation suivie d'une convolution. La séquence des coefficients d'échelle au niveau de résolution  $j$  est sur-échantillonnée, ce qui veut dire que sa longueur est doublée par insertion d'un zéro entre deux échantillons successifs, puis convoluée avec la séquence des coefficients du filtre associé. La même procédure est appliquée à la séquence des coefficients d'ondelette à la résolution  $j$ , et les résultats sont additionnés pour donner les coefficients d'échelle au niveau de résolution  $j-1$ . L'algorithme de reconstruction est illustré sur la figure 6.6.



**Figure 6.6 :** Processus de reconstruction à partir de la fonction échelle et des coefficients d'ondelettes.

## 10. Exemples de bases d'ondelettes

### 10.1. Ondelette de Haar

L'ondelette de Haar est la plus simple des bases d'ondelettes. La fonction échelle utilisée dans la construction de l'ondelette est donnée par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.41)$$

Cette fonction peut être décomposée comme suit

$$\varphi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1) \quad (6.42)$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de (6.42), il vient

$$\Phi(f) = \Phi\left(\frac{f}{2}\right) \frac{1 + e^{-j\pi f}}{2} \quad (6.43)$$

En comparant (6.43) et (6.26a), on en déduit la réponse fréquentielle du filtre  $g_0$  associée à la fonction échelle

$$G_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{-j2\pi f})$$

La fonction de transfert du filtre s'écrit comme

$$G_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + z^{-1}) \quad (6.44a)$$

L'utilisation des propriétés des filtres miroirs en quadrature permet déterminer le filtre  $g_1$  :

$$G_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - z^{-1}) \quad (6.44b)$$

En utilisant (6.26b), on obtient la transformée de Fourier de l'ondelette

$$\Psi(f) = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\pi f}) \Phi(f/2)$$

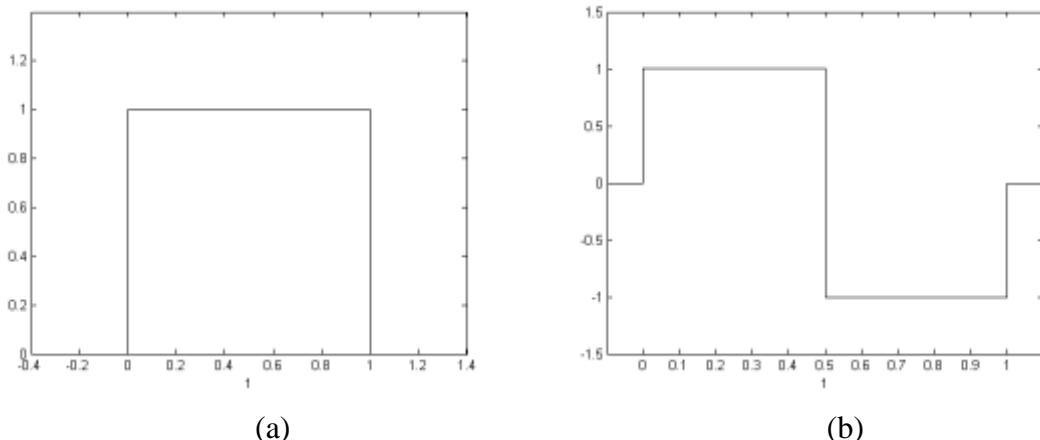
soit donc

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1)$$

ce qui donne finalement

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.45)$$

Les filtres associés à l'ondelette de Haar sont simples. L'inconvénient majeur qui limite l'intérêt de cette ondelette est sa mauvaise résolution fréquentielle et les discontinuités qui sont inadéquates pour l'approximation des fonctions lisses. La figure 6.7 montre la représentation graphique des fonctions échelle et ondelette associées à la base de Haar.



**Figure 6.7 :** Fonctions échelle et ondelette de la base de Haar.  
(a) fonction échelle. (b) ondelette.

## 10.2. Ondelette de Shannon

La fonction échelle associée à l'ondelette de Shannon aussi appelée ondelette de Littlewood-Paley est définie dans le domaine fréquentiel par

$$|\Phi(f)| = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq f < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.46)$$

Son expression dans le domaine temporel peut être déduite par transformation de Fourier inverse et en choisissant une phase nulle, ce qui donne

$$\varphi(t) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{j2\pi ft} df = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (6.47)$$

La réponse fréquentielle du filtre numérique associée est déterminée à partir de la relation

$$G_0(f) = \sqrt{2} \frac{\Phi(2f)}{\Phi(f)}$$

or,  $G_0(f)$  est périodique de période 1, ce qui donne

$$G_0(f) = \begin{cases} \sqrt{2} & -1/2 \leq f < 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit donc

$$g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$$

$G_1(f)$  peut être déduite facilement par

$$G_1(f) = -e^{-j2\pi f} G_0^*(f + \frac{1}{2}) = \begin{cases} -\sqrt{2} e^{-j2\pi f} & -1/2 \leq f < -1/4 \\ 0 & -1/4 \leq f < 1/4 \\ -\sqrt{2} e^{-j2\pi f} & 1/4 \leq f < 1/2 \end{cases}$$

soit donc

$$g_1(n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \frac{\sin \frac{1-n}{2}\pi}{\frac{1-n}{2}\pi}$$

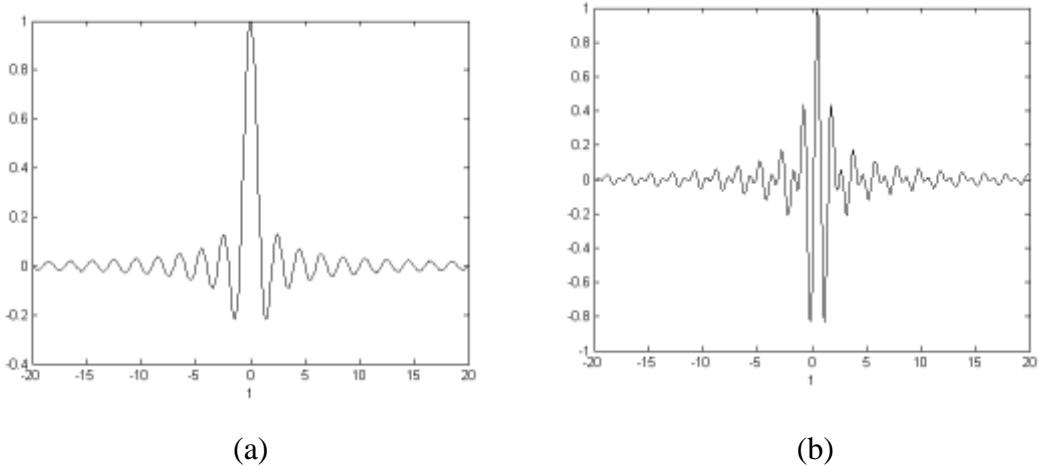
La fonction ondelette peut être déterminée par

$$\Psi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_1\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right) = \begin{cases} -e^{-j2\pi f} & 1/2 \leq |f| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient

$$\psi(t) = \frac{\cos \pi t - \sin 2\pi t}{\pi \left( t - \frac{1}{2} \right)} \quad (6.48)$$

La figure 6.8 représente graphiquement des fonctions échelle et ondelette de la base de Shannon. Notons que l'inconvénient de l'analyse par l'ondelette de Shannon est la mauvaise localisation temporelle.



**Figure 6.8 :** Fonctions échelle et ondelette de Shannon. (a) fonction échelle. (b) ondelette.

### 10.3. Ondelettes à support compact (Daubechies)

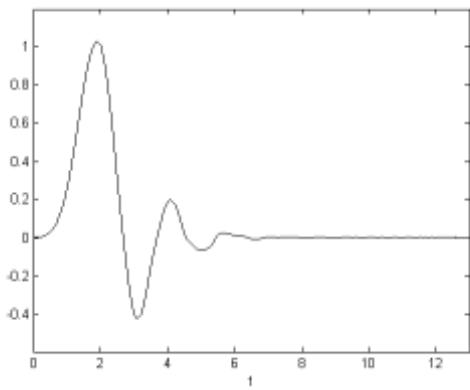
Cette famille d'ondelettes orthonormale est caractérisée par la compacité des supports. Cependant, elle n'est pas à phase linéaire. La compacité des fonctions de base et des filtres associés permet une réduction du coût de calcul, ce qui facilite d'envisager des applications en temps réel. L'ondelette de Daubechies possède  $q$  ( $\geq 2$ ) moments nuls, soit donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \psi(t) dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots, q-1$$

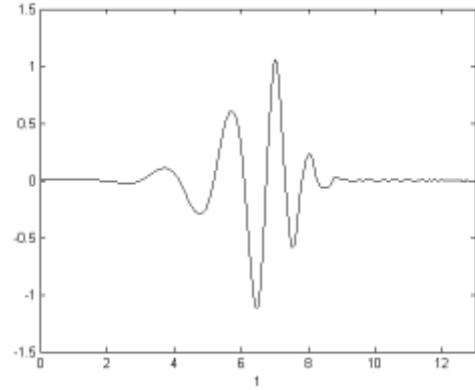
ce qui permet d'écrire  $G_0(f)$  sous la forme

$$G_0(f) = \left( \frac{1 + e^{j2\pi f}}{2} \right)^q P(f) \quad (6.49)$$

où  $P(f)$  est un polynôme trigonométrique. Le développement de la condition d'orthogonalité de  $\psi(t)$  permet d'aboutir à une équation dont la solution fournit les coefficients du filtre associé à l'ondelette. La figure 6.9 représente graphiquement les fonctions échelle et ondelettes de Daubechies d'ordre 7.



(a)



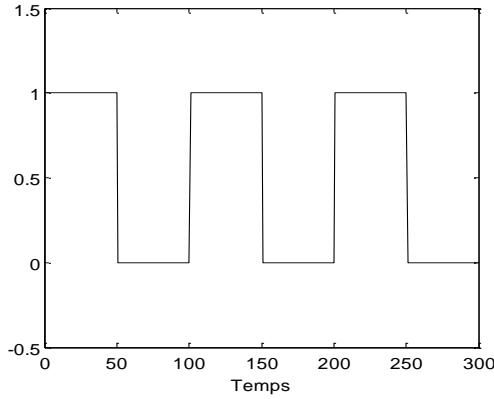
(b)

**Figure 6.9 :** Fonctions échelle et ondelette de la base de Daubechies. (a) fonction échelle. (b) ondelette.

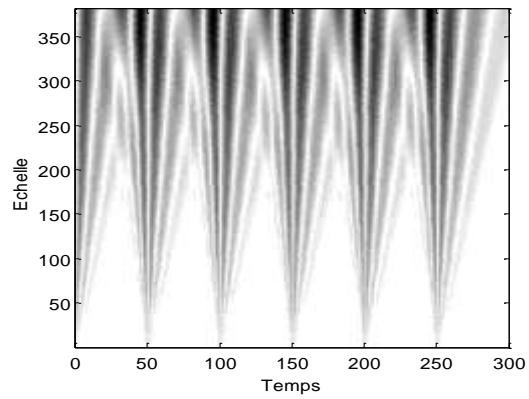
## 11. Applications de la transformation en ondelette

### 11.1 Application à la détection des singularités

Dans plusieurs applications, les signaux à analyser contiennent des transitions raides. Les irrégularités et les structures non stationnaires peuvent contenir une information d'un intérêt considérable. La régularité locale d'un signal peut être caractérisée par la décroissance de l'amplitude de la transformée en ondelettes le long des valeurs de l'échelle. Les singularités dans un signal peuvent être détectées en suivant les maximums locaux de la transformée en ondelettes aux échelles fines. La figure 6.10 montre, comme exemple, un signal rectangulaire où les singularités sont détectées en suivant les lignes des maximums du module de la transformée en ondelettes aux échelles fines.



(a)



(b)

**Figure 6.10 :** Détection des singularités dans un signal rectangulaire en suivant les maximums de la transformée en ondelettes aux échelles fines. (a) Signal temporel. (b) Transformée en ondelettes.

## 11.2. Application au débruitage et à la compression des signaux

Le seuillage est une technique utilisée en traitement du signal avec les ondelettes. Il consiste à annuler les coefficients d'ondelettes inférieurs à un certain seuil. Le seuillage est souvent utilisé dans le débruitage, la compression des signaux et des images. On distingue trois sortes de seuillage : seuillage dur, seuillage tendre et seuillage par pourcentage.

### 11.2.1. seuillage dur

Si le signal ou la valeur du coefficient est inférieur à une certaine valeur prédefinie, il est posé égal à zéro. Le seuillage dur est exprimé comme suit

$$y = \begin{cases} x & \text{pour } |x| \geq \sigma \\ 0 & \text{pour } |x| < \sigma \end{cases} \quad (6.50)$$

où  $\sigma$  est la valeur du seuil. Le seuillage dur est illustré graphiquement sur la figure 6.11a. Le graphe est non linéaire et discontinu en  $x = \sigma$ .

### 11.2.2. Seuillage tendre

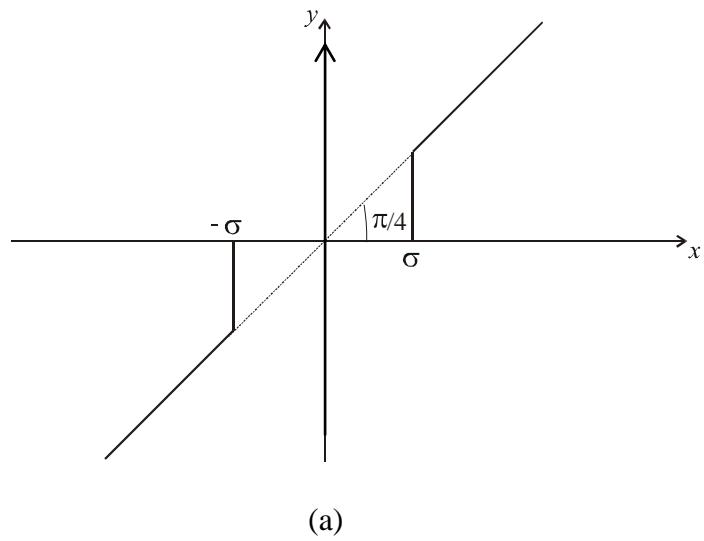
Le seuillage tendre est défini par

$$y = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x)q(|x| - \sigma) & \text{pour } |x| \geq \sigma \\ 0 & \text{pour } |x| < \sigma \end{cases} \quad (6.51)$$

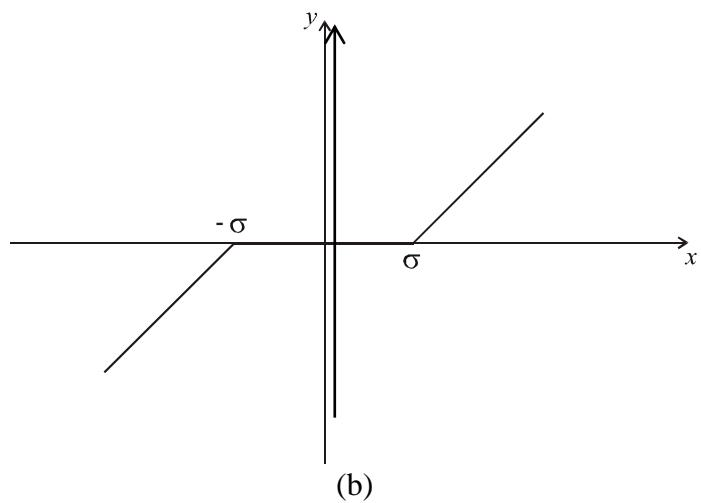
Généralement,  $q(x)$  est une fonction linéaire. Cependant, des fonctions non linéaires de degré trois ou quatre peuvent être utilisées. La figure 6.11b illustre le seuillage tendre pour une fonction  $q(x)$  linéaire.

### 11.2.3. Seuillage par pourcentage

Dans ce type de seuillage, un pourcentage des coefficients d'ondelettes qui ne dépassent pas le seuil est posé égal à zéro. Le seuillage par pourcentage est utilisé particulièrement dans les applications de compression. Le choix de la valeur du seuil  $\sigma$  est basé sur l'histogramme de l'ensemble des coefficients et le nombre total de coefficients. Une fois le seuil est déterminé, le principe est le même que celui du seuillage dur.



(a)



(b)

**Figure 6.11 :** Principe du seuillage. (a) Seuillage dur. (b) Seuillage tendre.