

• Rappels : un e.v.n est dit séparable s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

2) $L^2(\mathbb{R})$ est esp de Hilbert séparable.

3 - le produit fini des esp séparable est séparable $\Rightarrow (L^2(\mathbb{R}))^N$ est séparable pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

4) Un sous esp. fermé d'un esp séparable est séparable.

5) un sous ensemble d'un esp séparable est séparable.

6) Soit $A : E \rightarrow F$ une isométrie injective où E et F sont des e.v.n.

si l'un des esp est séparable, alors l'autre l'est aussi.

7. Soit $A : E(\text{Banach}) \xrightarrow{\text{linéaire}} F$ une isométrie. Alors $\text{Im}(A) = A(E)$ est un s.e.v. fermé de F (E, F sont des esp. v.n).

Théorème :
Proposition 1.2 : l'esp $H^1(\mathbb{R})$ est séparable :

on définit l'appli φ comme suit : $\varphi : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})^{N+1}$
 $u \mapsto (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$

Il est facile de vérifier que φ est linéaire.

Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a : $\|\varphi u\|_{(L^2(\mathbb{R}))^{N+1}} = \|u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\|_{(L^2(\mathbb{R}))^{N+1}}$

$$\|\varphi u\|_{(L^2(\mathbb{R}))^{N+1}} = \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \dots + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|u\|_{1, \mathbb{R}}$$

Donc φ est une isométrie linéaire $\xrightarrow{\text{7}} \text{Im}(H^1(\mathbb{R})) = \text{Im}(\varphi) = \overline{\{\varphi u\}}^{N+1}$
est un s.e.v. fermé de $(L^2(\mathbb{R}))^{N+1}$.

$(L^2(\mathbb{R}))^{N+1}$ est un esp de Hilbert séparable $\xrightarrow{\text{4}} (\varphi(H^1(\mathbb{R})), \|\cdot\|_{(L^2(\mathbb{R}))^{N+1}})$ 7

Nous avons vu que l'esp $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense ds $L^2(\Omega)$. et esp est-il dense ds $H^1(\Omega)$? dans la suite nous verrons que la réponse est non (négative). (si Ω est un ouvert borné, l'esp $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense ds $H^1(\Omega)$. Son adhérence est un sous esp strict de $H^1(\Omega)$, qu'on note $H_0^1(\Omega)$).

Définition : Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'esp des fcts de classe C^∞ à support compact (C_c^∞) ds Ω . L'esp de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ ds $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}. \quad (C_c^\infty(\bar{\Omega}) = H^1(\Omega)).$$

Théorème :

En général $H_0^1(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^1(\Omega)$ car $C_c^\infty(\Omega)$ est un sous esp strict de $C_c^\infty(\bar{\Omega})$. si $\Omega = \mathbb{R}^N$, dans ce cas $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^N = \Omega$ donc : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dense ds $H^1(\mathbb{R}^N)$. (puisque l'esp $\mathbb{R}^N$ n'a pas de bord) en effet on a le :

Théorème : L'esp $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense ds $H^1(\mathbb{R}^N)$ et i.e :

$$H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N).$$

Proposition : Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, l'esp de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est un esp de Hilbert.

Preuve : par définition $H_0^1(\Omega)$ est un sous esp fermé de $H^1(\Omega)$ (qui est un esp de Hilbert), donc c'est aussi un esp de Hilbert.

Proposition : (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné ds au moins une direction de l'esp. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute fct $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{i.e.} \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Théorème : Si v est une fct de $H_0^1(\Omega)$, la fct $\tilde{v}$, prolongement de v par 0 ds $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{i.e. : } \tilde{v} = \begin{cases} v & \text{p.p. dans } \Omega, \\ 0 & \text{presque partout ds } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Preuve 2 : (Inégalité de Poincaré) :

on travaille par densité. Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit $\tilde{v}$ le prolongement de v par 0 en dehors de Ω . Puisque Ω est borné, on peut supposer que Ω est contenu ds la bande $a \leq x_n \leq b$. En posant :

$$x = (x', x_n), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

on peut écrire

$$\tilde{v}(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) dt.$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 &= \left| \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) dt \right|^2 \leq \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt \\ &\leq (x_n - a) \int_a^{+\infty} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 dx' \leq (x_n - a) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \right|^2 dx.$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}|^2 dx = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{v}(x', x_n)|^2 dx' \right) dx_n \leq \frac{1}{2} (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \right|^2 dx.$$

on obtient donc l'inégalité :

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega); \|v\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1}{2} (b-a)^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\|_{0,\Omega}^2.$$

par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ ds $H_0^1(\Omega)$, on obtient la même inégalité pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Corollaire : si Ω est borné, la semi-norme.

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ (la norme de $H^1(\Omega)$)

Preuve :

En effet, si $v \in H_0^1(\Omega)$, tq: $|v|_{1,\Omega} = 0$.

De l'inégalité de Poincaré $(\|v\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega) |v|_{1,\Omega}) \Rightarrow \|v\|_{0,\Omega} \leq 0$

d'où: $v = 0$.

$\exists \alpha, \beta > 0$ tq: $\alpha |v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega} \leq \beta |v|_{1,\Omega}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

on a: $\forall v \in H^1(\Omega)$: $\|v\|_{1,\Omega} \geq |v|_{1,\Omega}$. ——— ①

de l'inégalité de Poincaré on a:

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \leq c^2 |v|_{1,\Omega}^2, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 + |v|_{1,\Omega}^2 \leq (1+c^2) |v|_{1,\Omega}^2, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

d'où: $\|v\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{1+c^2} |v|_{1,\Omega}$. ~~$\forall v \in H_0^1(\Omega)$~~ ②.

① et ②
donc $\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \|v\|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{1,\Omega}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$

donc les deux normes sont équivalentes $\Rightarrow (H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega})$ complet $\Rightarrow$

$(H_0^1(\Omega), |\cdot|_{1,\Omega})$ complet.

$$(u,v)_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{0,\Omega} \Rightarrow (v,v)_{0,\Omega}^{\frac{1}{2}} = |v|_{1,\Omega}.$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega}$ est un produit scalaire ds $H_0^1(\Omega)$, donc $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme hilbertienne ds $H_0^1(\Omega)$.

$(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{1,\Omega})$ est un esp de Hilbert.

• Espaces $L^p(\Omega)$:

Définition : soit p un élément de $[1, +\infty[$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$: on appelle esp de Lebesgue, et on note $L^p(\Omega)$, l'esp vect des (classe de) fcts numériques u de Ω ds $\mathbb{C}$, Lebesgue mesurables, vérifiant:

1. si $1 \leq p < +\infty$, $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty$,