Série de T.D n° 2 (Convergence des dist.)

Ex 1 Calculer les limites, dans $D'(\Omega)$ des distributions suivantes : $A_n = \sin(nx)$

$B_n = n(g(nx))$ où $g \in L^1(\mathbb{R})$.

$C_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}$

$D_n = e^{inx} \, vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ex 2 : 1) Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1 : T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$ converge dans $D'(\mathbb{R})$.

2) L'ordre de la limite d'une suite de dist. d'ordre m est-il toujours m ?

Ex 3 : On note T_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dist. associée à la fct localement intégrable $t \longmapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$. Montrer que la suite $(T_n)_n$ converge dans $D'(\mathbb{R})$ vers la distribution δ_0.

__Indication__ : On pourra ~~supposer~~ utiliser l'identité : $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \pi/2$.

Ex_4 (Devoir) :

On considère la suite de fcts f_n, pour $n \geq 1$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} \sin^2 nx & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Montrer que f_n définit une distribution T_{f_n} pour tout $n \geq 0$.

2) Soit φ une fct de $D(\mathbb{R})$.

a) Calculer la limite $\frac{\sin^2 t}{t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)$, $n \to \infty$

et montrer que $\left|\frac{\sin^2 t}{t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| \leq M \frac{\sin^2 t}{t^2}$;

où M est une constante positive qui dépend de φ.

b) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 nx}{nx^2} \varphi(x)\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt.$$

Déduire que $(T_{f_n})_n$ converge vers $\pi \delta_0$

Indication : On peut utiliser que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \pi$$

Ex 5 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Une série de dist. $\sum T_n$ est dite convergente dans $D'(\Omega)$ lorsque la suite des sommes partielles l'est.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{1/n}$ converge dans $D'(]0,+\infty[)$.

2) Montrer que si la serie $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{1/n}$ converge dans $D'(\mathbb{R})$ alors la serie numérique $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

3) On suppose que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. On pose pour tout $N \geq 1$, $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ et $A_0 = 0$, de telle manière que $a_n = A_n - A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

a) Montrer que si $\varphi \in D(\mathbb{R})$ alors la serie numérique $\sum_{n\geq 1} A_n \left(\varphi(1/n) - \varphi(1/n+1)\right)$ converge.

b) En déduire que $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{1/n}$ converge dans $D'(\mathbb{R})$.