Chapitre 2 : Filtres numériques

1. Systèmes discrets

1.1. Définition

Un système discret peut être modélisé par un opérateur T[.] qui agit sur une séquence d'entrée $x(n)$ et délivre à sa sortie une séquence $y(n)$.

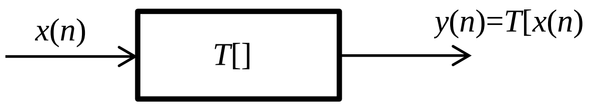

Figure 1 : Système discret

1.2. Linéarité

Si $T[x_1(n)]=y_1(n)$ et $T[x_2(n)]=y_2(n)$ alors $T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$

1.3. Réponse impulsionnelle

$$h_k(n) = T\left[\delta(n-k)\right]$$

$$y(n) = T\left[x(n)\right] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T\left[\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_k(n)$$

1.4. Invariance dans le temps

$$y(n) = T\left[x(n)\right] \qquad y(n-k) = T\left[x(n-k)\right]$$

$$T\left[\delta(n-k)\right] = h(n-k) = h_k(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = x(n)*h(n) = \text{convolution discrète de } x(n) \text{ et } h(n)$$

Exemple

$$h(n) = a^n u(n), \quad 0 < a < 1$$

$$= \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

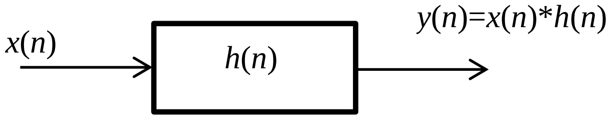

Figure 2 : Système linéaire invariant dans le temps

$x(n)=u(n) - u(n - N)$: impulsion rectangulaire

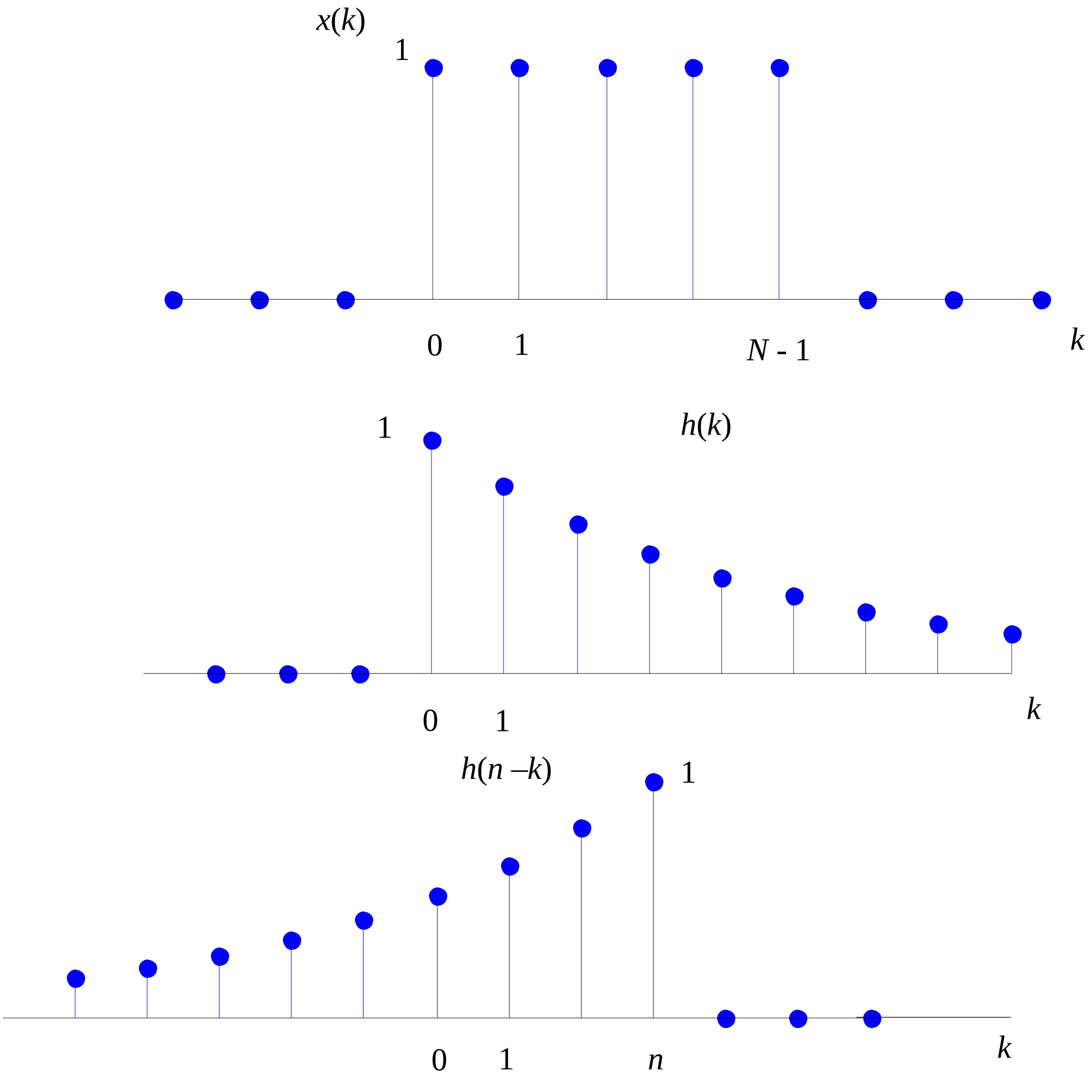

Figure 3 : Etapes de calcul de la convolution

- $n<0 \quad y(n)=0$
- $0 \le n < N \quad y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^{n} \dfrac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$
- $n \ge N \qquad y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^{n} \dfrac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$

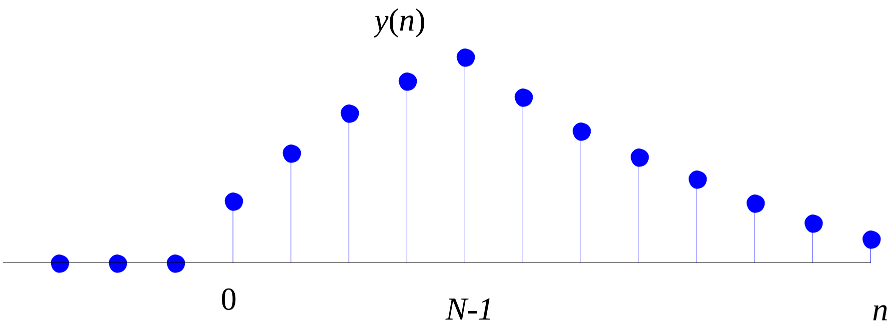

Figure 4 : Résultat de la convolution

1.5. Stabilité et causalité

Stabilité : Le système est dit stable si à une entrée bornée, il fait correspondre une sortie bornée.

Le système est stable si $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$

Preuve

$x(n)$ borné $\Rightarrow$ $|x(n)| < M \quad \forall n$

$$y(n) = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)||h(n-k)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(n-k)| < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(n-k)| < \infty$$

Causalité : Un système est causal si sa sortie dépend de l'instant présent est des instants passés mais pas des instants futurs :

$$y(n_0) = T[x(n); n \leq n_0]$$

Le système est causal si $h(n)=0$ pour $n<0$

Séquence causale

$x(n) = 0$ pour $n<0$

Exemple

$h(n)=a^n u(n)$

- $h(n)=0$ pour $n<0$ $\Rightarrow$ Le système est causal
- $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|}$ si $|a| < 1$

1.6. Systèmes avec et sans mémoire

Un système est dit sans mémoire ou statique si pour chaque valeur de la variable indépendante, la sortie à un instant donné dépend uniquement de l'entrée au même instant.

Exemple : $y(n)=x(n) - x^2(n)$ ce système est sans mémoire

1.7. Système inverse

Un système est dit inversible si différentes entrées conduisent à différentes sorties. Si le système est inversible alors il existe un système inverse qui lorsqu'on le met en cascade avec le système original fournit une sortie $w(n)$ égale à l'entrée $x(n)$ du premier système.

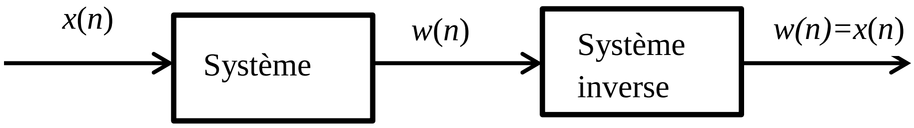

Figure 5 : Système inverse

2. Equation aux différences finies

Une classe importante des systèmes est celle caractérisée par une équation de récurrence (équation aux différences finies) à coefficients constants :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Système causal

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k)$$

Figure 6 : Système caractérisé par une équation aux différences finies

Exemple :

$y(n) = ay(n-1) + x(n)$

Déterminons la réponse impulsionnelle $h(n)$ de ce système causal

$x(n)=\delta(n)$

$h(n)=0$ si $n<0$

$h(0)=ah(-1)+x(0)=1$

$h(1)=ah(0)+x(1)=a$

$h(2)=ah(1)+x(2)=a^2$

$\vdots$

$h(\mathrm{n})=a^n$

• Systèmes RII et RIF

Si $h(n)$ est de durée fine, le système est dit à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Si $h(n)$ est de durée infine, le système est dit à réponse impulsionnelle infinie (RII)

N : ordre du système

• Si N=0

$y(n)=\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$: Système non récursif (RIF)

$$h(k)=\begin{cases}\frac{b_k}{a_0} & k=0,1,\cdots,M\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

• Si N≠0 le système est non récursif (RII)

3. Transformée en Z

3.1. Définition

Si on applique le signal $x(n)=z^n$ à l'entrée d'un système linéaire invariant on obtient à la sortie:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{n-k}=z^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}=H(z)z^n$$

où $H(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$

Si on pose $z=e^{j\omega}$, on obtient la transformée de Fourier.
En considérant que z est une variable complexe, on obtient une fonction transformée définie dans tout le plan complexe appelée transformée en Z.

La transformée en Z (TZ) d'un signal x(n) est définie par:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

z est une variable complexe: $Z=r\,e^{j\omega}$.

$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}$: transformée de Fourier de $x(n)r^{-n}$.

Si $|z|=1$, la TZ se réduit à la transformée de Fourier à temps discret (Chapitre 3).

3.2. Exemples

• Impulsion unité

Soit x(n)=δ(n)

On a $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$

$\delta(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} 1$

• Echelon unité

Soit x(n)=u(n)

On a $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$ =somme d'une suite géométrique de raison z^{-1}.

Cette somme ne sera finie que si $|z|^{-1} < 1 \Rightarrow |z > 1|$

On obtient alors:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

• Exponentielle réelle

Soit $x(n)=a^n u(n)$

On a $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(az^{-1}\right)^n$

Cette somme ne sera finie que si $a|z|^{-1} < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

On obtient alors

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

3.3. Relation entre la transformée en Z et la transformée de Fourier

Lorsque $|z| = 1$, la TZ se réduit à la transformée de Fourier

$$X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \left|X(z)\right|_{z=e^{j\omega}}$$

Si la transformée de Fourier converge.

La transformée de Fourier est égale à la TZ évaluée sur le cercle unité du plan Z si le cercle unité appartient au domaine de convergence.

Exemple

$x(n)=a^n u(n)$

Le cercle unité appartient au domaine de convergence de X(z) si $|a| < 1$. Dans ce cas la transformée de Fourier est:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

Si $|a| > 1$ le cercle unité n'appartient pas au domaine de convergence de X(z) et x(n) ne possède pas de transformée de Fourier.

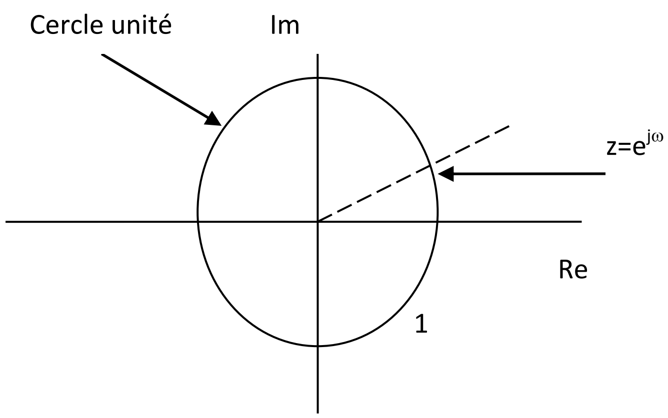

Figure 7 : Représentation du plan Z

3.4. Convergence de la TZ

On a:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x(-n) z^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x(n)}{z^{n}}$$

X(z) est une série de Laurent dont les propriétés mathématiques sont connues. Elle converge à l'intérieur d'un anneau (anneau de convergence).

$$R_{-} < |z| < R_{+}$$

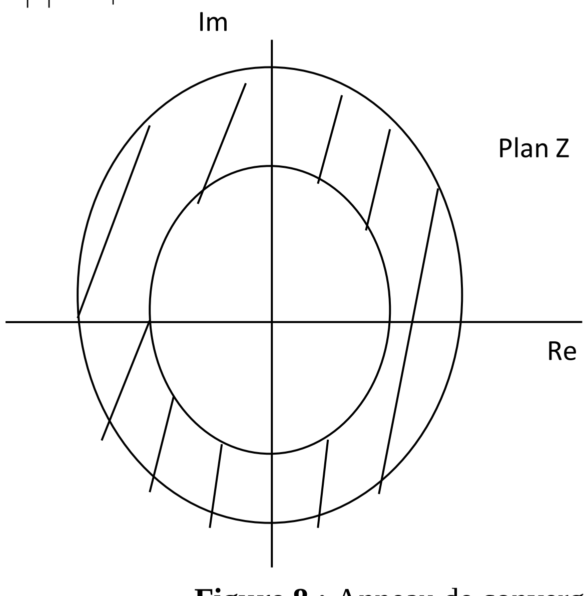

Figure 8 : Anneau de convergence

La fonction X(z) est analytique à l'intérieur du domaine de convergence (DC) et la série est absolument convergente, c'est-à-dire que la série des modules converge.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n) z^{-n} \right| \quad \textit{Converge}$$

En appliquant le critère de Cauchy ou de D'alembert à la série des modules, on obtient les expressions des rayons de convergence:

$$R_- = \lim_{n\to\infty} |X(n)|^{\frac{1}{n}}$$ Critère de Cauchy

$$R_- = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x(n+1)}{x(n)} \right|$$ Critère de d'Alembert

$$R_+ = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{\frac{1}{n}}}$$

$$R_+ = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x(-n-1)}{x(-n)} \right|}$$

Si les limites existent.

Lorsque le DC comprend le cercle unité, le signal x(n) est absolument sommable et donc tend asymptotiquement vers 0 pour n<0 et pour n>0.

Cas particuliers

1. Séquence de longueur finie
x(n) ≠0 uniquement pour $n_1 \leq n \leq n_2$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \qquad x(n)\ borné$$

La TZ converge dans tout le plan Z (sauf éventuellement en z=0 et z=∞).

2. Séquence causale ou tournée à droite
Pour un signal causal $x(n)=0$ pour n<0 ou plus généralement pour un signal nul pour $n<n_1$, la TZ

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Converge à l'extérieur d'un cercle de rayon R_-.

$$|z| > R_-$$

($R_+=+\infty$)

Exemple
$x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

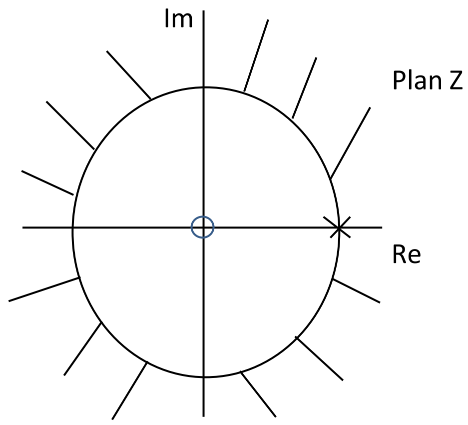

Figure 9 : Domaine de convergence d'une séquence causale

3. Séquence anti-causale ou tournée à gauche

Pour un signal anti-causal x(n)=0 pour n>0 ou plus généralement pour un signal nul pour $n>n_2$, la TZ

$$X(z) \sum_{n=-\infty}^{n2} x(n) z^{-n}$$

Converge à l'intérieur d'un cercle de rayon R_+

$|z| < R_+$

($R_-=0$)

Exemple

$$-b^n u(-n-1) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -b^n & n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} = \sum_{n=-1}^{+\infty} -b^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(b^{-1} z\right)^n$$

Cette somme converge si $\left|b^{-1} z\right| < 1 \Rightarrow |z| < |b|$

et

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - b^{-1} z} = \frac{z}{z - b} \qquad |z| < |b|$$

4. Séquence bilatérale

x(n)≠0 pour -∞<n<+∞

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n}$$

Converge pour $|z| > R_-$ Converge pour $|z| < R_+$

Si $R_- < R_+$, il y a un domaine de convergence commun

$R_- < |z| < R_+$ X(z) converge

Si $R_- > R_+$ X(z) diverge

Exemple

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ -b^n & n \leq -1 \end{cases} \qquad |a| < |b|$$

$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$$

$$X(z) = \underbrace{\frac{z}{z-a}}_{|z|>|a|} + \underbrace{\frac{z}{z-b}}_{|z|<|b|} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)} \qquad |a| < |z| < |b|$$

3.5. Transformée en Z inverse

Pour calculer la transformée en Z inverse, il faut toujours définir le domaine de convergence de la TZ.
La TZ inverse est donnée par:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

c est un contour fermé tracé dans le domaine de convergence et entourant l'origine du plan z.

Calcul de la TZ inverse

- **Théorème des résidus**

Si $X(z)$ est une fonction rationnelle, l'intégrale peut être calculée en utilisant le théorème des résidus:

$$x(n) = \sum \left\{ \text{résidus de } X(z) z^{n-1} \text{ aux pôles intérieurs à c} \right\}$$

Pour $n<0$, il est préférable d'utiliser l'expression suivante:

$$x(n) = -\sum \left\{ \text{résidus de } X(z) z^{n-1} \text{ aux pôles extérieurs à c} \right\} \qquad n<0$$

$$X(z) z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^s}$$

$z=z_0$ pôle d'ordre s de $X(z)z^{n-1}$

$$\mathrm{Re}\left[X(z)z^{n-1} \text{ en } z=z_0\right] = \frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{d^{s-1}\psi(z)}{dz^{s-1}}\right]_{z=z_0}$$

Si s=1 $\mathrm{Re}\left[X(z)z^{n-1} \text{ en } z=z_0\right] = \psi(z_0)$

Exemple

Soit $X(z) = \dfrac{z}{z-a} + \dfrac{z}{z-b}$ $\qquad |a| < |b|$

1. Le domaine de convergence est l'anneau $|a| < |z| < |b|$

Le contour c est un cercle de rayon $|a| < R < |b|$

$$X(z)z^{n-1} = z^{n-1}\left(\frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}\right) = \frac{z^n}{z-a} + \frac{z^n}{z-b} = \frac{z^n(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}$$

- $n \geq 0$, $z=a$ pôle à l'intérieur du contour c

  $x(n) = \mathrm{Re}\,s_{z=a}\left[\dfrac{z^n}{z-a} + \dfrac{z^n}{z-b}\right] = a^n$

- $n<0$

$$x(n) = -\sum\left\{\text{résidus de } X(z)z^{n-1} \text{ aux pôles extérieurs à c}\right\}$$

$z=b$ pôle à l'extérieur du contour c

$$x(n) = -\mathrm{Re}\,s_{z=b}\left[\frac{z^n}{z-a} + \frac{z^n}{z-b}\right] = -b^n \qquad n<0$$

2. domaine de convergence est l'anneau $|z| > |b|$

$x(n)$ est une séquence tournée à droite (causale). Le contour c est un cercle de rayon $R>b$

- $n \geq 0$

$$x(n) = \sum\left\{\text{résidus de } X(z)z^{n-1} \text{ aux pôles intérieurs à c}\right\}$$

Un pôle en $z=a$ et un pôle en $z=b$

$$x(n) = \mathrm{Re}\,s_{z=a}X(z)z^{n-1} + \mathrm{Re}\,s_{z=b}X(z)z^{n-1} = a^n + b^n$$

- $n<0$

$$x(n) = -\sum\left\{\text{résidus de } X(z)z^{n-1} \text{ aux pôles extérieurs à c}\right\}=0$$

Soit donc $(a^n + b^n)u(n)$

3. Le domaine de convergence est $|z| < |a|$

x(n) est une séquence tournée à gauche (anti-causale)

Le contour c est un cercle de rayon $R<a$

- $n \geq 0$

$$x(n) = \sum \left\{ \text{résidus de } X(z)z^{n-1} \text{ aux pôles intérieurs à c} \right\} = 0$$

- $n<0$

$$x(n) = -\sum \left\{ \text{résidus de } X(z)z^{n-1} \text{ aux pôles extérieurs à c} \right\} = -a^n - b^n$$

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -a^n - b^n & n < 0 \end{cases} = -\left(a^n + b^n\right)u(n)$$

- **Développement en fractions simples**

$$X(v) = \frac{P_M(v)}{Q_N(v)} = \text{rapport de deux polynômes}$$

$v=z$ ou z^{-1}

M degré de $P_M(v)$
N degré de $Q_N(v)$
Soit v_k les pôles de $X(v)$ et n_k leur multiplicité:

$$X(v) = \frac{P_M(v)}{\prod_{k=1}^{r} \left(v - v_k\right)^{n_k}}$$

La décomposition de X(v) en fractions simples donne:

$$X(v) = B_{M-N}v^{M-N} + B_{M-N+1}v^{M-N+1} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_k} \frac{c_{ki}}{\left(v - v_k\right)^i}$$

où

$$c_{ki} = \frac{1}{\left(n_k - i\right)!} \frac{d^{n_k - i}}{dv^{n_k - i}} \left[\left(v - v_k\right)^{n_k} X(v)\right]_{v=v_k}$$

Le signal x(n) est obtenu en sommant les TZ inverses de chacun des termes.

Exemple
Soit à déterminer la séquence causale dont la TZ est donnée par:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - az^{-1}\right)\left(1 - bz^{-1}\right)}$$

$$X(z) = \frac{z^2}{\left(z - a\right)\left(z - b\right)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{\left(z - a\right)\left(z - b\right)} = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - b}$$

$$A=(z-a)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=a}=\frac{z}{z-b}\Big|_{z=a}=\frac{a}{a-b}$$

$$A=(z-b)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=b}=\frac{z}{z-a}\Big|_{z=a}=\frac{b}{b-a}$$

Soit donc

$$X(z)=\frac{a}{a-b}\frac{z}{z-a}+\frac{b}{b-a}\frac{z}{z-b}$$

En prenant la TZ inverse de chacun des deux termes, on obtient:

$$x(n)=\frac{a}{a-b}a^n u(n)+\frac{b}{b-a}b^n u(n)$$

3.6. Propriétés de la transformée en Z

3.6.1. Linéarité

Si

$$x(n)\overset{TZ}{\leftrightarrow} X(z) \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

et $y(n)\overset{TZ}{\leftrightarrow} Y(z) \qquad R_{y-}<|z|<R_{y+}$

alors

$$ax(n)+by(n)\overset{TZ}{\leftrightarrow} aX(z)+bY(z) \qquad R_{-}<|z|<|R_{+}|$$

$R_-=\max(R_{x-}, R_{y-})$
$R_+=\min(R_{x+}, R_{y+})$

3.6.2. Décalage

Si

$$x(n)\overset{TZ}{\leftrightarrow} X(z) \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

alors

$x(n+n_0)\overset{TZ}{\leftrightarrow} z^{n_0}X(z)$ $R_{x-}<|z|<R_{x+}$ (sauf éventuellement à l'origine ou à l'infini)

En particulier, on a $x(n-1) \overset{TZ}{\leftrightarrow} z^{-1}X(z)$

3.6.3. Atténuation

Si

$$x(n)\overset{TZ}{\leftrightarrow} X(z) \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

alors

$$y(n) = a^n x(x) \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad Y(z) = X(z/a) \qquad |a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$$

3.6.4. Inversion du temps

Si

$$x(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

alors

$$y(n) = x(-n) \quad \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad Y(z) = X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

3.6.5. Signal conjugué

Si

$$x(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

alors

$$y(n) = x^*(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad Y'z) = X^*(z^*) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

3.6.6. Théorème de la valeur initiale

Si x(n) est un signal causal (x(n)=0 pour n<0) alors

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

3.6.7. Multiplication par *n*

Si

$$x(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

alors

$$y(n) = nx(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad Y'z) = -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

3.6.8. Convolution

Soit

$$x(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

et $y(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} \quad Y(z) \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$

$$w(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

$W(z)=X(z)Y(z)$

Le domaine de convergence de W(z) est l'intersection des domaines de convergence de X(z) et Y(z).

Preuve

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-k)z^{-n}$$

En posant *n*-*k*=*m*, il vient

$$Y(z) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) z^{-m} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) z^{-m} = X(z)Y(z)$$

Exemple
Soit $x(n)=u(n)$ et $y(n)=a^n u(n)$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{z}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$W(z) = X(z)Y(z) = \frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)}$$

$$\frac{W(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-1)} = \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{z-b}$$

$$c_1 = (z-a)\frac{W(z)}{z}\bigg|_{z=a} = \frac{z}{z-1}\bigg|_{z=a} = \frac{a}{a-1}$$

$$c_2 = (z-1)\frac{W(z)}{z}\bigg|_{z=1} = \frac{z}{z-a}\bigg|_{z=a} = \frac{1}{1-a}$$

Soit donc

$$W(z) = \frac{a}{a-1}\frac{z}{z-a} - \frac{1}{a-1}\frac{z}{z-1}$$

et

$$u(n) = \frac{a}{a-1} a^n u(n) - \frac{1}{a-1} u(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$$

3.6.9. Convolution complexe

Soit

$x(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

et $y(n) \overset{TZ}{\leftrightarrow} Y(z) \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$

w(n)=x(n)y(n)

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) \frac{dv}{v} \qquad R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$$

c contour fermé tracé dans le domaine de convergence de $X\left(\frac{z}{v}\right)$ et Y(v).

Preuve
Soit $w(n)=x(n)y(n)$

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n) z^{-n}$$

$$y(n) = \frac{1}{2\pi\, j} \oint_c Y(v) v^{n-1} dv$$

Soit donc

$$W(z) = \frac{1}{2\pi\, j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \oint_c Y(v) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} v^{-1} dv = \frac{1}{2\pi\, j} \oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] v^{-1} Y(v) dv$$

$$= \frac{1}{2\pi\, j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) v^{-1} dv$$

3.6.10. Relation de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\aleph} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi\, j} \oint_c X(v) Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1} dv$$

c contour fermé tracé dans le domaine de convergence de $X(v)$ et $Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)$.

Preuve

Soit w(n)=x(n)y*(n)

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) z^{-n} = \frac{1}{2\pi\, j} \oint_c X(v) Y^*\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$$

Posons z=1, il vient

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi\, j} \oint_c X(v) Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1} dv$$

Si X(v) et Y(v) convergent sur le cecle unité, on peut intégrer sur le cercle unité v=e$^{j\omega}$ et la relation de Parseval devient:

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi\, j} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) Y^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

En prenant *x*(*n*)=*y*(*n*), on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 d\omega$$

3.6.11. Corrélation

La fonction de corrélation mutuelle (intercorrélation) de deux signaux réels à énergie finie est donnée par

$$\varphi_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n+k) = \varphi_{yx}(-n)$$

On vérifie que

$$\varphi_{xy}(n) = x(-n) * y(n)$$

La fonction d'autocorrélation du signal x(n) est donnée par:

$$\varphi_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)x(n+k) = x(-n) * x(n)$$

En appliquant la propriété de convolution et d'inversion temporelle, on obtient :

$$\Phi_{xy}(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)Y(z)$$

Le domaine de convergence de $\Phi_{xy}(z)$ est le domaine de convergence de $X\left(\frac{1}{z}\right)$ et Y(z).

On a $\Phi_{xx}(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)X(z)$

En posant $z=e^{j\omega}$, on obtient

$$\Phi_{xy}\left(e^{j\omega}\right) = X^*\left(e^{j\omega}\right)Y\left(e^{j\omega}\right)$$

$$\Phi_{xx}\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

4. Systèmes à temps discret – fonction de transfert

Pour un système linéaire invariant discret de réponse impulsionnelle *h*(*n*) excité par une entrée *x*(*n*), le signal de sortie est :

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

En passant au domaine de la TZ, il vient:

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$$

La TZ de *h*(*n*) notée *H*(z) est fonction de transfert ou transmittance du système.
Sur le cercle unité $z=e^{j\omega}$ (si le cercle unité appartient au domaine de convergence), la fonction de transfert se réduit à la réponse en fréquence du système.

Notation

Sous forme polaire, la réponse en fréquence s'écrit comme:

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$$

$|H(\omega)|$: amplitude

$\theta(\omega)$: phase

$\tau(\omega) = -\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ est le délai de groupe.

Si h(n) est réel alors $H^*(z)=H(z^*)$

$H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$

$|H(\omega)|$ est une fonction paire de ω et θ(ω) une fonction impaire de ω.

En passant aux log, il vient

$Ln\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right) = Ln\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right) + j\theta(\omega)$.

$\alpha(\omega) = Ln\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)$: Gain (en Népers)

$\alpha'(\omega) = 20\log_{10}\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)$: Gain en décibels

Stabilité
Un système est stable si sa réponse impulsionnelle est absolument sommable:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

$\Rightarrow$ le cercle unité appartient au domaine de convergence de H(z).

Si le système est causal et que H(z) est rationnelle, le domaine de convergence est l'extérieur du cercle passant par le pôle de grand module. Par conséquent, pour un système stable et causal, tous les pôles doivent se trouver à l'intérieur du cercle unité.

5. Réalisation des systèmes à temps discret

Il existe une infinité de structures permettant de réaliser une même fonction de transfert H(z), cependant si deux structures sont équivalentes lorsque les opérations artithmétiques effectuées par le système discret ont une précision infinie, elles peuvent différer totalement lorsqu'on introduit les effets de quantification (précision finie des opérations arithmétiques).
On distingue trois types de composants :

Composants

- Le sommateur

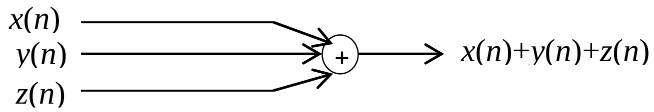

Figure 10 : Sommateur

- Le multiplieur par une constante

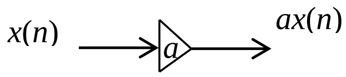

Figure 11 : Multilieur par une constante

- L'élément délai

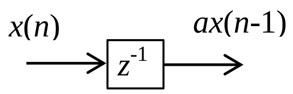

Figure 12 : Retard ou délai

Une structure est l'assemblage de ces trois composants.

Exemple
$y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+bx(n)$

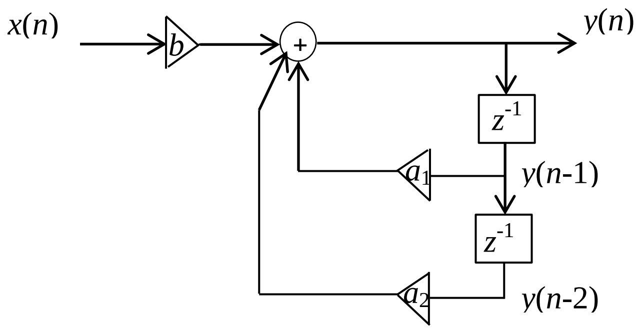

Figure 13 : Structure d'un système récursif d'ordre 2

5. Implémentation des filtres numériques

5.1. Implémentation des filtres RII

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}, \qquad N \neq 0$$

5.1.1. Structure directe

Représentation immédiate de l'équation de récurrence.

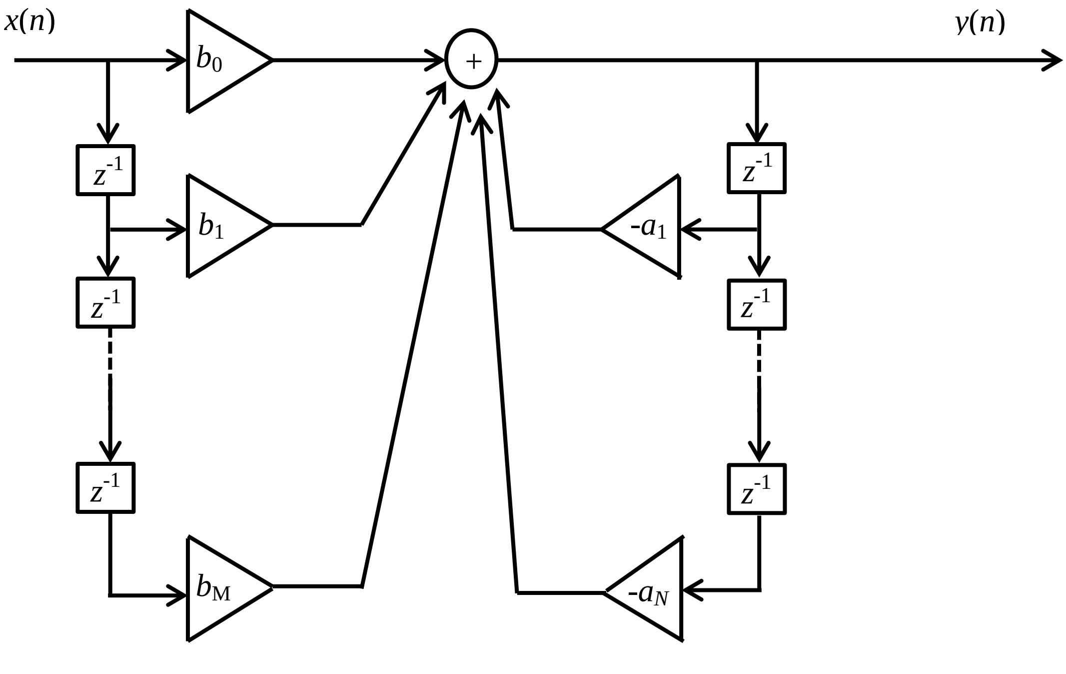

Figure 14 : Structure directe

M+N+1 multiplications

M+N additions

M+N délais

5.1.2. Structure directe canonique

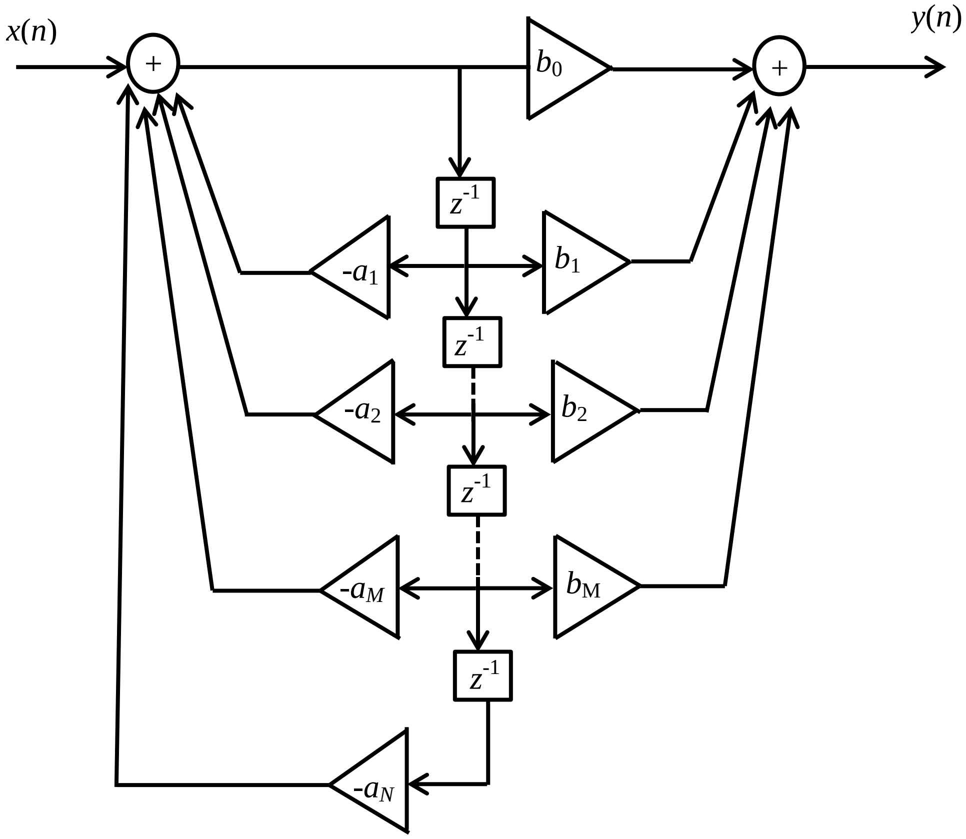

Figure 15 : Structure directe canonique

Utilise le nombre minimum de délais.

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \qquad Y(z) = W(z).\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

5.1.3 Structure cascade

Factorisation de la fonction de transfert :

$$H(z) = K \prod_{i=1}^{Q} \frac{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-1}}{1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-1}}$$

Si on des cellules du premier ordre : a_{2i} ou b_{2i}=0

Mise en cascade des cellules élémentaires.

Chaque cellule peut être réalisée, par exemple, par la structure directe canonique.

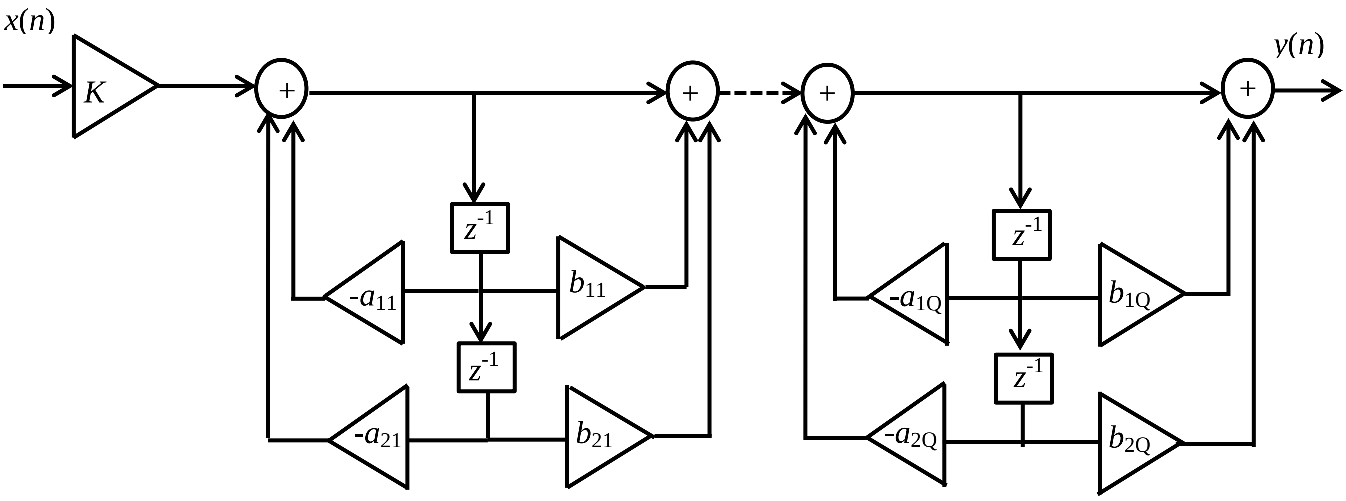

Figure 16 : Structure canonique cascade

5.1.4 Structure parallèle

Décomposition de H(z) en fractions simples (en z^{-1})

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-N} C_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{Q} \frac{C_{0i} + C_{1i} z^{-1}}{1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-i}}$$

En groupant les pôles réels en pairs

et mise en parallèle des cellules élémentaires.

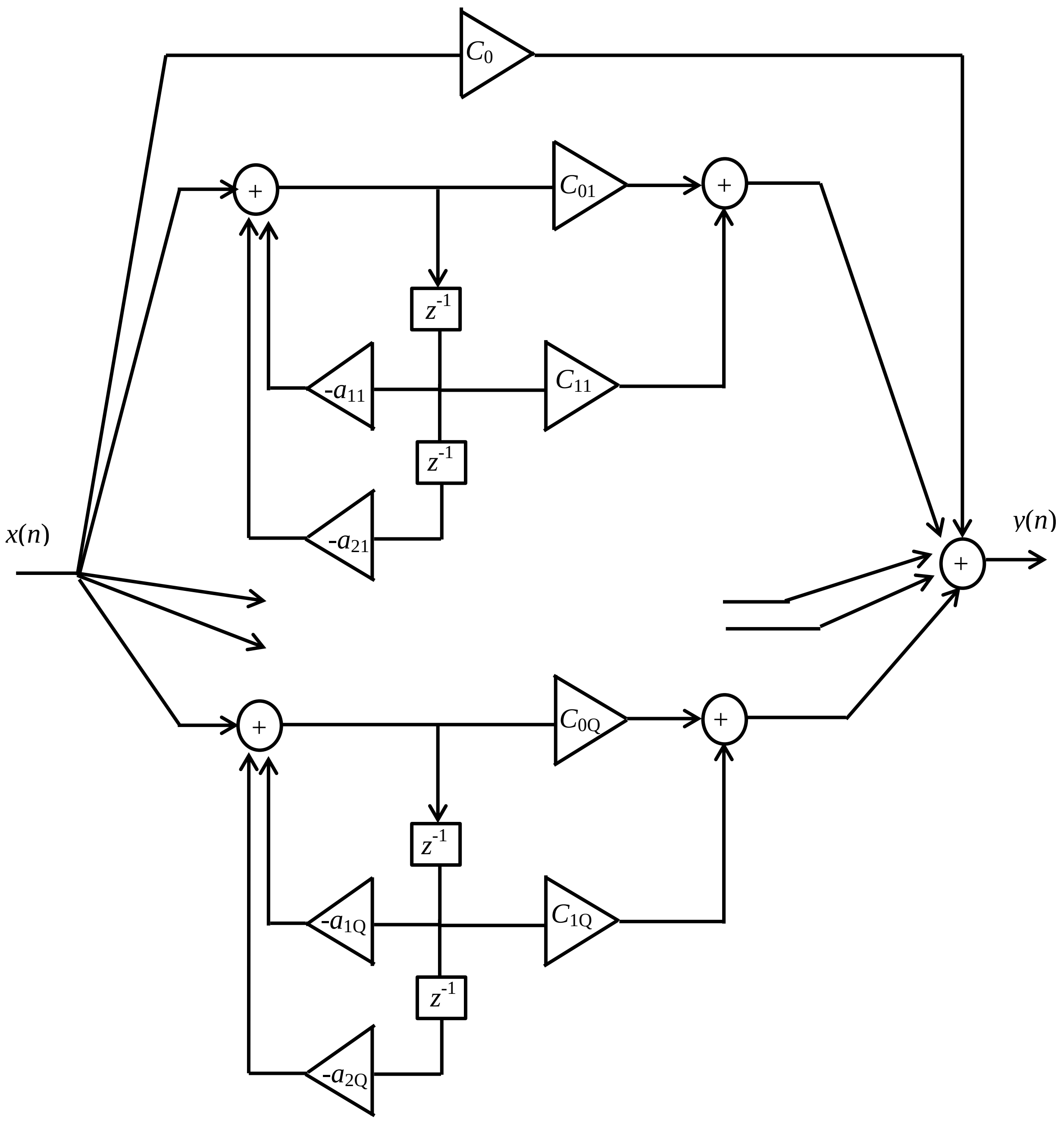

Figure 17 : Structure canonique parallèle

5.1.5 Formes transposées

Une propriété des graphes permet, à partir de chaque structure, de trouver une structure dite transposée ayant la même fonction de transfert :

- Inverser le sens de chaque branche (en conservant les mêmes coefficients) multiplicatifs
- Inverser entrée et sortie
- Les nœuds des branchements deviennent sommateurs
- Les sommateurs deviennent des nœuds de branchements.

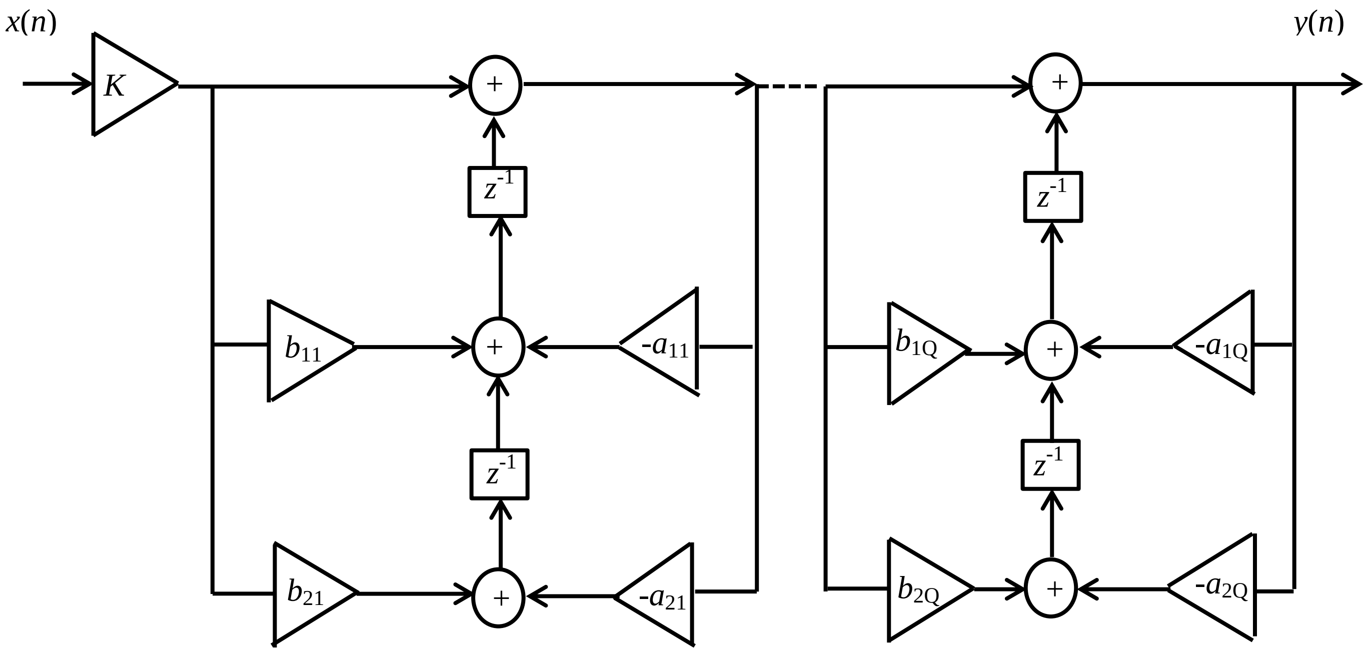

Figure 18 : Structure cascade transposée

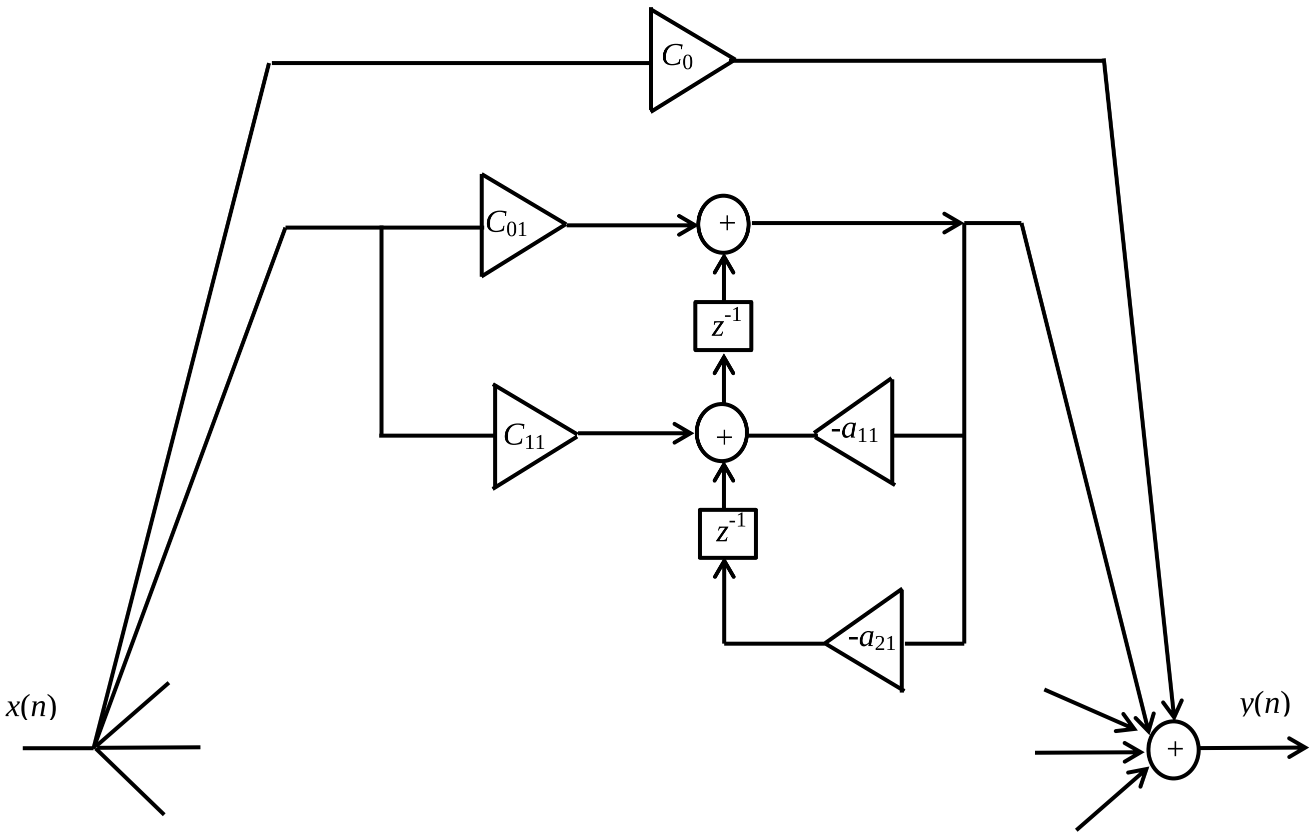

Figure 19 : Structure parallèle transposée

5.2. Implémentation des filtres RIF

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M} h_i z^{-i} \quad \text{polynôme en } z^{-1}$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} h_i x(n-i)$$

5.2.1 Structure directe

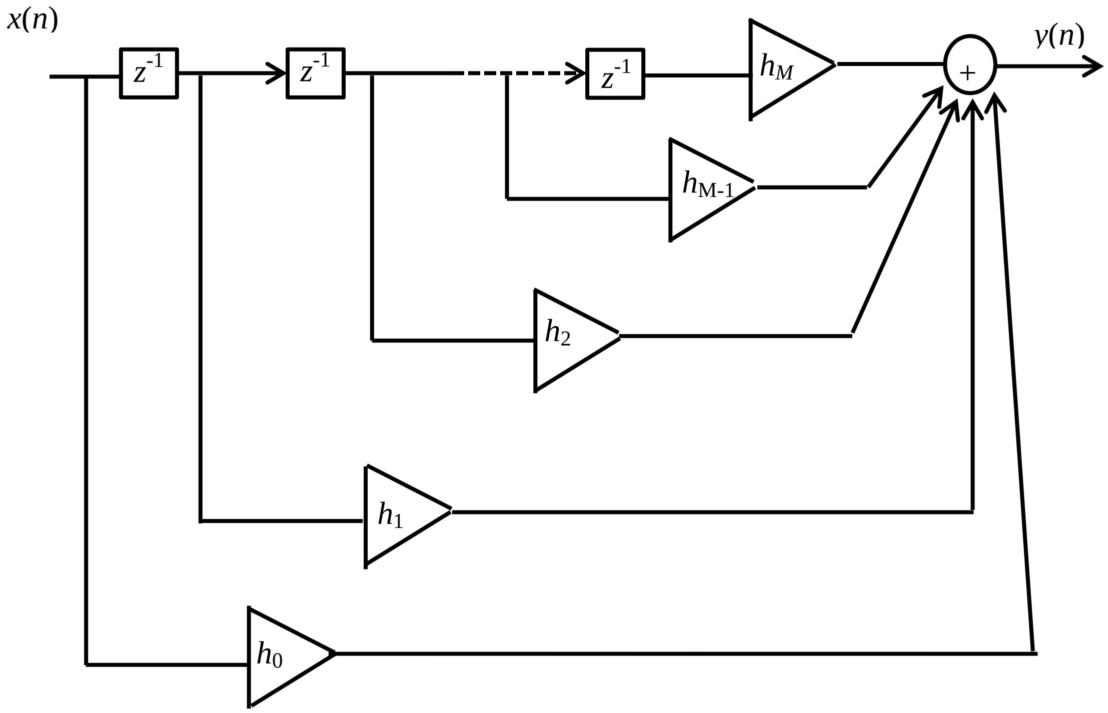

Figure 20 : Structure directe d'un filtre RIF

M+1 multiplieur

1 sommateur

5.2.1 Structure cascade

$$K\prod_{i=1}^{Q}\left(1+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-1}\right)$$

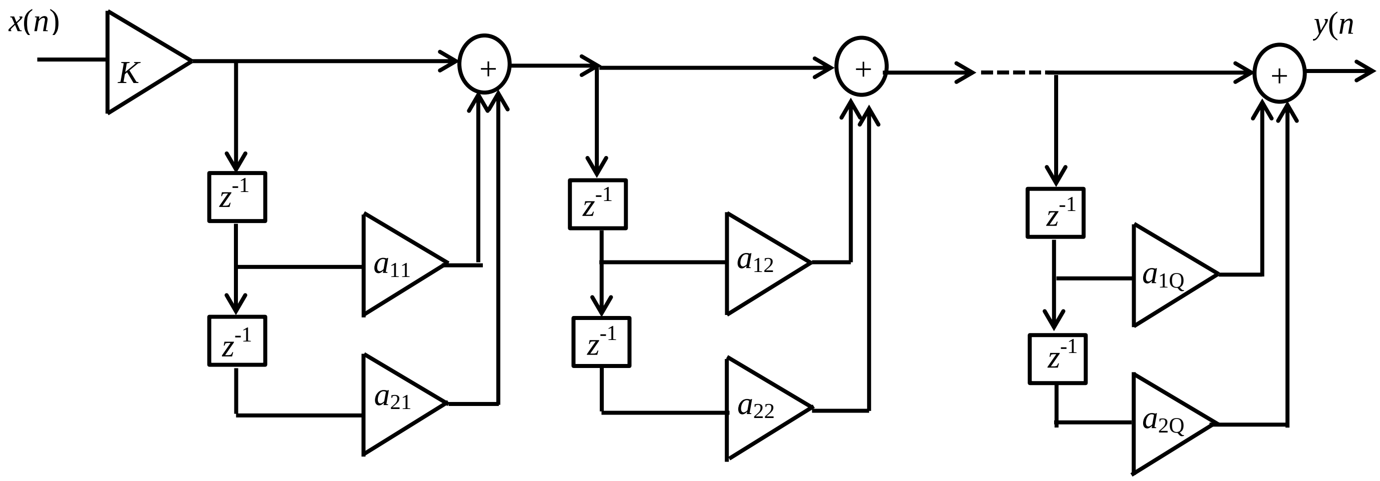

Figure 21 : Structure cascade d’un filtre RIF