Chapitre 2

La Statique des solides

1.Définitions générales

La mécanique, est la science des mouvements, composée de trois grandes parties:

1.1. Statique

La statique étudie les conditions nécessaires pour que les corps restent en équilibre.

1.2. Cinématique et la cinétique

La cinématique et la cinétique étudient le mouvement des corps sans faire intervenir les actions qui les ont mis en mouvement.

1.3.Dynamique

La dynamique établit le lien entre les mouvements des corps et les actions mécaniques qui s'exercent sur eux.

2.Définition du référentiel Galiléen

Un référentiel est un solide par rapport auquel on repère une position ou un mouvement (repère spatial, repère temporel…etc). Un référentiel est Galiléen lorsqu'il ne subit aucune accélération. Il peut avoir un mouvement rectiligne et uniforme.

3.Corps en équilibre

Lorsqu'un corps est soumis à plusieurs forces, dont les effets se compensent, la nature de son mouvement ne varie pas. On dit que le corps est en équilibre, autrement dit que tout les corps qui sont immobiles ou bien en mouvement rectiligne et uniforme se trouvent en équilibre.

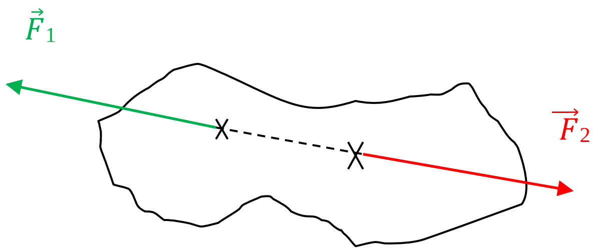
4.Équilibre sous l'action de deux forces

Si le corps est soumis à deux

forces, et pour qu'il soit en équilibre

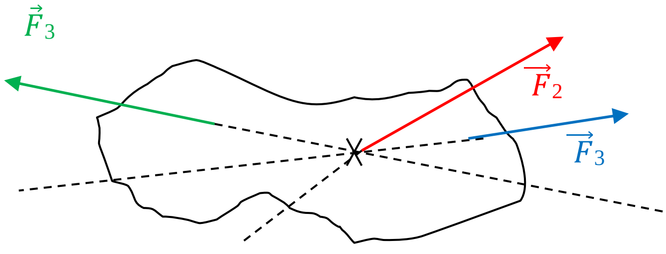
il faut que : $\overrightarrow{F}_1 = -\overrightarrow{F}_2 \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{F}_1 = -\overrightarrow{F}_2 \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{0}$$



Équilibre sous l'action de 2 forces

5.Équilibre sous l'action de trois forces



Équilibre sous l'action de 3 forces

Si le corps est soumis à trois

forces, et pour qu'il soit en équilibre

il faut que les trois $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$

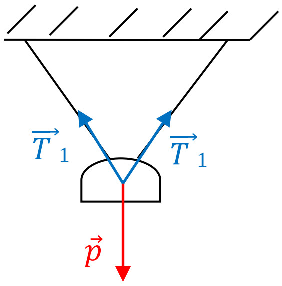
se trouvent dans un même plan (coplanaires)

-les lignes d'actions (droites qui portent les vecteurs forces)

passe par un même point (les forces sont concourantes).

-la résultante $\sum \vec{F}$ est nulle : $\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}}$

Exemple d'application



Comme la lampe est immobile, elle se trouve

en équilibre : $\boxed{\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{p} = \vec{0}}$

En règle générale, si le corps est soumis à plusieurs

forces (supérieur à 3) ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,……. $\vec{F}_n$) est en équilibre si et seulement si la résultante de toutes les forces qui lui sont appliquées est nulle.

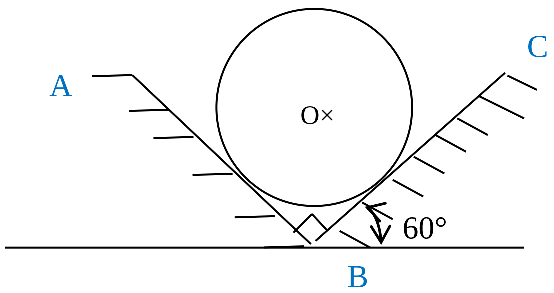
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}}$$

N.B

Il n'est pas nécessaire que toutes les forces

Soit coplanaires ou concourantes.

Exemple d'application



Une bille homogène de poids 12 kN repose sur

deux plan inclinés polis AB et BC perpendiculaire

entre eux, le plan BC fait un angle de 60° avec l'horizontal. Déterminer les réaction de deux plans inclinés sur la bille.

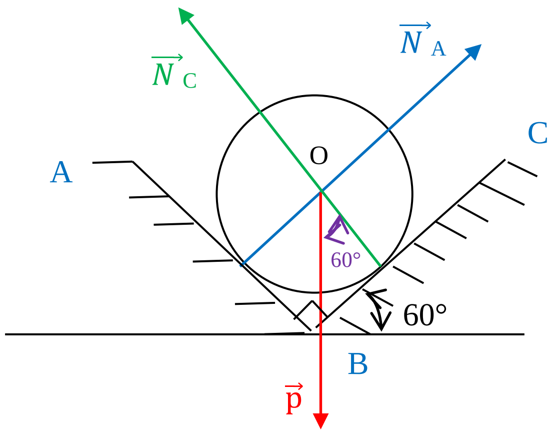
Solution

La bille est soumise à :

-Son poids(p) dirigé verticalement vers le bas.

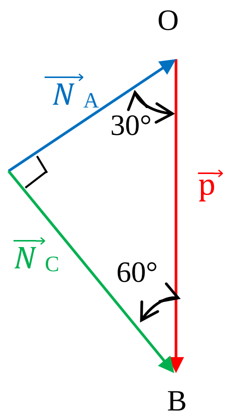
-La réaction (NA) du plan AB vers le centre « O » de la bille.

-La réaction (NC) du plan BC vers le centre « O » de la bille.



6.Condition d'équilibre géométrique

Il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé. Puisque le solide est en équilibre, le triangle des forces $\vec{p}$, $\vec{N}_A$, $\vec{N}_C$ doit être fermé, d'où l'extrémité du vecteur force $\vec{N}_C$ doit se confondre avec l'origine du vecteur $\vec{p}$ donc :



$$\frac{N_A}{\sin 90} = \frac{N_C}{\sin 30} = \frac{P}{\sin 90}$$

D'où

$$N_A = \frac{\sin 60P}{\sin 90} = \frac{\sqrt{3}}{2} P = 10.39 \text{ kN}$$

$$N_c = \frac{\sin 30P}{\sin 90} = 0.5\ P = 6 \text{ kN}$$

7..Moment d'une force

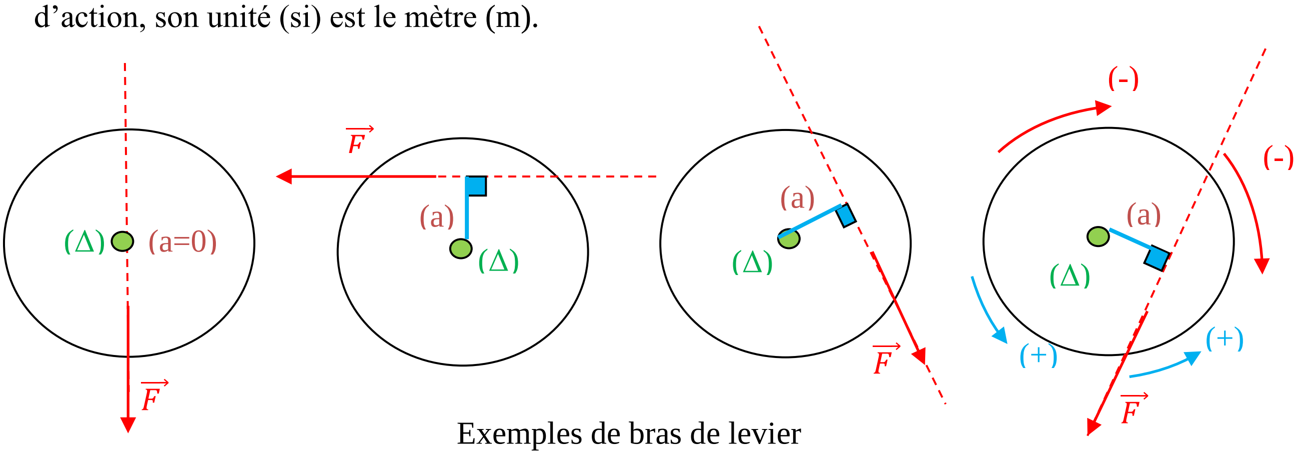
7.1.Définition

On appelle moment d'une force par rapport à un axe de rotation « Δ » le produit de la norme « F » de la force et de son bras de levier « a ».

Symbole et formule : $\boxed{\overrightarrow{M_\Delta}\ (\vec{F}\,) = \pm F \times a}$ Unité SI : Newton mètre (N.m ou Nm)

7.2. Le bras de levier

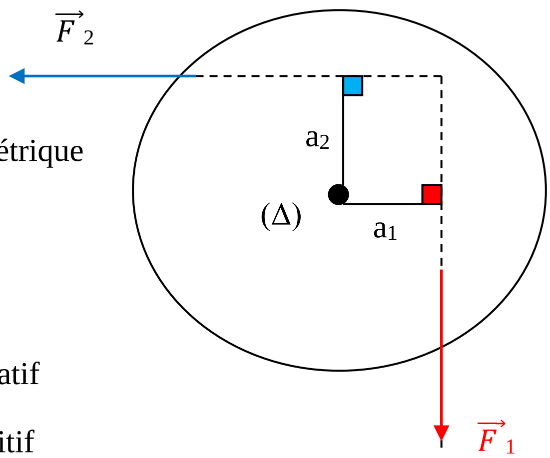
On appelle « bras de levier » (a) d'une force « $\vec{F}$ » par rapport à un axe de rotation (Δ) la distance entre la ligne d'action de « $\vec{F}$ » et l'axe de rotation. C'est la longueur du segment qui lie l'axe (Δ) à la ligne d'action de la force. Le segment étant perpendiculaire à cette ligne d'action, son unité (si) est le mètre (m).



Exemples de bras de levier

7.3. Signe d'un moment de rotation

Si une force fait tourner un objet dans le sens trigonométrique positif, son moment est positif, si elle le fait tourner dans le sens trigonométrique négatif, son moment est négatif.



$$\overrightarrow{M_\Delta}\left(\vec{F}\right) = -F \times a$$ la figure ci-contre

montre que $\begin{cases} \overrightarrow{M_\Delta}\left(\overrightarrow{F1}\right) = -F1 \times a & \text{Moment négatif} \\ \overrightarrow{M_\Delta}\left(\overrightarrow{F2}\right) = +F2 \times a & \text{Moment positif} \end{cases}$

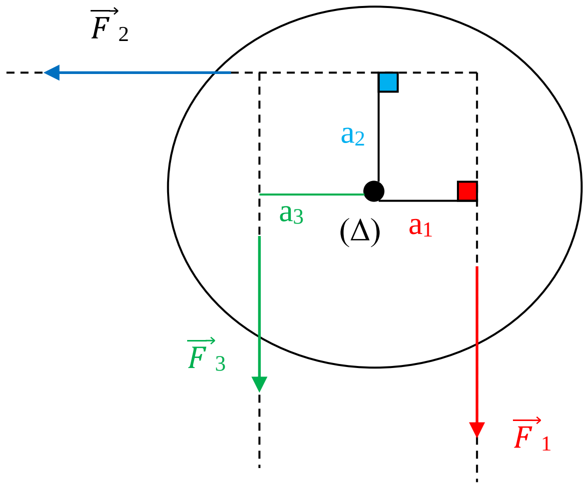
7.4. Équilibre d'un solide en rotation

Un solide ui peut tourner autour d'un axe, est en éuilibre de rotation si et seulement si la somme des moments de toutes les forces qui s'applique au solide est nulle.

Équilibre de rotation :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_\Delta}\left(\overrightarrow{Fi}\right) = 0}$$

7.5. Exemples d'applications



Application 1

d'après la figure ci-contre nous avons :

$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{M_\Delta}\ (\vec{F}i) = 0$$

$a_1 = 2$ cm, $a_2 = 1$ cm, $a_3 = 2$ cm

$F_1 = 4$ N , $F_2 = 3$ N , $F_3 = 2{,}5$ N

$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{M_\Delta}\ (\vec{F}i) = \overrightarrow{M_\Delta}\ (\vec{F1}) + \overrightarrow{M_\Delta}\ (\vec{F2}) + \overrightarrow{M_\Delta}\ (\vec{F3})$$

$\Leftrightarrow \vec{F}_1 . a_1 + \vec{F}_2 . a_2 + \vec{F}_3 . a_3$

$\Leftrightarrow - F_1 . a_1 + F_2 . a_2 + F_3 . a_3$

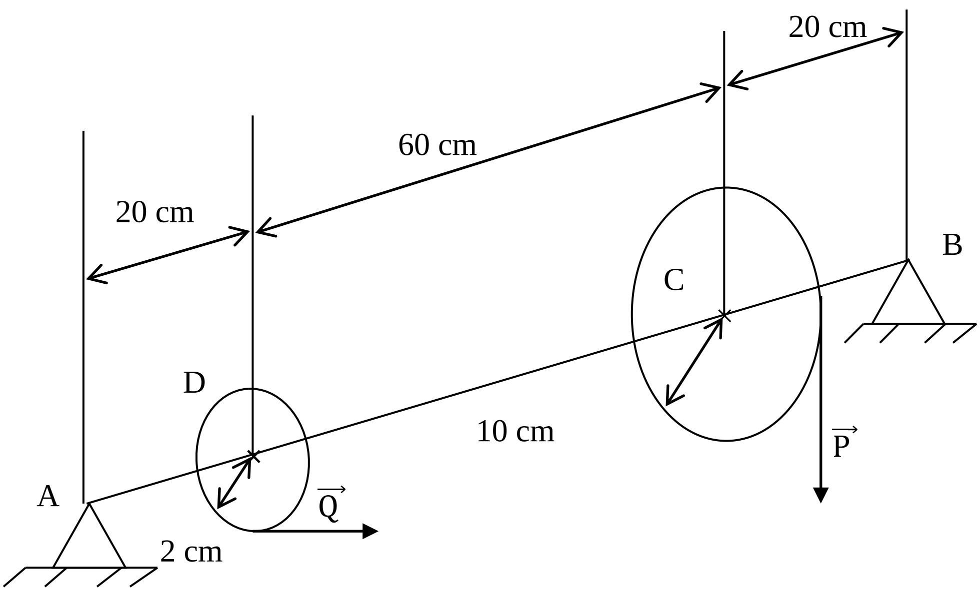
$\Leftrightarrow -4\times2 + 3\times1 + 2.5\times2 = 0$ donc le solide est en équilibre de rotation.

Application 2

Une roue (C) de 20 cm de diamètre et un engrenage (D) de 2 cm de rayon, sont emmanchés sur un arbre horizontal (AB), le reste des dimensions est mentionné sur la figure ci-dessous.

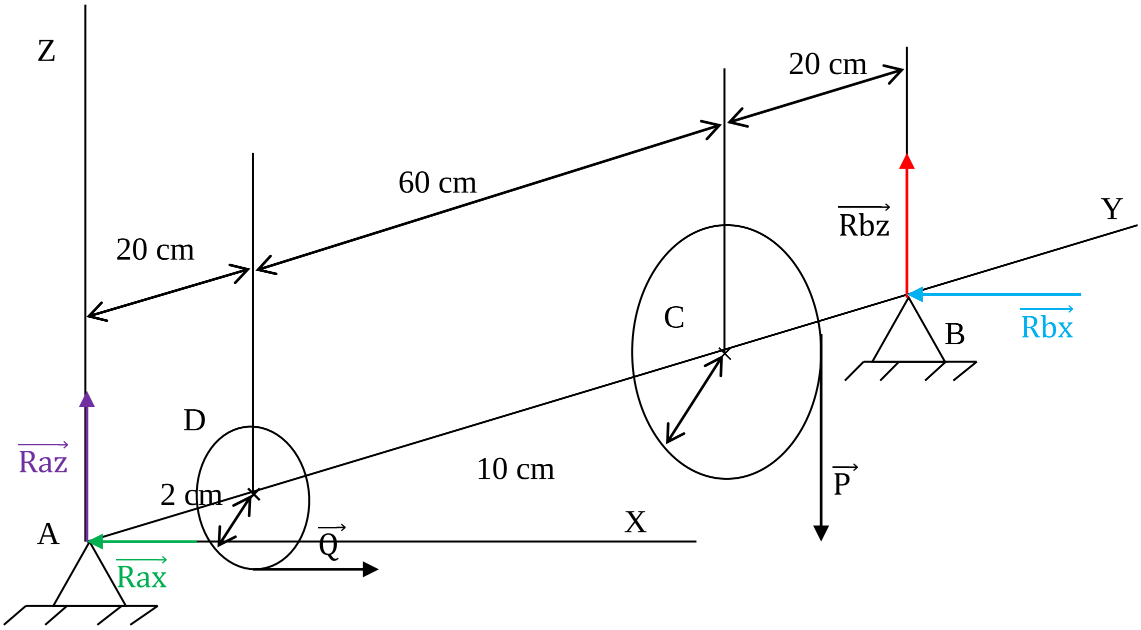
Une force $\overrightarrow{(P)}$ de 10 kN est appliquée suivant la tangente à l'engrenage (D).

Déterminer la force $\overrightarrow{(Q)}$ et les réactions aux appuis A et B en position d'équilibre.



Solution

La roue est devenue libre sous l'action du système de forces quelconque, représenté par la figure ci- dessous :



Afin de déterminer les composantes de la force et celles des réactions, on applique la première condition de la statique, où la somme des forces extérieures appliquées sur le système est nulle. ainsi que la deuxième condition de la statique où la somme des moments des forces extérieures appliquées sur le système est nulle.

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{F}\mathrm{i} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{R_a} + \overrightarrow{R_a} + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F}_x \quad \Leftrightarrow \quad - R_{ax} - R_{bx} + Q = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ax} = [Q - R_{bx}] \ldots..(1)$$

$$\sum \vec{F}_y \quad \Leftrightarrow \quad 0+0+0+0 = 0$$

$$\sum \vec{F}_z \quad \Leftrightarrow R_{az} + R_{bz} - P = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{az} = [P - R_{bz}] \ldots.(2)$$

$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{\mathrm{M}_\mathrm{A}} (\vec{F}\mathrm{i}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \mathrm{M}(\overrightarrow{R_a}) + \mathrm{M}(\overrightarrow{R_b}) + \mathrm{M}(\vec{P}) + \mathrm{M}(\vec{Q}) = \vec{0}$$

Suivant l'axe (ax) : $R_{bz} \cdot 1 - P \cdot (0.8) = 0 \quad \Rightarrow \quad [R_{bz} = 0.8P = 8\ \mathrm{N}]$

Suivant l'axe (ay) : $Q \cdot (0.02) - P \cdot (0.1) = 0 \quad \Rightarrow \quad [Q = \frac{0.1P}{0.02} = 50\ \mathrm{N}]$

Suivant l'axe (az) : $R_{bx} \cdot 1 - Q \cdot (0.2) = 0 \quad \Rightarrow \quad [R_{bx} = (0.2)Q = 10\ \mathrm{N}]$

Des équations (1) et (2) nous trouvons que $[R_{ax} = 40\ \mathrm{N}]$ $[R_{az} = 2\mathrm{N}]$

Donc $[R_a = \sqrt{R_{ax}{}^2 + R_{az}{}^2} = 40.05\ \mathrm{N}]$, $[R_b = \sqrt{R_{bx}{}^2 + R_{bz}{}^2} = 12.8\ \mathrm{N}]$

Application 1

Déterminer les tensions des câbles dans les figures suivantes :

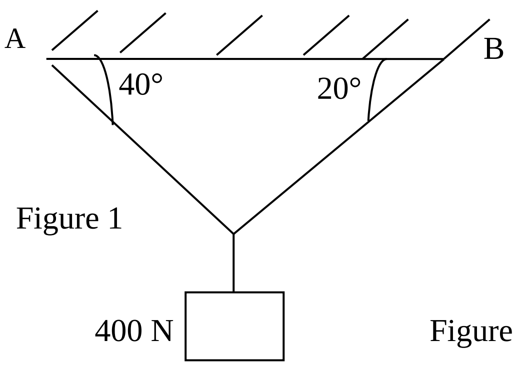


Figure 1

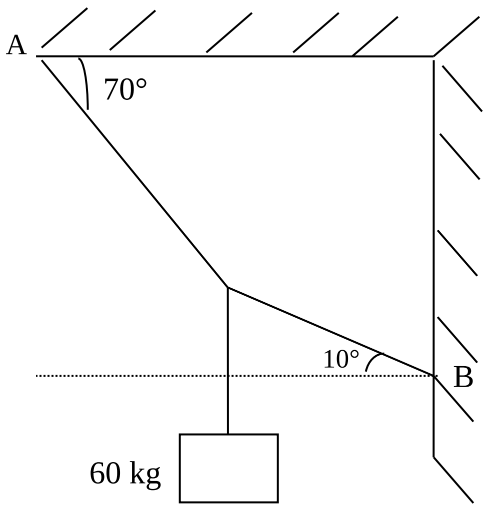
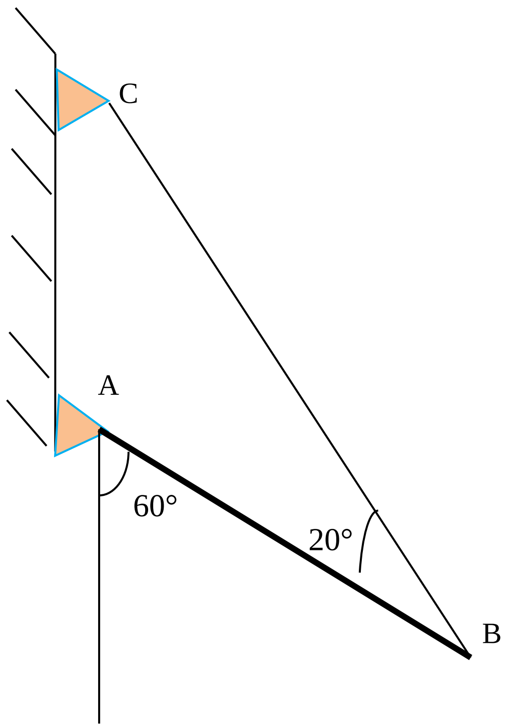


Figure 1

Application 2

Une barre homogène pesant 80 N est liée par une articulation cylindrique en son extrémité « A » à un mur. Elle est retenue sous un angle de 60° avec la verticale par un cable inextensible, de masse négligeable à l'autre extrémité « B ». Le cable fait un angle de 30° avec la barre. Déterminer la tension dans le câble et la réaction au point «A » L est la longueur de la barre. (figure2)

Figure2



8.Principes de Newton

La connaissance des lois de la mécanique générale énoncées par le physicien Newton en 1687 est indispensable afin de situer le cadre de chaque partie de la mécanique. Ces lois, qui s'énoncent sous forme de trois principes, posent comme postulat la forme des relations entre mouvements et actions mécaniques.

8.1.Premier principe : principe d'inertie

Si un corps n'est soumis à aucune force (corps isolé) ou il est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle, alors le centre d'inertie «G » du corps décrit un mouvement rectiligne et uniforme. Donc tout corps demeure dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, par rapport à un référentiel Galiléen, sauf si des forces le contraignent d'en changer. Ce principe énonce le principe de l'équilibre des forces qui constitue l'objet essentiel de la statique.

N.B : un état de repos est un cas particulier du mouvement rectiligne uniforme, la vitesse étant constamment égale à zéro.

Exemples :

Considérons une voiture qui roule à 120 km/h sur une autoroute rectiligne et horizontale.

-Si la norme de la force motrice est exactement égale à la norme des forces de frottement, selon le principe d'inertie, la voiture va suivre un mouvement rectiligne et uniforme.

Si la force motrice est supérieure à la force de frottement, la voiture accélère, où la résultante de toutes les force est vecteur pointant vers l'avant.

Si la force motrice est inférieure à la force de frottement, la voiture accélère, où la résultante de toutes les force est vecteur pointant vers l'arrière.

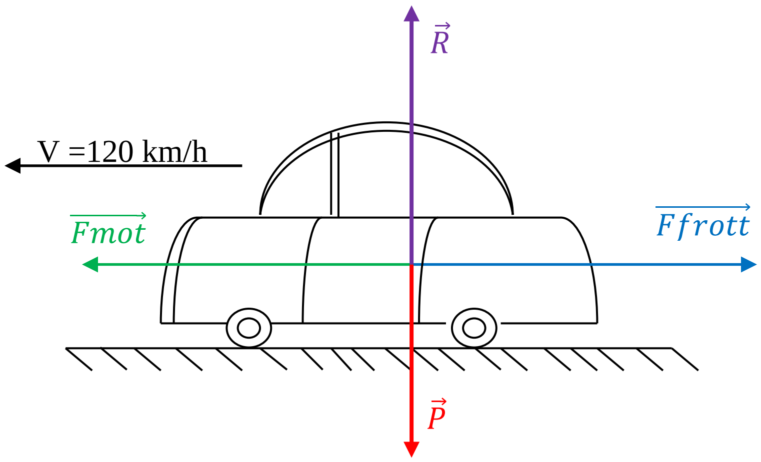


Figure. Voiture en mouvement rectiligne uniforme

8.2.Deuxième principe Par rapport à un référentiel Galiléen, le mouvement d'un point matériel « A » de masse « m » soumis à plusieurs forces, satisfait à la relation :

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m.\vec{\gamma}$: γ est l'accélération

Autrement dit, toute force non compensée, agissant sur un corps est proportionnelle à la masse de ce corps et à son accélération. Ce principe montre bien, que lorsque la résultante des forces est nulle il n'y a pas d'accélération, ce qui confirme que le premier principe est un corollaire du deuxième principe.

8.3.Troisième principe

Cette loi énonce le principe de l'opposition des actions réciproques qui dit que la réaction est toujours opposée à l'action. Les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales, parallèles et dirigées en sens contraire. En ce principe les forces se présentent toujours en paire, où il serait nécessaire, lorsqu'on fait l'analyse de l'équilibre d'un système, d'isoler clairement ce système afin de ne retenir que la force de la paire qui agit sur le système en question. On résume qu'à chaque fois qu'un corps «A» exerce une force « $\vec{F}_{A/B}$ » (force d'action) sur un corps «B » alors le corps «B » réagit en exerçant sur le corps «A» la force « $\vec{F}_{B/A}$ » (force de réaction) tel que « $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$ ».

8.3.1.Caractéristiques :

-Les deux forces sont de sens opposées.

-Les deux forces ont la même direction

-Les deux forces ont la même la norme : $F_{A/B} = F_{B/A}$

Exemples

a.Masse accrochée à un ressort

La masse exerce la force $\vec{F}_{m/r}$ (le poids $\vec{P}$) sur le ressort, responsable de l'allongement du ressort.

La force « $\vec{F}_{m/r}$ » exercée par la masse, son point d'application est sur le ressort. Le ressort réagit et exerce la force sur la masse et la tient en équilibre (contre son poids $\vec{P}$), cette force exercée par le ressort, son point d'application est sur le fil relié à la masse à tout moment : $F_{r/m} = F_{m/r}$

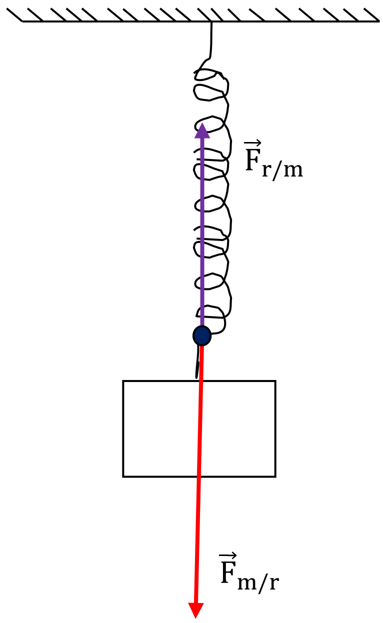


Figure. Masse accrochée à un ressort

b.Objet posé sur un sol

Si un objet est posé sur le sol tel qu'il est repos, il va rester au repos, il exerce une force « $\vec{F}$ » sur le sol égale à son poids « $\vec{P}$ ». Réciproquement le sol exerce une force de réaction du sol sur l'objet opposée à « $\vec{F}$ » la résultante des deux forces est nulle, ainsi le corps est en équilibre, et va rester au repos.

N.B : La réaction du sol est toujours perpendiculaire au sol,

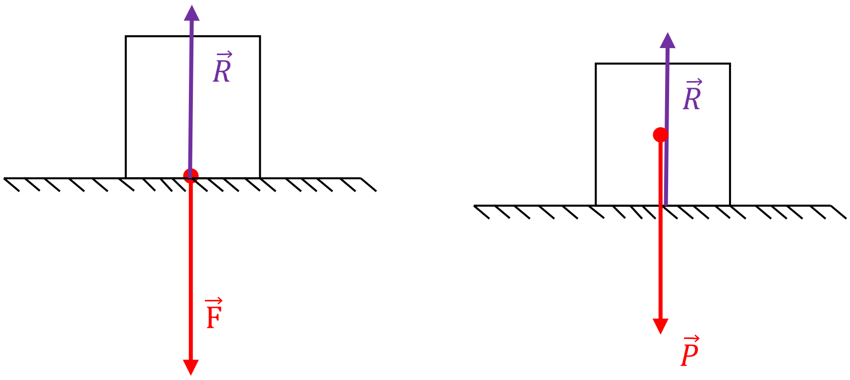


Figure action et réaction d'un objet posé sur le sol

9.Nature des forces

9.1.Force de Gravitation

La Lune décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre. C'est la force gravitationnelle « $\vec{F}_{T/L}$ » que la Terre exerce sur la lune qui la tient sur cette orbite. Si cette force de gravitation n'existait pas, la Lune serait un corps quasiment isolé et elle partirait à vitesse constante sur une trajectoire rectiligne. En revanche, la Lune attire la Terre avec la force « $\vec{F}_{L/T}$ » opposée à « $\vec{F}_{T/L}$ ». Cette force est aussi responsable des marées océaniques.

Les deux forces, ont la même direction, la même norme et sont de sens opposé.

$$\vec{F}_{L/T} = -\vec{F}_{T/L}$$

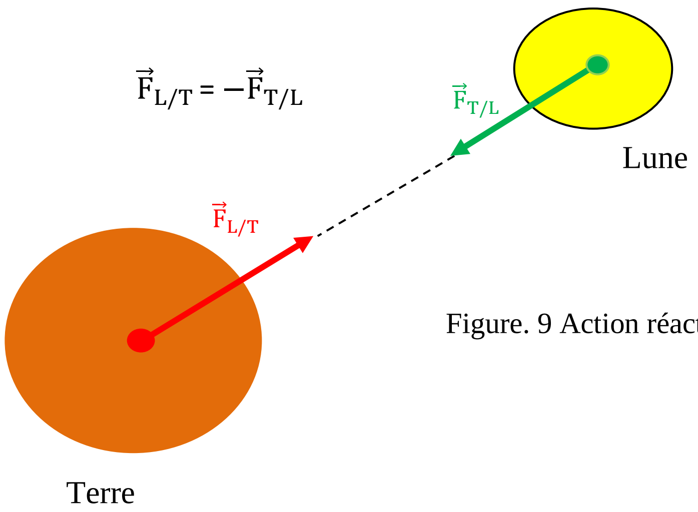


Figure. 9 Action réaction entre la Terre et la Lune

9.2.La force de Pesanteur

La force de pesanteur est la force qui nous maintient à la surface de la terre, plus communément appelée le poids. Elle est due à la présence du champ d'accélération gravitationnel terrestre, plus connu sous le nom de champ de pesanteur, et que l'on désigne généralement par « g ». Ce champ n'est ni constant dans le temps, ni uniforme sur toute la surface de la terre.

9.3.La force du Poids

D'après le deuxième principe de la dynamique, la présence du champ de pesanteur implique que tout corps massique est soumis à une force qui est son poids. D'après les caractéristiques de « g », précédemment décrites, cette force est verticale dirigée vers le bas, notée « P », s'exprime en fonction de la pesanteur : « $P = m \times g$ » L'unité du poids dans le (S.I) est le Newton (N).

9.4.Forces de contact ou réactions d'appuis

De façon générale, les appuis s'opposent aux forces provoquant la mise en mouvement des objets. Nous avons vu que les conditions de la statique conduisent, pour des problèmes plan, à un système de trois équations. Les deux premières traduisent l'équilibre de translation selon les axes du repère, et la troisième, qui se trouve sur l'axe perpendiculaire au plan, traduit l'équilibre de rotation.

9.5..Force de frottement

Les forces de frottement ont pour effet de s'opposer au déplacement relatif de deux corps se trouvant en contact. Ces forces sont parallèles aux surfaces. On les désigne par « R_t » (réaction tangentielle). Elles dépendent d'une part, de la force normale joignant les deux corps, que l'on désigne «R_N » :réaction normale, et d'autre part, de la nature des matériaux des surfaces en contact et de leur rugosité. Ces deux paramètres sont pris en compte, dans le bilan des forces, par un coefficient, noté « μ ». La force de frottement s'exprime alors : $R_t = \mu R_N$.

On distingue : force de Frottements statiques et force de Frottements dynamique.

9.5.a.Force de frottements statiques

Le frottement statique intervient entre surfaces immobiles, l'une par rapport à l'autre. Ainsi, lorsqu'une force croissante est appliquée à un objet maintenu en équilibre par un appui, la force de frottement statique, entre les deux surfaces en contact, croît pour s'opposer au déplacement de l'objet. Cette force ne peut dépasser une valeur limite. On désigne par « R_{tmax} » sa valeur maximale. Ceci implique que pour une valeur limite de la force appliquée, la réaction due au frottement n'est plus suffisante pour empêcher la mise en mouvement de l'objet. Ceci est traduit, par l'inégalité : $R_t \leq R_{tmax} = \mu_S R_N$ (μ_S est le coefficient de frottement statiqu

9.5.b.Force de frottements dynamiques

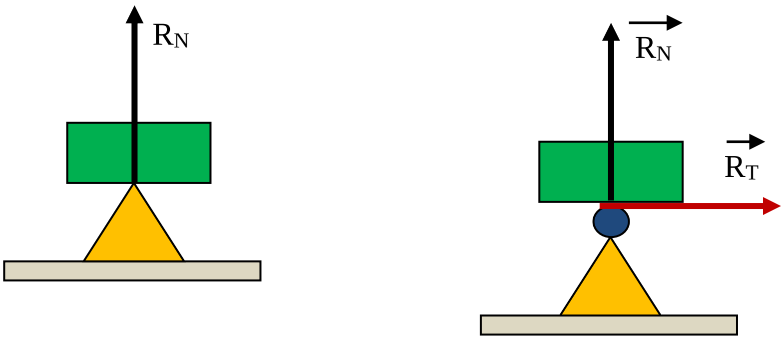
Lorsque les deux objets sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre, une force de frottement persiste et réduit la vitesse de déplacement. Les frottements dans ce cas sont dits dynamiques, s'expriment par : $R_T = \mu_D R_N$ (μ_D est le coefficient de frottement dynamique) la valeur de ces forces est ordinairement inférieure au maximum atteint par la force de frottement statique.

10. Appuis simples

L'appui simple représente les réactions mises en jeu lorsque l'on pose un objet sur un autre. Dans ce cas, la réaction est décrite par une force dont la direction et le point d'application sont connus, la direction étant bien sûr la normale à la surface de contact. Il ne reste plus alors qu'à déterminer l'intensité de la force. Cet appui permet deux degrés de liberté : la translation, du système étudié par rapport à la surface d'appui, et la rotation autour du point d'application.

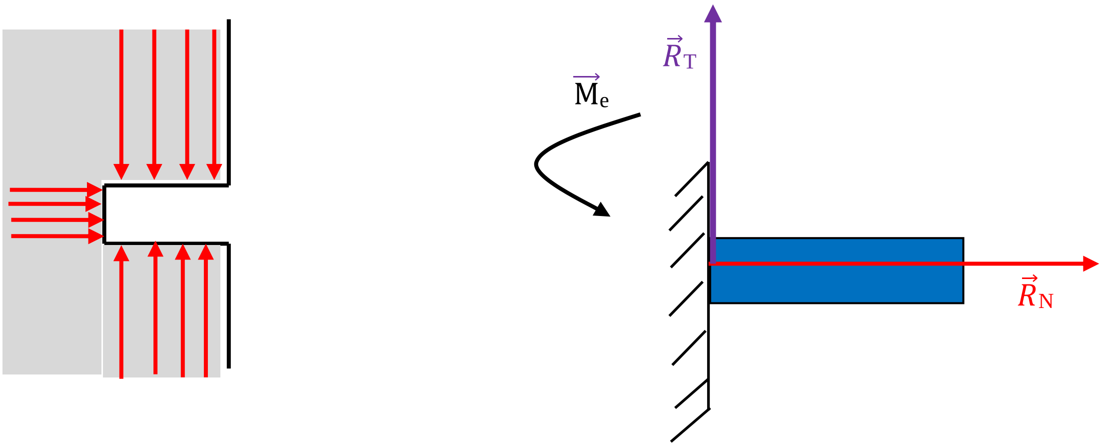
11. Appuis articulés

L'appui articulé, également appelé appui double, modélise toutes les liaisons réalisées à l'aide d'une articulation. Contrairement à l'appui simple, on doit déterminer deux inconnues, qui sont l'intensité et la direction. Cet appui permet un (1) degré de liberté, la rotation autour du point d'application. Il est commode de décomposer cette réaction en une composante normale à la surface d'appui et une composante parallèle à cette surface (figure ci-dessous).



12.Encastrements

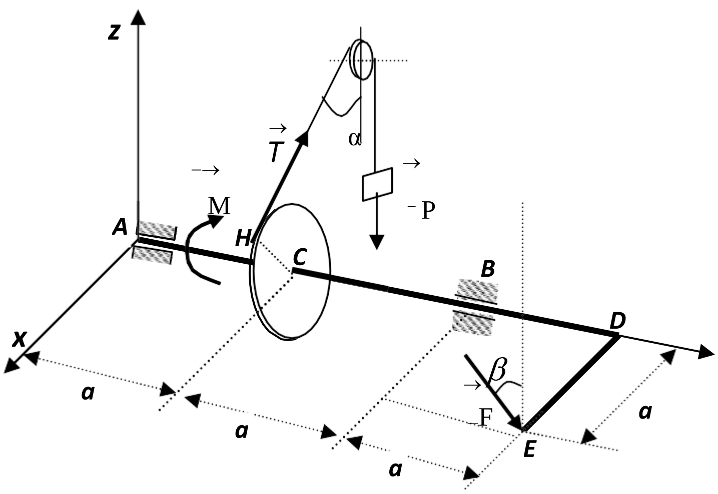
L'encastrement est obtenu en emboîtant la structure étudiée. Dans ce cas, ni la direction ni le point d'application de la force ne sont connus. Cela est du au fait, que chaque côté de l'encoche oppose des réactions. En effet, si l'on regarde en détail le contact entre les deux objets (voir le symbole (1) sur la figure suivante), on remarque que chacun des côtés oppose des réactions différentes réparties sur toute la surface de contact. La conséquence de l'ensemble des réactions produites, qui fait tout l'intérêt de ce type d'appui, est d'empêcher toute rotation de la structure. En d'autres termes, il produit un moment contraire aux moments imposés à la structure que l'on appelle moment d'encastrement.



Figure

Exemple d'application :

Un système mécanique composé d'une barre coudée (***AD***) de masse négligeable et d'un disque de rayon ***R*** , de masse négligeable, soudé à celle-ci au point ***C*** comme indiqué sur la figure ci-dessous. La barre est supportée par deux liaisons cylindriques en « ***A*** » et « ***B*** ». On relie le disque à une poulie fixe par un câble inextensible, de masse négligeable, auquel est suspendue un poids « ***P*** ». Au point « ***E*** », dans un plan parallèle au plan ***(xAz)***, est appliquée une force « $\vec{F}$ » inclinée par rapport à la verticale d'un angle $\beta = 30°$. Un moment « $\vec{M}$ » à la barre afin de maintenir le système en position d'équilibre statique dans le plan horizontal ***(xAy).*** On donne ***F = 2P*** , et $\alpha = 60°$.



Solution

Le système est en équilibre statique donc :

$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$……………….1

$\sum \vec{M}_{i/A} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{AH} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AE} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ ……………..2

d'après le schéma nous avons

$$\vec{R}_A \begin{pmatrix} R_{AX} \\ 0 \\ R_{AZ} \end{pmatrix} \quad \vec{T} \begin{pmatrix} -P\sin\alpha \\ 0 \\ P\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{F} \begin{pmatrix} -2P\sin\beta \\ 0 \\ -2P\cos\beta \end{pmatrix} \quad \vec{R}_B \begin{pmatrix} R_{BX} \\ 0 \\ R_{BZ} \end{pmatrix} \quad \vec{M} \begin{pmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{AB} \begin{cases} 0 \\ 2a \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{AH} \begin{cases} R\cos\alpha \\ a \\ R\sin\alpha \end{cases} \quad \overrightarrow{AE} \begin{cases} a \\ 3a \\ 0 \end{cases}$$

Après projection des éuations sur les axes et après

développement des éuations vectorielles nous obtenons ce ui suit :

M=2aPcosβ-Rp

R_{BX} = 3P.sinβ + (P/2).sinα

R_{BZ}=3P.cosβ - (P/2).cosα

R_{AZ}=2.Pcosβ –P.cosα-R_{bz}

R_{AY} =R_{BY} = 0

R_{AX} =2.P.sinβ+P.sinα-R_{bx}