Chapitre I

GENERALITES SUR LES VIBRATIONS

I. Généralité sur les vibrations

I.1. Définitions

I.1.1 Oscillation

Une oscillation est le trajet du système oscillant entre deux passages successifs (dans le même sens) par sa position d'équilibre stable. La durée d'une oscillation est donc égale à la période.

I.1.2 Système mécanique oscillant

Un système mécanique oscillant est un système mécanique qui a un mouvement périodique autour de sa position d'équilibre stable. Le système physique est appelé oscillateur lorsque q(t) varie périodiquement. Un oscillateur dissipe de l'énergie quand il retourne vers son état d'équilibre : il est amorti

Par exemple, les suspensions d'une automobile ou d'un vélo tout terrain, le pendule, un pont suspendu ou encore un système solide-ressort sont des systèmes mécaniques oscillants.

On peut citer comme exemples de systèmes oscillants: Un enfant sur une balançoire, le balancier d'une horloge, les battements de cœur.

- **Pendule pesant :**

Il est constitué d'un solide pouvant osciller autour d'un axe fixe (Δ) sous l'action de son poids. Le balancier d'une horloge.

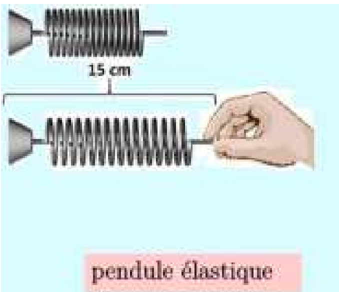



Fig.1 pendule élastique, pendule pesant, pendule de torsion

- **Le pendule simple :**

Le modèle de pendule simple correspond à un point ponctuel de masse m oscillant à une distance constante d'un axe horizontal fixé.

- **Le pendule élastique :**

Un système (ressort-solide) est constitué d'un ressort dont une des extrémité est fixe. L'autre étant reliée à un solide. Les spires du ressort ne sont pas jointives et sa masse est toujours négligeable devant la masse du solide. Ce dispositif constitue un pendule élastique.

- **Le pendule de torsion :**

Est un système formé d'un fil métallique dont l'une de ces extrémités est fixée à un support et d'une tige homogène accrochée en son centre d'inertie, à l'autre extrémité du fil.

I.1.3 Types d'oscillateurs

I.1.3.1 Oscillateur libre

Un oscillateur est dit libre lorsqu'il n'est soumis à aucun apport d'énergie extérieure après sa mise en mouvement.

I.1.3.2 Oscillateur libre non amorti

L'amplitude de l'oscillateur est constante.

Remarque :

Réellement, un oscillateur est toujours amorti du fait des forces de frottements fluides (action de l'air sur le dispositif par exemple).

I.1.3.2 Oscillateur libre amorti faiblement

L'amplitude d'un oscillateur amorti décroît au cours du temps. L'oscillateur est dit amorti ou pseudo-périodique. L'amplitude d'un oscillateur faiblement amorti est la valeur maximum atteinte pendant une période.

- **Période propre**

La période propre d'un oscillateur amorti est la période qu'aurait l'oscillateur en l'absence de frottement. La période propre est notée T_0.

- **Pseudo-période**

La pseudo-période des oscillations amorties est la durée entre deux passages successifs par la position d'équilibre, la trajectoire étant parcourue dans le même sens. La pseudo-période est toujours supérieure à la période propre.

I.1.3.2 Amortissement fort

Lorsque l'amortissement est fort, l'oscillateur retourne très vite à sa position d'équilibre stable ; il n'y a plus d'oscillations. Le régime est alors dit apériodique.

I.2 Vibration

- Les vibrations sont définies comme des mouvements cycliques continus et peuvent être expérimentées par tout système, vivant ou non, d'une personne se promenant dans un parc à une structure en acier oscillant par une machine vibrante.
- Petites variations provoquées par une excitation d'une grandeur q autour d'une valeur moyenne. La fonction q(t) décrit la réponse du système à l'excitation appliquée. La vibration est un phénomène dynamique, c'est-à-dire en mouvement. L'étude des mouvements périodiques et, plus particulièrement, du mouvement oscillatoire conduit à une définition de la vibration.
- Les vibrations ont lieu littéralement partout. Forage, dynamitage, travaux de construction ou de démolition, marteaux-piqueurs, sonnettes, chargeuses lourdes, turbines, ventilateurs, générateurs, transformateurs et moyens de transport : ce sont tous de très bons exemples d'activités et

d'équipements qui génèrent des niveaux de vibration significatifs pour n'importe qui ou n'importe quoi dans les alentours.

I.2.1 Définition d'un mouvement périodique

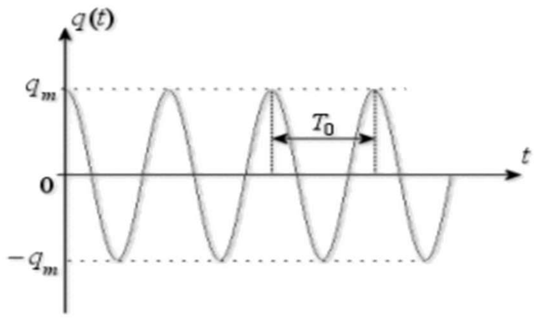
La vibration se définie par l'application unique ou répétitive d'un stimulus ondulatoire (Fig.1) que l'on caractérise par : une fréquence, une amplitude.

- Un mouvement est périodique s'il se répète de façon identique à lui-même, à des intervalles de temps successifs égaux à T (période du mouvement)
- Un mouvement périodique est sinusoïdal si un point mobile M du mouvement effectue un mouvement de va-et-vient autour de sa position d'équilibre. L'élongation du mobile à l'instant t s'écrit :

$$y = a\sin(wt + \emptyset)$$

Remarque :

- Dans le cas où la forme des oscillations est sinusoïdale ou harmonique, l'oscillateur est appelé oscillateur harmonique. L'excitation appliquée au système est très brève, elle disparaît dès que le système oscille. Cette excitation est produite par les conditions initiales imposées au système. Les oscillations sont dites libres. L'énergie totale du système se conserve au cours du temps, le système ne dissipe pas d'énergie.



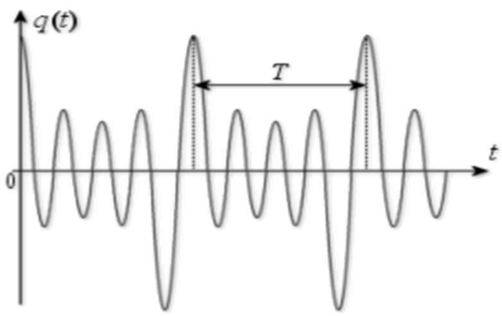


Fig. 2 Représentation de l'oscillation harmonique et anharmonique

La réponse de l'oscillateur harmonique s'écrit :

$q(t) = q_m \sin(wt + \emptyset)$

Les oscillations sont caractérisées par une amplitude q_m et par une période T_o, appelée période propre ; T_o est liée à la pulsation propre w_o et à la fréquence propre T_o par les relations $T_o = 1/f_0 = 2\pi/w_o$. Lorsqu'un système physique évolue suivant une loi périodique, celle-ci est généralement de forme quelconque, le système n'est donc pas décrit par un oscillateur harmonique.

I.3 Notion d'énergie

Lorsqu'un objet se met en mouvement, il transfère ou transforme son énergie. Il peut, par exemple, convertir son énergie potentielle en énergie cinétique ou vice versa.

Même lorsqu'elle est transformée, l'énergie totale d'un objet est constante tout au long de son mouvement. La loi de la conservation de l'énergie s'applique en tout temps, peu importe le mouvement

I.3.1 Energie cinétique :

I.3.1.1 Mouvement de translation

Tout corps en mouvement de translation possède une énergie dite cinétique qui dépend de la masse du corps et de sa vitesse.

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

Ou Ec en joule (J), m en kg et v en m/s.

I.3.1.2 Mouvement de rotation

Tout corps en mouvement de rotation possède une énergie dite cinétique qui dépend de la forme du corps, de sa masse et de sa vitesse.

$$E_c = \frac{1}{2} J_{/o}\dot{\theta}^2$$

Ou Ec en joule (J), ω vitesse angulaire en rad/s et $\dot{\theta}$ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation Δ en kg×m².

- **Energie cinétique d'un ensemble des corps solide**

On considère un ensemble des corps ayant successivement les masses m1, m2, …., mn qui se meuvent par des vitesses V1, V2,….., Vn. L'énergie cinétique de l'ensemble des corps est égale la somme des énergies cinétiques. On écrit

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} E_{c\,i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m{v_i}^2$$

- **Moment d'inertie par rapport**

Moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) parallèle à l'axe (Δ_G) qui passe par le centre de gravité

Le moment d'inertie d'un solide, par rapport à un axe (Δ), est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe ΔG, parallèle à Δ, passant par le centre de gravité augmenté du produit Md^2 (M étant la masse du solide et d la distance entre les deux axes)

$$J_{/\Delta} = J_{/\Delta_G} + M\,d^2$$

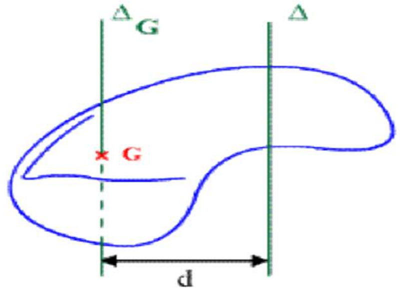


Fig. 3 Les axes pour le calcul du moment d'inertie

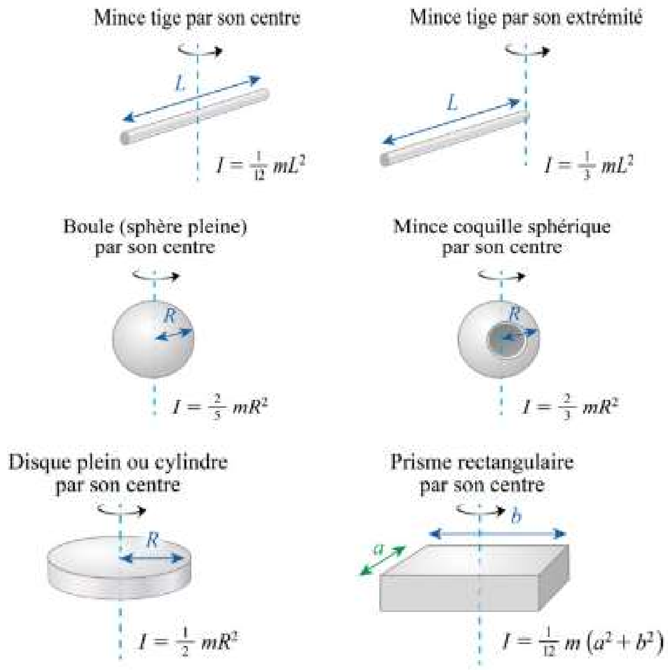


Fig. 4 Moment d'inertie d'un corps solide

I.3.2 Energie potentielle

L'énergie potentielle d'un corps est l'énergie qu'il possède de par sa position.

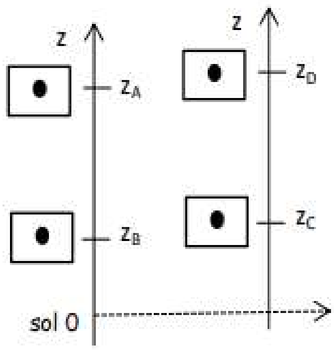
I.3.2.1 Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur d'un corps, est l'énergie qu'il possède de par sa position par rapport au sol. Expressions :

$E_{pp} = m \times g \times z$

Epp en J, m en kg, g l'intensité de la pesanteur en N/kg et z l'altitude en m

Si le solide a son centre d'inertie qui passe de la position A à la position B alors



$\Delta E_{pp} = E_{pp}(B) - E_{pp}(A) = m \times g \times (z_A - z_B)$

D'après la figure la variation d'énergie potentielle est négative $\Delta E_{pp} < 0$.

Remarque :

Si le corps passe de la position C à la position D alors sa variation d'énergie potentielle sera positive

I.3.2.2 Energie potentielle élastique

Un ressort lorsqu'il est comprimé ou étiré possède une énergie qu'il peut restituer si on le relâche. Cette énergie potentielle est dite élastique (E_{pe}).

$E_{pe} = \frac{1}{2} k \times x^2$

Ou Epe en J, k la raideur du ressort en N/m et x en m

I.3.3 L’énergie mécanique

L’énergie mécanique (Em) d’un solide est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle Expression :

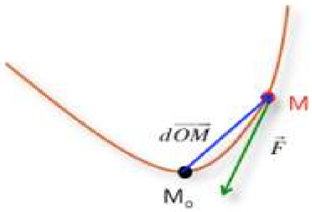
$$E_m = E_c + E_p$$

I.4 Equilibre et stabilité

Dans un référentiel Galiléen, On considère un point matériel soumis à des forces conservatives dont la résultante est $\vec{F}$. La position d’équilibre du point matériel correspond à un extremum de l’énergie potentielle. Donc, si M0 est une position d’équilibre les dérivées premières de l’énergie potentielle doivent être nulles en ce point :

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{Mo} = \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right|_{Mo} = \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right|_{Mo} = 0$$

I.4.1 Equilibre stable

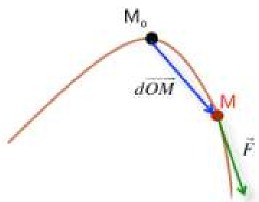


Soit un point matériel M ayant la position d’équilibre M_0. M_0 est une position d’équilibre stable si l’énergie potentielle est minimale en ce point. Dans le cas d’un mouvement à une dimension $Ep(x)$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{Mo} > 0$$

C.à.d. que le point M_0 est un minimum de la fonction $E_p(x)$

I.4.2 Equilibre instable



M_0 est une position d’équilibre instable si l’énergie potentielle est maximale en ce point. Dans le cas d’un mouvement à une dimension $Ep(x)$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{Mo} < 0$$

C.à.d. que le point M_0 est un maximum de la fonction $E_p(x)$.

Nous venons de considérer l'énergie du SHM en fonction du temps. Un autre point de vue intéressant de l'oscillateur harmonique simple consiste à considérer l'énergie en fonction de la position. La fig.6 montre un graphique de l'énergie en fonction de la position d'un système soumis à une SHM.

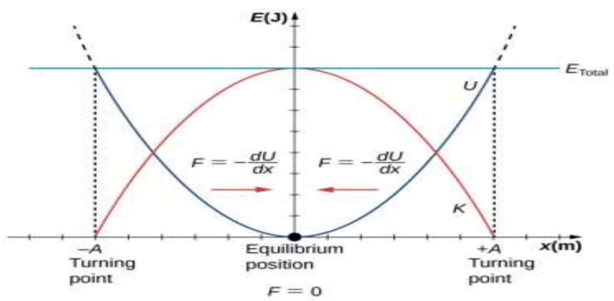


Fig.5 graphique de l'énergie cinétique (rouge), de l'énergie potentielle (bleu) et de l'énergie totale (vert) d'un oscillateur harmonique simple.

La force est égale à $F = -dU/dx$. La position d'équilibre est indiquée par un point noir et correspond au point où la force est égale à zéro. La force est positive lorsque x < 0, négative lorsque x > 0 et égale à zéro lorsque x = 0.

La Fig. 6 montre trois conditions. Le premier est un point d'équilibre stable (a), le second est un point d'équilibre instable (b) et le dernier est également un point d'équilibre instable (c), car la force d'un seul côté pointe vers le point d'équilibre.

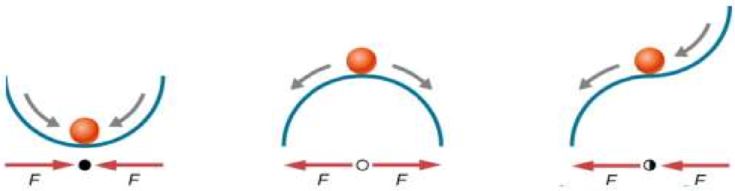


Fig.6 Exemples de points d'équilibre. (a) Point d'équilibre stable ;
(b) point d'équilibre instable ; (c) point d'équilibre instable (parfois appelé point d'équilibre semi-stable).

I.5 Formalisme de Lagrange

I.5.1 Paramétrage d'un système : Coordonnées généralisées

On appelle paramètres de configuration ou coordonnées généralisées d'un système mécanique un ensemble de variables réelles (ensemble de n paramètres indépendantes q_1 , q_2 ,....., q_N), qui ne correspondent pas toutes à des coordonnées cartésiennes (par exemple : angles, positions relatives), et permettant de décrire ce système, en particulier dans le cadre de la mécanique lagrangienne. Elles sont notées (q_i) avec *i=1,…,n.*

$q = \{q_i\}_{i=1,\dots,n}$ est appelée espace de configuration (espace généralisé) à n dimensions.

$q = (\dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \dots , \dot{q}_N)$ La vitesse généralisée de dimension *N*, tel que:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

I.5.2 Degrés de liberté

Lors de mouvements quelconques entre solides, on peut décomposer celui-ci en plusieurs mouvements élémentaires : Sur chacun des trois axes (Ox), (Oy) et (Oz), il y a deux types de mouvements possibles :

- Une translation.
- Une rotation.

I.5.2.1 Définition :

On appelle degré de liberté la liberté de mouvement en rotation ou en translation d'un solide . Nombre maxi de degrés de liberté : 6

Le nombre de mouvements en rotation ou en translation libres et indépendants.

- Un point matériel libre dans l'espace possède trois degrés de libertés.
- Un corps solide libre dans l'espace possède six degrés de libertés.

Dans l'espace, un solide possède donc 6 Degrés De Liberté (DDL):

- 3 degrés de liberté de translation (liés à la position de Os par rapport à R) : Tx, Ty, Tz
- 3 degrés de liberté de rotation autour de Os (liés à l'orientation de la base de Rs / R : Rx, Ry, Rz

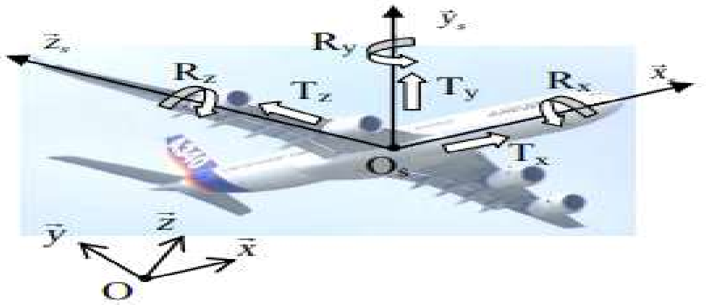


Fig.7 Exemples de dégrée de liberté

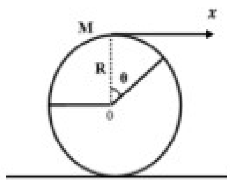
Le nombre de degrés de liberté DDL est donnée par :

$DDL = N - r$

Ou N est le nombre de coordonnées et r est le nombre de liaisons

Exemple 1 :

Un cylindre homogène de masse M et de rayon R, roule sans glisser sur une plate-forme horizontale.



On a deux coordonnées généralisées x et θ donc : $N = 2$.

x et θ sont liées avec une relation: $x = r\theta$ donc : $r = 1$.

Donc : Le nombre de degrés de liberté $d = N - r = 1$.

Remarque :

Il est possible aussi de déterminer le degré de liberté DDL par la relation suivante :

$DDL = [nombre\ de\ coordonnée\ générales] - [coordonnée = 0\ ou\ Cst]$.

I.5.3 Concept de lagrangien (formalisme de Lagrange)

Le formalisme lagrangien est strictement équivalent au formalisme Newtonien. Il présente cependant la particularité être construit â partir de grandeurs fondamentales scalaires (énergies), et de conduire à des équations de mouvement de forme invariante dans un changement de coordonnées généralisées.

La mécanique lagrangienne fut historiquement une reformulation de la mécanique classique à l'aide du concept de lagrangien.

Dans ce contexte, le lagrangien est généralement défini par la différence entre l'énergie cinétique $E_c = T$ et l'énergie potentielle $E_p = V$:

$L = T - V$

Avec ce formalisme, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0$$

Pour un un système a un dégrée de liberté (N=1 ou DDL=) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

Remarque :

- Équations de Lagrange d'un système conservatif.
- Le lagrangien dépend des coordonnées généralisées (par T et V), de leurs dérivées totales par rapport au temps (par T) et du temps dans le cas des référentiels mobiles.

En pratique, on peut procéder comme suit : ´

1- Choisir un ensemble de f coordonnées généralisées (q_1, q_2,…,q_n).

2- Exprimer l'énergie cinétique T, les forces généralisées Qi, et le potentiel (généralisé U en fonction des coordonnées généralisées, de leurs dérivées premières temporelles et du temps, et former le lagrangien $L = T - U$.

3- Substituer L dans les équations de Lagrange et effectuer les différentiations indiquées

I.6 Ressorts équivalents

Plusieurs ressorts peuvent être associés entre eux. Des ressorts peuvent en effet être associés en série ou en parallèle, comme illustré ci-dessous. Dans ce cas, il est possible de les remplacer par un ressort unique.

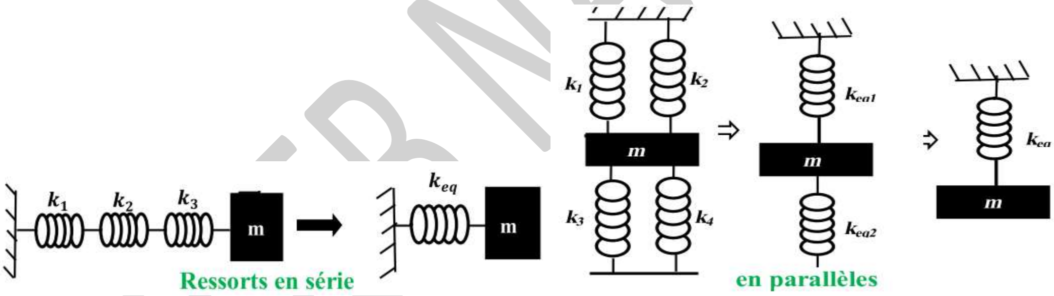


Fig.8 Exemples de ressorts équivalents

I.6.1 Ressorts en série

Lors d'une association de ressorts en série, l'inverse de la constante de rappel équivalente K_{eq} est égal à la somme des inverses des constantes de rappel spécifiques à chacun des ressorts.

$$K_{eq} = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

Dans ce cas, il est possible de les remplacer par un ressort unique.

I.6.2 Ressorts en série

Lors d'une association de ressorts en série, l'inverse de la constante de rappel équivalente K_{eq} est égal à la somme des inverses des constantes de rappel spécifiques à chacun des ressorts.

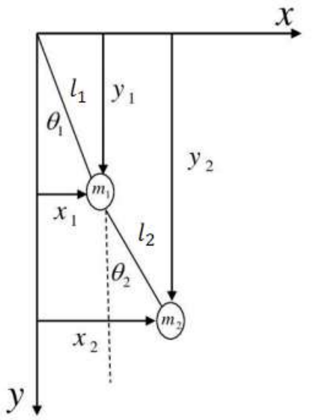
$$\frac{1}{K_{eq}}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\frac{1}{K_3}$$

Exercices et solutions

Exercice 1

Soit le système de la Figure. La configuration du système est exprimée
à l'aide de six paramètres :

$q_1 = x_1\,, q_2 = x_2, q_3 = \theta_1, q_4 = \theta_2, q_5 = y_1, q_6 = y_2.$



Ce système présente 04 liaisons :

$x_1 = \ l_1 \sin\theta_1$

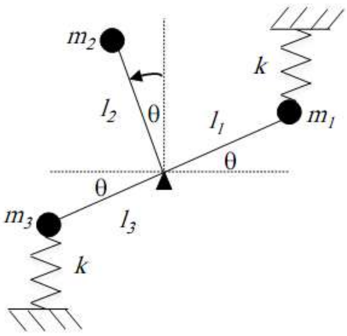
$x_2 = l_1 \sin\theta_1 + \ l_2 \sin\theta_2$

$y_1 = \ l_1 \cos\theta_1$

$y_2 \ = l_1 \cos\theta_1 \ + \ l_2 \cos\theta_2$

Ce type de liaisons est appelée liaison géométrique.

Exercice 2



La configuration du système de la figure est exprimée à l'aide de sept paramètres :

$q_1 = x_1\,, q_2 = x_2, q_3 = x_3, q_4 = y_1, q_5 = y_2, q_6 = y_3, q_7 = \theta$.

Ce système présente 06 liaisons :

$x_1 = \ l_1 \sin\theta$, $x_2 = l_2 \sin\theta$, $x_3 = l_3 \sin\theta$

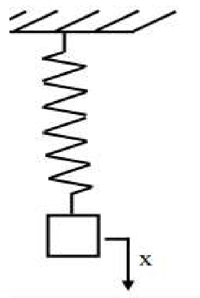
$y_1 = \ l_1 \cos\theta_1$,$y_2 \ = l_1 \cos\theta$, $y_3 = \ l_3 \cos\theta$

Le degré de liberté du système de la figure est :

$k \ = \ N \ - M \ = \ 7 \ - \ 6 \ = \ 1$

On a choisi comme paramètre du mouvement l'angle θ.

Exercices 3 :



On considère le système mécanique à un degré de liberté.

1) Calculer les énergies cinétique et potentielle et le Lagrangien du système.

2) Ecrire les équations de Lagrange

$E_c = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2$, $E_p = \frac{1}{2}\, k\, x^2$

Lagrangien : L = $E_c - E_p$=$\frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, k\, x^2$

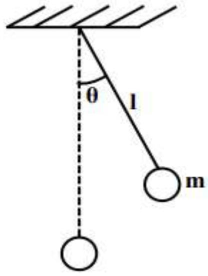
L'équation de Lagrange : $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\,\ddot{x} + kx = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Remarque :

On retrouve donc la même équation que celle obtenue pour le ressort horizontal, la solution sera identique.

Exercice 4 :

Considérons un pendule simple constitué par une masse ponctuelle m reliée à un axe de rotation fixe par une tige de masse négligeable, qui effectue des oscillations de faible amplitude dans un plan vertical.



$E_c = \frac{1}{2}\, I\, \dot{v}^2 = \frac{1}{2}\, ml^2\, \dot{v}^2$, $E_p = mg\, l(1 - cos\theta)$

Lagrangien : L = $E_c - E_p$=$\frac{1}{2}\, ml^2\, \dot{v}^2 - mg\, l(1 - cos\theta)$

L'équation de Lagrange conduit : $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} sin\theta = 0$

Pour $\theta \ll \rightarrow sin\theta \approx \theta \;\; \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$, l'équation du mouvement du pendule simple.

Chapitre II

SYSTEMES LINEAIRES LIBRES NON AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

I. Système mécanique élémentaire

Le modèle du système mécanique élémentaire considère le mouvement d'une masse (corps rigide) par rapport à une partie fixe. On dit qu'un système est à 1 degré de liberté lorsqu'une seule variable est nécessaire pour d´écrire le mouvement. On parle de système à 1 degré de liberté (DDL) quand la masse unique a un mouvement dans une seule direction (translation ou rotation autour d'un axe).

Exemples

Sans être exhaustif, on peut citer comme exemples d'oscillations à 1 degré de liberté

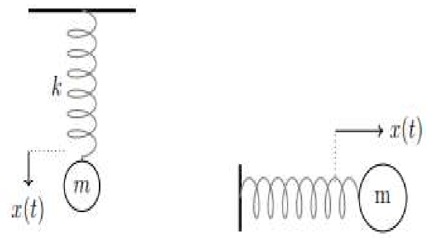


Fig.1 Les oscillations longitudinales ou transversales d'une masse accrochée ressort

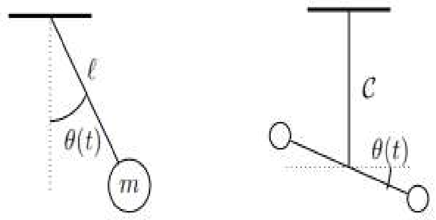


Fig.2 Les oscillations des pendules pesants ou des pendules de torsion.

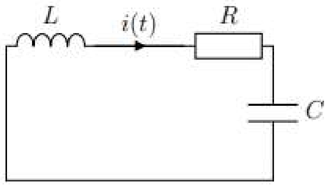


Fig.3 Les oscillations de charges ou de courant dans les circuits électriques

Dans les différents exemples présents ci-dessus, la variable d´écrivant le mouvement au cours du temps est soit une élongation x(t), soit un angle θ(t), soit une charge électrique q(t) ...

I.1 Equation du mouvement

Il existe principalement deux types de systèmes : les systèmes de translation et les systèmes de torsion.

I.1.1 Systèmes avec mouvement de translation

Ils sont schématisés par le système masse – ressort : la masse m [en kg] est animée d'un mouvement de translation dans la direction x auquel s'oppose la force due à la raideur du ressort. Dans le domaine linéaire du ressort, le coefficient de raideur k [en N/m] est une constante et la force de réaction

$F = Kx$

Le principe d'Alembert permet d'écrire l'équilibre dynamique du système masse-ressort :

$F_k(t) = F_i(t)$

- La force dynamique : $F_k = m\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = m\ddot{x}$
- La force de réaction exercée par le ressort : $F_i = -kx$

  (*le signe – est du à la force qui s'oppose au déplacement*).

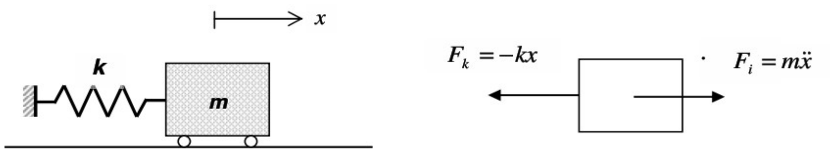


Fig.4 Equilibre du système masse-ressort

L'équation différentielle du mouvement (homogène du second ordre) se déduit de l'équation d'équilibre précédente

$m\ddot{x} + kx = 0$

Sa solution est une fonction périodique pour le déplacement

$x(t) = Asin(\omega t + \emptyset)$

Ou A et ϕ sont l'amplitude et la phase qui dépendent des conditions initiales et ω est la pulsation (ou fréquence angulaire)

Vitesse : $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} = A\omega\cos(\omega t + \emptyset)$

Accélération : $\ddot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} = -A\omega^2\sin(\omega t + \emptyset)$

L'équation s'écrit alors :

$$\text{-}KA\omega\, cos(\omega t + \emptyset) = -mA\omega^2 sin(\omega t + \emptyset)$$

La pulsation naturelle est la valeur de ωqui satisfait la relation :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Les conditions initiales sont le déplacement x_0 et la vitesse v_0 à l'instant t :

$x_0 = x(0) = Asin(\omega_0 0 + \emptyset) = Asin(\emptyset)$

$v_0 = \dot{x}(0) = \omega_0 Acos(\omega_0 0 + \emptyset) = \omega_0 Acos(\emptyset)$

Donc :

$\omega_0{}^2 x_0{}^2 + v^2{}_0 = \omega_0 A(\sin^2(\emptyset) + cos^2(\emptyset))$

Et :

$\frac{sin\emptyset}{cos\emptyset} = \frac{\omega_0 x_0}{\vartheta_o}$

Soit : $A = \frac{\sqrt{\omega_0{}^2 x_0{}^2 + v^2{}_0}}{\omega_0}$, $\emptyset = arctg(\frac{\omega_0 x_0}{v_0})$

Le déplacement est : $x(t) = \frac{\sqrt{{\omega_0}^2 {x_0}^2 + {v^2}_0}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + arctg(\frac{\omega_0 x_0}{v_0}))$

x(t) est la réponse libre du système à un degré de liberté non-amorti.

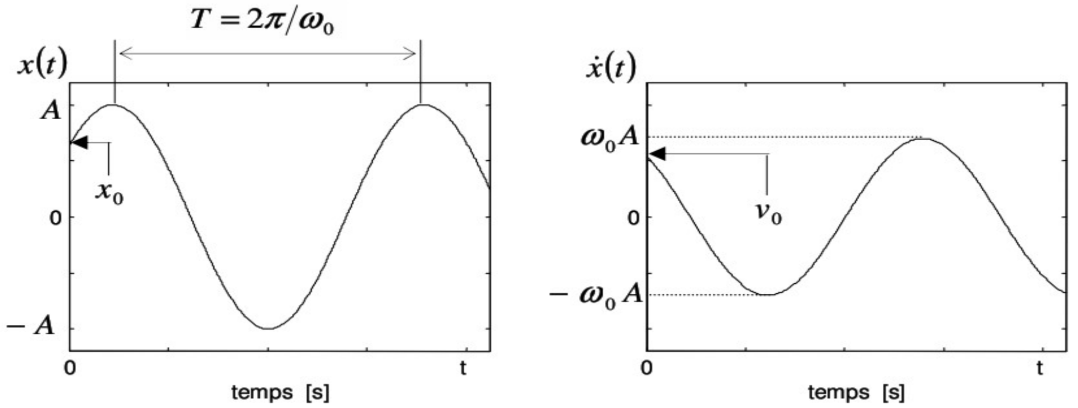


Fig.5 Réponse libre du système à un degré de liberté (déplacement et vitesse) de pulsation propre

I.1.2 Système suspendu :

au repos, la masse exerce une force de traction mg sur le ressort qui se traduit par un étirement initial x_0 . L'équation du mouvement s'obtient à partir de l'équilibre dynamique des forces appliquées à la masse :

$F_k(t) - F_i(t) = 0$

$m\ddot{x} + mg + kx - kx_0 = 0$

On a une position d'équilibre quand la somme des forces sur l'objet est nulle. Or, comme $mg - kx_0 = 0$ (formule de la position d'équilibre), il ne reste que:

$m\ddot{x} + kx = 0$

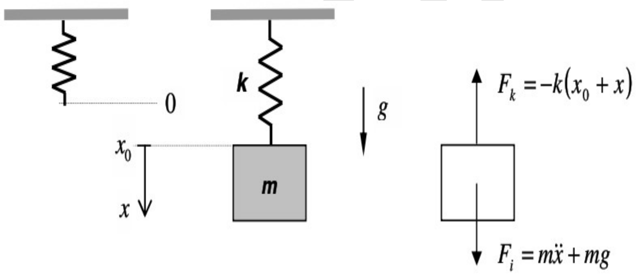


Fig.6 Système masse-ressort suspendu

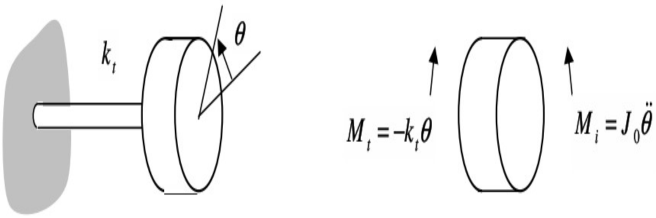


Fig.7 Equilibre d'un système de torsion.

I.1.2 Systèmes avec mouvement de translation

Un corps rigide oscille autour d'un axe (vibration de torsion). L'équilibre dynamique entre le moment dynamique

$M = J_{/0} \frac{d^2\theta}{dt^2} = J_{/0}\,\ddot{\theta}$

et le moment de torsion :

$M_t(t) = k_t\theta$

Permet d'écrire l'équation du déplacement angulaire :

$$J_{/0}\,\ddot{\theta} + k_t\theta = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + k_t/J_{/0}\ \theta = 0$$

Ou $J_{/0}$ moment d'inertie de la masse et $k_t$raideur de torsion [en Nm/rad].

La pulsation naturelle est :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k_t}{J_{/0}}}$$

et la réponse libre du système non-amorti :

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{\omega_0{}^2\theta_0{}^2 + \dot{\theta}_0{}^2}}{\omega_0}\ \sin(\,\omega_0 t + arctg(\frac{\omega_0\theta_0}{\dot{\theta}_0}))$$

I.2 Obtention de l'équation différentielle

I.2.1 Conservation de l'énergie

On peut établir l'équation différentielle du mouvement au moyen de considérations énergétiques en remarquant que l'énergie mécanique du système est conservée en absence de frottements. L'énergie mécanique E est la somme de l'énergie cinétique E_c du solide et de l'énergie potentielle élastique E_p du ressort:

$$E\ =\ E_c +\ E_p\ = \frac{1}{2}\,mv_x^2 + \frac{1}{2}\ k\,x^2$$

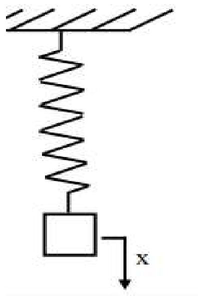
La conservation de l'énergie mécanique se traduit par

$$E = constante\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(E) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\ mv_x^2 + \frac{1}{2}\ k\,x^2\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\ m\frac{\partial v_x^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\ k\frac{\partial x^2}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0\ \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

I.2.2 Méthode de Lagrange

On considère le système mécanique à un degré de liberté.



- L'énergie cinétique

$$E_p = \frac{1}{2}\ k\,x^2$$

- L'énergie potentielle

$$E_c = \frac{1}{2}\ m\,\dot{x}^2$$

- Lagrangien du système.

$$\mathrm{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}\ m\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\ k\,x^2$$

- L'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow m\,\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

La pulsation propre ${\omega_0}^2$ de l'oscillateur et elle doit être positive pour qu'il y ait une vibration.

I.2.3 Solution de l'équation différentielle

Une solution de l'équation différentielle est une fonction du temps ; c'est l'équation horaire $x(t)$ de l'oscillateur. En l'absence d'amortissement et d'excitation. Quelle que soit la nature du système physique, l'équation de mouvement de l'oscillateur harmonique est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = 0$$

La forme la plus générale de l'équation horaire d'un oscillateur harmonique est :

$$x(t) = A\sin(w_0 t + \varphi)$$

Où les constantes *s_m, w* et φ sont les paramètres de l'oscillation qui dépendent du système considéré. Les constantes s_m et w sont choisies positifs. L'argument du sinus $wt + \varphi$, est la phase de l'oscillation à l'instant t.

On peut écrire :

$$x(t) = A\,cos(\varphi)\ \sin(w_0 t) + A\,sin(\varphi)\,cos(w_0 t)$$

$$= A\,cos(\varphi)\ \sin(w_0 t) + A\,sin(\varphi)\,cos(w_0 t)$$

$$= B_2\,sin(w_0 t)\ + B_1\,cos(w_0 t)$$

En utilisant cette forme de solution, les conditions initiales conduisent à

$$x(t) = x_0\,cos(w_0 t)\ + \frac{v_0}{w_0}sin(w_0 t)$$

Il est aussi possible d'exprimer la solution à l'aide d'une seule fonction cosinus

$$x(t) = Acos(\omega_0 t + \theta) = \mathrm{A}\cos(\theta)\cos(\omega_0 t) + Asin(\theta)\sin(\omega_0 t)$$

A partir de l'expression précédente

$$A\,cos(\theta) = x_0\ , \quad A\,sin(\theta) = \frac{-v_0}{w_0}$$

Ce qui permet de retrouver la même amplitude que précédemment

$$A = \sqrt{(A\,cos(\theta))^2 + (A\,sin(\theta))^2} = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{w_0}\right)^2}$$

Et conduit à la phase

$\theta = arctg(\frac{-v_0}{w_0\, x_0})$

On note qu'il existe une relation entre θ et ϕl'angle de phase associée à la solution sinus car : $\theta = \emptyset - \pi$

I.3 Etude énergétique

Lorsqu'il est en mouvement, un oscillateur est le siège d'une succession d'échange énergétiques : l'énergie potentielle emmagasinée est transférée sous forme d'énergie cinétique et inversement.

En l'absence de frottement (ou si ceux-ci peuvent être négligé, l'énergie mécanique de l'oscillateur reste constante. Sa valeur ne dépend que des conditions initiales (vitesse, amplitude).

$E_m = E_c + E_p = cst$

Remarque :

- Dans le cas du pendule pesant, l'énergie potentielle à prendre en compte et l'énergie potentielle de pesanteur

$E_{pp} = m.g.h.$

- Dans le cas du système solide ressort, les énergies potentielles à prendre en compte son l'énergie potentille de pesanteur et l'énergie potentielle élastique lié au ressort

$E_{pp} = \frac{1}{2}k.x^2$

Avec k : constante de raideur du ressort et x l'allongement du ressort

Du point de vue énergétique, cet oscillateur transforme l'énergie élastique en énergie cinétique et *vice versa*. L'énergie potentielle élastique vaut

$E_{pp} = \frac{1}{2}k.x^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \emptyset)$

alors que l'énergie cinétique s'écrit

$E_c = \frac{1}{2}m.\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m{\omega_0}^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \emptyset)$

Et ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$

On vérifie que l'énergie mécanique du pendule élastique :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}k.A^2\cos^2(\omega_0 t + \emptyset) + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2A^2\sin^2(\omega_0 t + \emptyset) = \frac{1}{2}k.A^2$$

Reste constante puisque les forces qui travaillent sont conservatives. L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude.

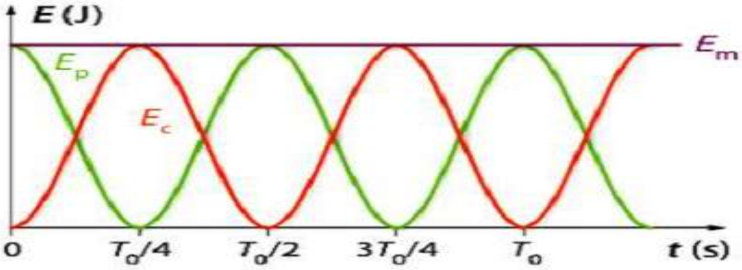


Fig.7 les Transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement

On remarque que :

- l'énergie mécanique E_m est bien la somme des énergies cinétiques E_c et potentielles E_p ;
- l'énergie mécanique est constante au cours du temps ;
- lorsque l'énergie potentielle E_p diminue, l'énergie cinétique E_c augmente : l'énergie est donc transférée d'une forme à une autre.

I.4 Analogie entre un oscillateur mécanique et un oscillateur électrique

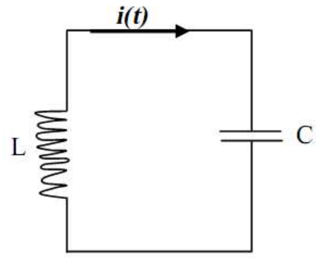
L'étude des oscillations libres d'un pendule élastique et celle d'un circuit RLC révèle une analogie formelle entre l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique. Cette analogie est récapitulée dans le tableau suivant :

Oscillateur		le pendule élastique	le circuit RLC série
Grandeurs caractéristiques	coefficient d'inertie	masse m	inductance L
	coefficient de rappe	raideur k	inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
	facteur dissipatif	coefficient de frottement h	résistance R
Grandeurs oscillantes		Elongation x	charge q
		vitesse $v = \frac{dx}{dt}$	intensité $i = \frac{dq}{dt}$

I.5 Autres types d'oscillateurs

I.5.1 Oscillateur électrique

Soit le circuit électrique LC de la figure constitué d'une bobine et d'un condensateur.), q étant la charge du condensateur à l'instant t Le bilan des tensions :



D'après la loi de Kirchhoff

$$V_C + V_L = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = 0$$

Comme : $i = \frac{dq}{dt}$ l'équation différentielle s'écrit :

$$L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0 \;\Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{Lc}q = 0$$

La pulsation : $\omega^2 = \frac{1}{LC}$

D'après la méthode de Lagrange

$$E_c = E_{mag} = \ V_L\, dq = \int L \frac{di}{dt} = L \int idi = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$$

$$E_p = E_{ele} = \ V_c\, dq = \int \frac{q}{c} dq = \frac{1}{c} q^2$$

Le lagrangienne : $L = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{c} q^2$

L'équation de Lagrange s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow L\ddot{q} + \frac{1}{\mathrm{C}} q = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Et la pulsation propre : ${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$

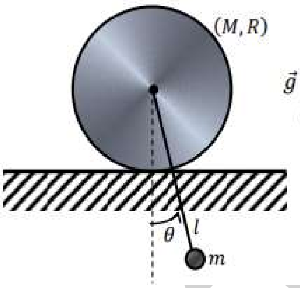
La solution est :

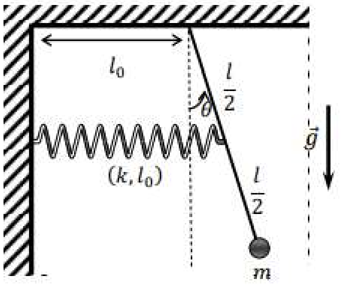
$$q(t) = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

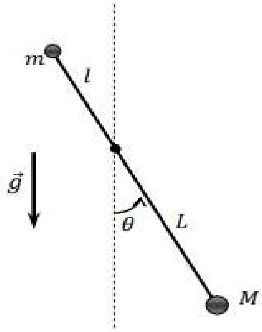
Exercices et solutions

Exercice 1

Ecrire l'énergie cinétique T, L'énergie potentielle U et la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$, pour les systèmes représentés ci-dessous, en fonction des coordonnées et des vitesses généralisées. Les ressorts, les tiges et les fils sont de masses négligeables. Les masses m sont ponctuelles.

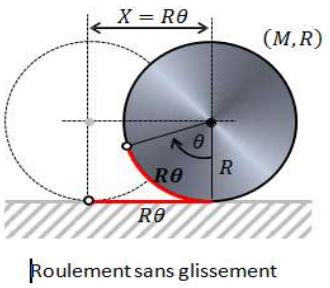


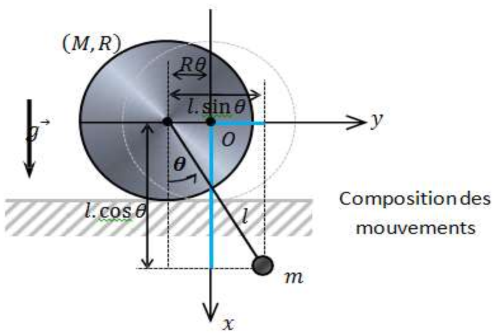




Solution :

1. Condition de roulement sans glissement : La distance parcourue sur le plan de contact (translation du centre de masse) est égale à la longueur de l'arc de cercle sur le cylindre. $X = R\theta$





Nombre de degrés de liberté : 01 (tige solidaire au cylindre)

Coordonnée généralisée : θ

- Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Avec I le moment d'inertie du cylindre plein : $I = \frac{1}{2}MR^2$

Condition de roulement sans glissement : $y\ =\ -R\theta \Rightarrow V\ =\ \dot{y} = -R\dot{\theta}$

$$\begin{cases} x_m &= L\cos\theta \\ y_m &= L\sin\theta - R\theta \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_m &= -L\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m &= L\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta} \end{cases},\ v^2\ =\ (l^2\ +\ R^2\ -\ 2lR).\dot{\theta}^2\ =\ (l\ -\ R)^2\,\dot{\theta}^2$$

Et l'énergie cinétique devient

$$T = \frac{1}{2}M(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}m\left((l\ -\ R)^2\,\dot{\theta}^2\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m((l\ -\ R)^2\ \right)\ \ \dot{\theta}^2$$

- Energie potentielle

$$U\ =\ mgh\ +\ MgH\ =\ -mg(x_m)$$

Donc : $U = -mgl.\cos\theta$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation du pendule (centre de masse du cylindre). Et pour des petits angles autour de la position d'équilibre ($\theta_0 = 0$)

$$cos\,\theta\ \approx\ 1\ -\theta^2/_2$$

Donc

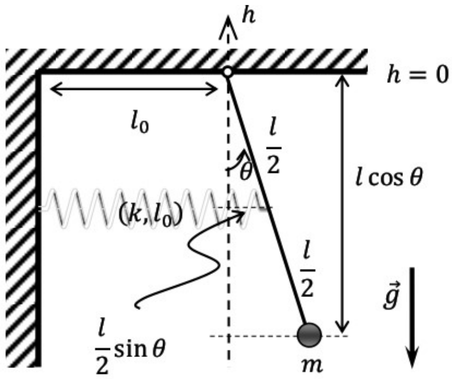
$$U\ = \frac{1}{2}mgl\theta^{\,2} -\ mgl$$

- Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2 + m((l\ -\ R)^2\ \right)\ \ \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^{\,2} +\ mgl$$

2. Nombre de degrés de liberté : 01

   Coordonnée généralisée :



- Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

- Energie potentielle

$$U\ =\ mgh\ + \frac{1}{2}kx^2$$

En choisissant l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule

$$h\ = -l\cos\theta$$

$$x = \frac{l}{2}\sin\theta$$

Donc :

$$U\ =\ -mgl\cos\theta\ + \frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)^2$$

Et pour des petits angles autour de la position d'équilibre

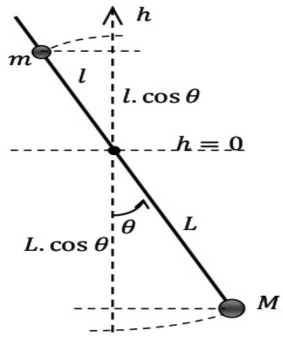
$$U = \frac{1}{2}(mgl + (\frac{1}{4}\mathrm{k}l^2)) \quad \theta^2 - mgl$$

- Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2}(mgl + (\frac{1}{4}\mathrm{k}l^2)) \quad \theta^2 + mgl$$

3. Nombre de degrés de liberté : 01 (tige solidaire au cylindre)

   Coordonnée généralisée : θ



- Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M(L\dot{\theta})^2$$

- Energie potentielle

$$U = mgh + MgH$$
$$= -mg(lcos\theta)$$
$$+ Mg(-Lcos\theta)$$

Nous avons choisi l'origine de la hauteur au point de fixation (axe de rotation) du pendule.

$$U = mgh + MgH = (ml - ML)gcos\theta$$

La position d'équilibre est donnée par

$$\left.\frac{dU(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{eq}} = 0 \Leftrightarrow -(ml - ML)g\ sin\theta_{eq} = 0 \longrightarrow \begin{cases}\theta_{eq} = 0 \\ \theta_{eq} = \pi\end{cases}$$

Le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(L\dot{\theta}\right)^2 + (ML - ml)gcos\theta$$

n utilisant l'approximation des petits angles autour de la position d'équilibre $\theta_{eq} = 0$ et en omettant la constante $(ML - ml)g$.

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(L\dot{\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}(ML - ml)g\theta^2$$

Prenant la forme d'un Lagrangien d'un oscillateur harmonique pour

$$(ML - ml)g > 0 \Leftrightarrow ML > ml$$

Chapitre III

SYSTEME LINEAIRE LIBRES AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

I.1 Oscillations amorties

En pratique, les rouages les mieux huilés ne peuvent empêcher quelques frottements : il y a amortissement, et l'amplitude des oscillations diminue avec le temps. On représente empiriquement l'effet du frottement par une force proportionnelle à la vitesse.

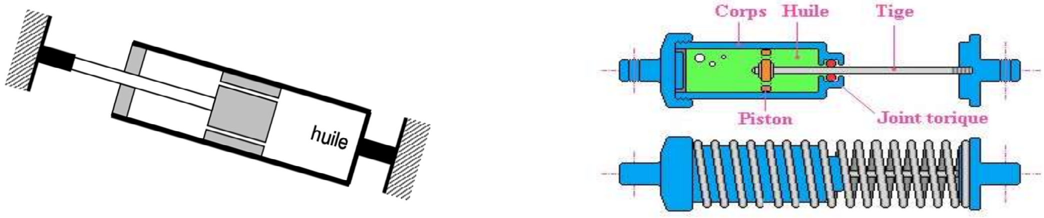


Fig.1 Exemple d'amortisseur

Le type d'amortissement visqueux est couramment utilisé dans l'étude du comportement vibratoire des systèmes mécaniques, de part sa simplicité de modélisation mais également sa capacité à pouvoir être utilise dans la description de mécanismes d'amortissements plus complexes.

On distingue deux principaux types de frottement :

- Frottement sec
- Frottement sec statique
- Frottement sec cinétique (ou dynamique)
- Frottement visqueux.

I.1 Frottement visqueux

Le système "masse - ressort - frottement visqueux" est constitué d'une masse m assujettie à se mouvoir, sans frottement, dans une direction horizontale. Elle est reliée à un point fixe par un ressort de raideur r et elle met en mouvement un piston qui subit un frottement visqueux.

Si l'on note $x(t)$ l'abscisse de la masse en prenant comme origine le point où l'élongation du ressort est nulle (ressort au repos), les forces en jeu sont :

$F_r = rx(t)$, $F_c = -xv$

Pour ce type d'amortissement, la force F_c induite sur la masse est telle qu'elle s'oppose à sa vitesse.

Où c représente la constante d'amortissement dépend de la viscosité [en Ns/m], $F_r$est la force de rappel du ressort et F est la force due au frottement visqueux.

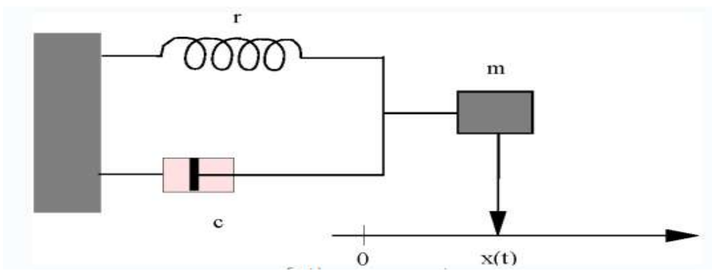


Fig.2 Système masse-ressort avec amortisseur visqueux

L'introduction d'une force de frottements a pour effet physique une déperdition d'énergie, ce qui se traduit par une diminution de l'énergie mécanique avec le temps. Ceci correspond au cas le plus proche de la réalité.

I.2 L'équation différentielle

I.2.1 principe de Newton

En projection sur l'axe horizontal (ox) et en prenant l'origine des abscisses à la position d'équilibre du système (ce qui élimine la longueur à vide du ressort), on trouve l'équation différentielle de $x(t)$:

$$F_k(t) - F_i(t) + F_c(t) = 0 \Leftrightarrow kx + c\dot{x} + m\ddot{x} = 0$$

Où x représente le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique

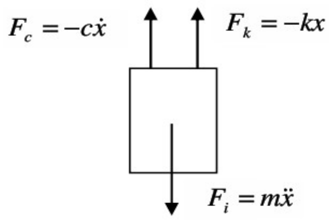


Fig.3 Système des forces appliquées

Que l'on peut réordonner en :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

en posant : $\beta = \frac{c}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Où β est un coefficient positif appelé facteur d'amortissement. Ceci est une équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants.

I.2.2 Méthode de Lagrange

S'il existe un frottement $F_c = -xv$ l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = -\ F_c$$

La fonction de dissipation peut être exprimée en fonction de la vitesse et le coefficient de viscosité:

$$D = \frac{1}{2}\ c\,\dot{x}^2$$

L'énergie cinétique est définie par :

$$E_p = \frac{1}{2}\ k\,x^2$$

L'énergie potentielle est :

$$E_c = \frac{1}{2}\ m\,\dot{x}^2$$

Pour le Lagrangien du système on a la relation suivante :

L = $E_c - E_p = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\, k\, x^2$

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

En calculant le lagrangien on trouve :

$$\Rightarrow m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow\ \ddot{x} + \frac{c}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow\ \ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La pulsation propre ${\omega_0}^2$ de l'oscillateur et elle doit être positive pour qu'il y ait une vibration.

I.2.3 Solution à l'équation différentielle

On se propose une solution à l'équation différentielle sous la forme :

$$x(t) = e^{rt}$$

Puisque e^{rt}ne peut pas être nul quel que soit t, c'est l'équation caractéristique suivante qui doit être vérifiée

$$e^{rt}(r^2 + 2\beta r + {\omega_0}^2) = 0$$

Qui selon les valeurs du discriminant (réduit)

$$\Delta = \beta^2 - {\omega_0}^2$$

On distingue alors trois cas suivant le signe du discriminant réduit :

- **Amortissement fort**: $\Delta = \beta^2 - {\omega_0}^2 > 0 \Leftrightarrow \beta > \omega_0$

Les racines de l'équation caractéristiques peuvent donc s'écrire en fonction du taux d'amortissement

$$r_{1,2} = \beta \mp \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Avec $\alpha = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

La solution générale est une combinaison linéaire des 2 solutions : $x(t) = A\, e^{r_1 t} + B\, e^{r_2 t}$

$$x(t) = e^{-\beta t}(A\, e^{\alpha t} + B\, e^{-\alpha}\ )$$

Ou A et B des constante à déterminer grâce aux conditions initiales

L'amortissement est si important qu'il n'y a pas d'oscillations ; le mouvement $x(t)$ est appelé régime apériodique.

- **Amortissement assez fort**: $\Delta = \beta^2 - {\omega_0}^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = \omega_0$

Dans ce cas, une seule solution de l'équation caractéristique existe :

$$r_{1,2} = -\beta$$

Ce qui conduit à la solution générale

$$x(t) = e^{-\beta t}(A + Bt)$$

Là aussi il n'y a pas d'oscillations et le mouvement est appelé régime critique.

- **Amortissement faible : :** $\Delta = \beta^2 - {\omega_0}^2 < 0 \Leftrightarrow \beta < \omega_0$

$\Delta = \beta^2 - {\omega_0}^2 < 0$

Dans ce cas, la solution complexes sont données par:

$$r_{1,2} = -\beta \mp \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \mp \omega_d$$

Ou encore : $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ est pseudo-pulsation .

La solution de l'équation différentielle est de la forme

$$x(t) = (A\, e^{r_1 t} + B\, e^{r_2 t})$$

$$x(t) = (A\, e^{(-\beta + \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t} + B\, e^{(-\beta - \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t})$$

$$x(t) = e^{-\beta t}(A\, e^{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t} + B\, e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t})$$

Ou B et C sont des constants complexes arbitraires à déterminé par les conditions initiales.

Il est possible de réécrire la solution ci-dessus sous une forme réelle :

$$x(t) = C\, e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \emptyset\right) = C\, e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \emptyset)$$

Avec C et φ des constantes à déterminer grâce aux conditions initiales.

Cette décroissance des oscillations est entièrement due aux forces dissipatives par l'intermédiaire du coefficient d'amortissement β.

On appel $\tau = \frac{1}{\beta}$ constante de temps ou temps de relaxation de l'amplitude. Le mouvement est oscillatoire périodique amorti de pseudo période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

C'est le régime oscillatoire amorti.

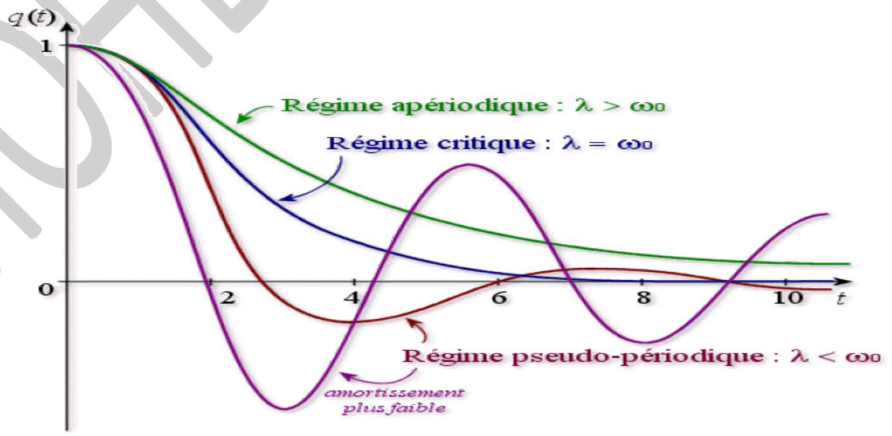


Fig.4 Système faiblement amorti (pseudo périodique)

La figure ci-dessus représente les réponses de quatre oscillateurs, caractérisés chacuns par un coefficient d'amortissement et une pulsation propre , évoluant soit en régime apériodique, soit en régime critique, soit en régime pseudo-périodique.

I.2.4 Facteur de qualité mécanique

On définit le facteur de qualité Q par les expressions :

$$Q = \pi \frac{\tau}{T} = \pi \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}} = \frac{\omega_d}{2\beta}$$

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande. Or Q est d'autant plus grand, à $\omega_0$donné, que l'amortissement est faible, d'où le nom de facteur de qualité.

Il existe également deux autres définitions de Q liées :

- l'une à l'énergie :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

où $\mathrm{E} = \mathrm{E}(\mathrm{t_n})$ est l'énergie totale du système à l'instant $\mathrm{t_n}$,et $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{E}(\mathrm{t_n} + \mathrm{T_1}) - \mathrm{E}(\mathrm{t_n})$ est l'énergie dissipée pendant la pseudo-période suivant $\mathrm{t_n}$.

Dans le cas de l'amortissement très faible : $2\pi \frac{\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{E}} \approx \frac{\omega_d}{2\beta}$

I.2.5 Taux d'amortissement

Dans un souci de simplicité dans l'écriture des équations, il est préférable d'exprimer le déplacement de la masse sur la base du taux d'amortissement ζ, défini par :

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Il apparaıt alors que la solution générale de l'équation du mouvement (9) revêt plusieurs formes selon que

- $\zeta < 1$ → Mouvement sous-amorti. mouvement est périodique.
- $\zeta = 1$ → Mouvement critique.
- $\zeta > 1$ → Mouvement sur-amorti. mouvement est apériodique.

En outre, ω_d représente la pulsation propre apparente définie par : $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$.

En physique, le taux d'amortissement (damping ratio) est une grandeur sans dimension caractérisant l'évolution et la décroissance au cours du temps des oscillations d'un système physique.

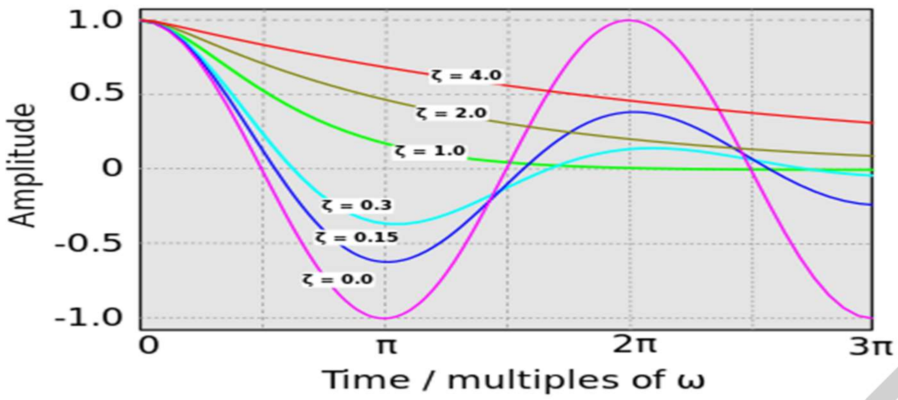


Fig.5 Différents régimes de retour à l'équilibre en fonction

La figure ci-dessus représente les différents régimes de retour à l'équilibre en fonction de la valeur du taux d'amortissement ζ. Les régimes apériodique (ζ>1), critique (ζ=1), pseudo-périodique (ζ<1) et harmonique (ζ=0). La courbe représente les oscillations (x(t)) relatives à la position de départ (x(0)) d'un oscillateur mécanique à une dimension sans vitesse initiale..

I.2.5 Mesure du taux d'amortissement

Le coefficient d'amortissement ou le taux d'amortissement sont les plus délicats à déterminer. Si la masse et la raideur peuvent être déterminées par des tests statistiques, l'amortissement nécessite une mesure dynamique. Une approche consiste à mesurer la décroissance de l'enveloppe pour un système sous-amorti.

Cette approche conduit au concept de décrément logarithmique. On définit la décroissance des élongations max à chaque période

$$\delta = \mathrm{Log}\frac{x(t)}{x(t+T)} = \beta T$$

Avec $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$ est le pseudo-periode

Avec δ nombre sans dimension qui caractérise le degré d'amortissement du système. Représente la décroissance de l'amplitude après une seule pseudo-période du système

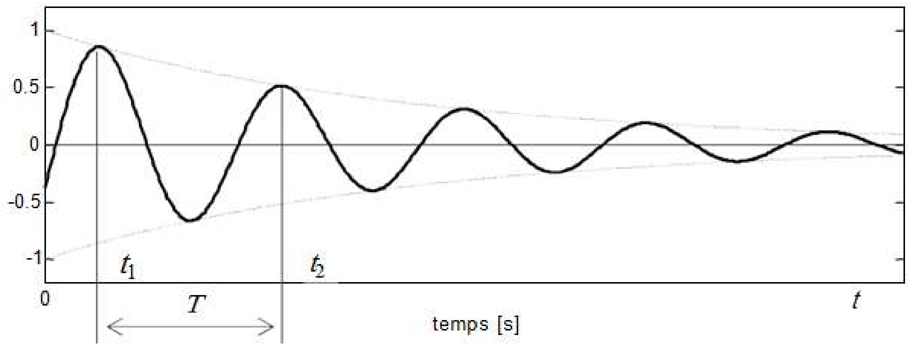


Fig.6 Réponse libre amortie

Avec

$x_1(t) = C\, e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \emptyset)$

$x_2(t+T) = C\, e^{-\beta(t+T)} \cos(\omega_d (t+T) + \emptyset)$

On obtient

$$\delta = Log \frac{x(t)}{x(t+T)} = \beta T$$

Le décrément est obtenu par des mesures en t_1 et t_2 par $\delta = Log \frac{x(t_1)}{x(t_2)}$

I.3 Bilan énergétique

Reprenons l'équation du mouvement :

$$m\frac{dv}{dt} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \Leftrightarrow mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow mvdv + kxdx = -c\dot{x}^2 dt \Leftrightarrow$$

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -c\dot{x}^2 dt \Leftrightarrow d\left(E_c + E_p\right) = dE_T$$

Ou E_T est l'énergie totale du système.

D'autre part, le travail effectué par les forces de frottements pendant le déplacement dx est :

$$dW = cvdx = cv\frac{dx}{dt}dt = cv^2 dt$$

D'autre part le travail des forces du frottement se calcule comme suit :

$$dEt = -dW$$

L'équation ci-dessus représente la diminution de l'énergie totale (ou dissipation d'énergie) du système dû au travail des forces de frottement.

Expérimentalement, les oscillations libres d'un oscillateur mécanique réel finissent toujours par s'arrêter : l'oscillateur est amorti.

En effet, sous l'effet des forces de frottements, l'évolution du mobile (appelée « relaxation de l'oscillateur » est telle qu'au bout d'une durée suffisamment longue :

- son énergie cinétique est nulle : il n'oscille plus
- son énergie potentielle est minimale : il se retrouve dans sa position d'équilibre stable.
- Son énergie mécanique a alors diminuée du fait des frottements : il y a eu dissipation d'énergie sous forme thermique.

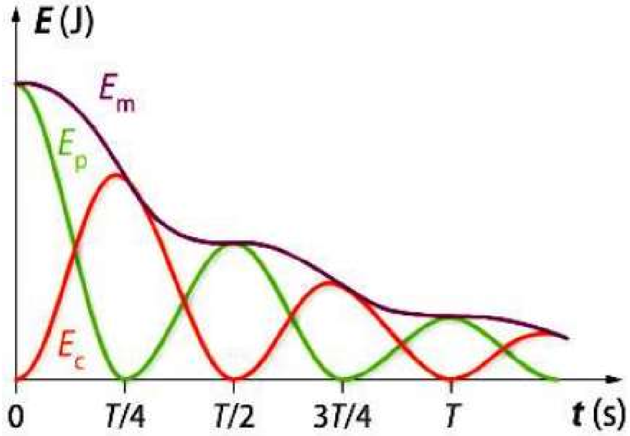


Fig.8 en présence des frottements, l'énergie mécanique d'un oscillateur décroit

I.4 Régime libre d'un circuit RLC série : oscillateur amorti électrique

Nous allons nous intéresser dans un premier temps au comportement du circuit lorsque le condensateur à été préalablement chargé sous la tension E du générateur, et lorsqu'il se décharge dans la bobine et la résistance.

On considère un circuit RLC série branché sans alimentation. À l'instant initial $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Pour $t < 0$, on suppose que le condensateur est chargé $u_C(t < 0) = U_0$ et qu'il n'y a pas de courant dans le circuit $i(t < 0) = 0$.

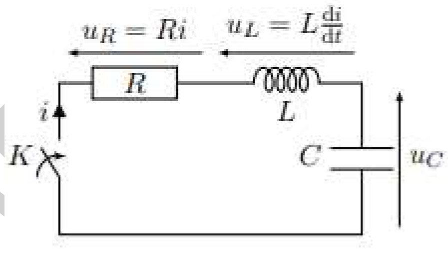


Fig.9 Régime libre d'un circuit RLC série

Dans l'unique maille du problème, la loi des mailles donne

$0 = u_R + u_L + u_c \leftrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + +\frac{1}{C}\,q = 0 \leftrightarrow$

Comme : $i = \frac{dq}{dt}$ l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{Lc}q = 0 \leftrightarrow \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + {\omega_0}^2 q = 0$$

Où on introduit la pulsation caractéristique $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et le facteur de qualité $= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Remarque :

- Pour un amortissement critique : $\delta = \omega_0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{R}{2L}$

Théorème 3 : Tout système mécanique caractérisé par une équation différentielle de degré 1 ou 2 peut être simulé par un circuit RLC

I.4.1 Facteur d'amortissement

Il va être lié à la résistance globale du circuit. Plus ce facteur sera grand, plus l'amortissement sera élevé :

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$

I.4.2 Coefficient d'amortissement

Il peut être intéressant de travailler avec une grandeur sans dimension. On définit alors le coefficient d'amortissement par :

$$\alpha = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

I.4.3 Facteur de qualité

Pour caractériser un circuit, on utilise souvent une autre grandeur appelée facteur de qualité. Elle est reliée à toutes les grandeurs dont on vient de parler :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

La valeur de Q détermine les régimes libres d'un dipôle (RLC) :

- $Q > 0{,}5$: le régime est périodique amorti.
- $Q = 0{,}5$: le régime est critique.
- $Q < 0{,}5$: le régime est apériodique.

Exercices et solutions

Exercice 1 :

On considère un oscillateur mécanique constitué d'une masse attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal, l'autre extrémité étant fixe. Le système est en oscillation et on mesure la position instantanée de la masse. Le graphe suivant décrit cette évolution.

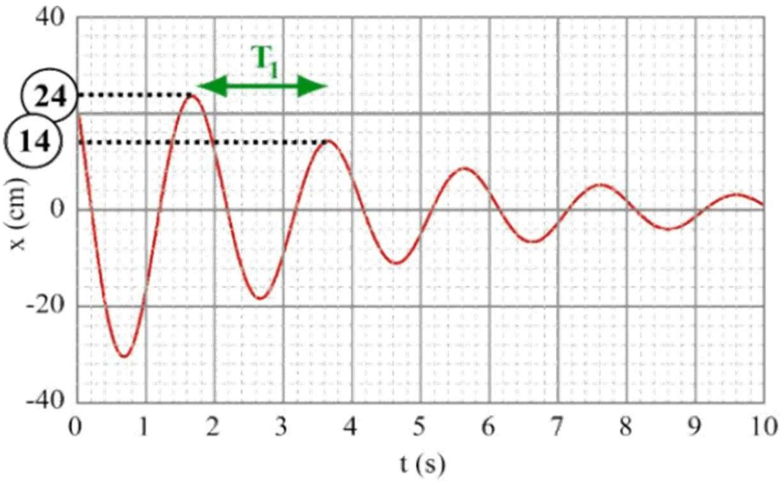


Fig.7 évolution de l'oscillateur

1. Quel est le régime d'évolution de l'oscillateur.
2. Déterminer graphiquement la pseudo-période d'oscillation que l'on notera T_1.
3. Rappeler la définition du décrément logarithmique. Déterminez-le graphiquement, puis exprimez-le littéralement en fonction du coefficient d'amortissement et de la pseudo-période.
4. Déduire les valeurs du coefficient d'amortissement, de la période propre et du facteur de qualité.

Solution :

D'après le graphique, on constate que le régime d'évolution de l'oscillateur est un régime pseudo-périodique

La pseudo-périodeT_1est déterminée, par exemple, entre deux maxima du graphe : Par la mesure, on trouve que 2s.

Graphiquement, on détermine le décrément logarithmique : $\delta = ln\frac{24}{14} = 0.53$.

On relie le décrément logarithmique à la pseudo-période et au coefficient d'amortissement en partant de la définition :

$x_1(t) = C\ e^{-\beta t}\cos(\omega_d t + \emptyset)$

$x_2(t+T) = C\ e^{-\beta(t+T)}\cos(\omega_d(t+T) + \emptyset)$

On obtient

$$\delta = \ ln\frac{x_1(t)}{x_2(t+T)} = \ ln\frac{C\ e^{-\beta t}\cos(\omega_d t+\emptyset)}{C\ e^{-\beta(t+T)}\cos(\omega_d(t+T)+\emptyset)}$$

Or, par définition, on a : $\cos(\omega_d t + \emptyset) = \cos(\omega_d(t+T) + \emptyset)$, donc $\delta = \beta T_1$

Sachant que$T_1 = 2\ s$ et $= ln\frac{24}{14} = 0.53$, on en obtient : $\beta = \frac{0.53}{2}\ s^{-1}$

De même, on a : $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_d} = \sqrt{(\frac{2\pi}{T_0})^2 - \beta^2}$

Et : T_0 représente la période propre des oscillations.

Donc : $T_0 = 1.99\ s$

Exercice 2 :

Nous considérons une poulie, accrochée à un ressort et à un amortisseur, portant sur son rayon une masse ponctuelle. La poulie effectue des petites oscillations autour d'un axe horizontal passant par O. A l'équilibre la masse m est sur la verticale passant par O.

1. Ecrire l'énergie cinétique T, L'énergie potentielle U et la fonction de Lagrange L.

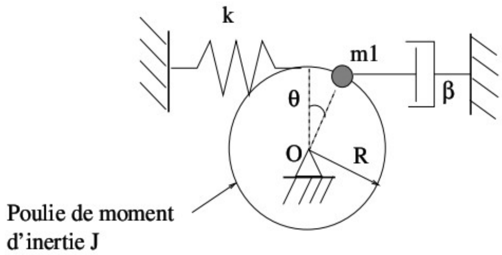


Fig.4 Poulie en oscillations amorties

Solution :

Energie cinétique :$T = \frac{1}{2}(J + m_1R^2)\dot{\theta}_1$

Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + m_1\ gR\ cos\theta$

Energie dissipation : $D = \frac{1}{2}c\ R^2\dot{\theta}^2$

Le Lagrangien s'écrit: $L = T - U = \frac{1}{2}(J + m_1R^2)\dot{\theta}_1 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - m_1\ gR\ cos\theta$

En appliquant l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

Nous obtenons l'équation différentielle du mouvement:

$$(J + m_1R^2)\ddot{\theta}_1 + c\ R^2\dot{\theta} + (kR^2 - m_1\ gR\ )\theta = 0$$

Exercice 3 :

Un disque homogène de masse M et de rayon 2R est relié à sa périphérie à un ressort de raideur K et à un amortisseur de coefficient de frottement **α**. Une masse 2m est suspendue à un fil enroulé autour de la périphérie du disque et une autre masse **m** suspendue à un fil enroulé autour d'un sillon de rayon **R** gravé sur la surface du disque. Les fils sont supposés inextensibles et non glissants. Le disque peut tourner librement autour de son axe fixe. Le moment d'inertie du disque autour de son axe est :

$$J_{/o} = 1/2M\ R^2$$

1. Trouver l'énergie cinétique Ec, l'énergie potentielle Ep, ainsi la fonction de dissipation ED pour $\theta \ll 1$. (à l'équilibre le ressort n'était pas déformé).
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
3. déduire la pulsation propre ω0 et le coefficient d'amortissement δ.
4. Trouver la nature de mouvement.
5. Quelle est la valeur de **α** qui ne pas dépasser pour avoir des oscillations.

On donne : α = 8 N. s/m, K = 2 N/m ,M = 2m = 1kg,m = 0.5kg

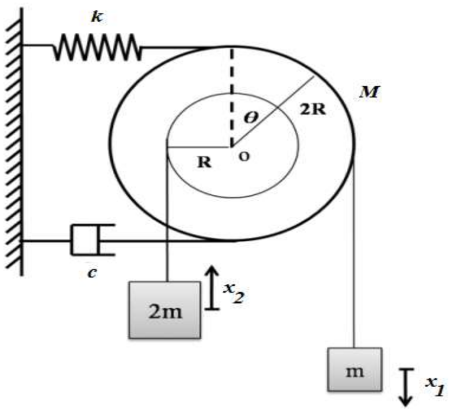


Fig.5 Poulies en oscillations amorties

Solution :

1. L'énergie cinétique :

$$T = T_{c\ disque} + T_{c\ 2m} + T_{c\ m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M4R^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}2m\dot{x}_2{}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2{}_1$$

Puisque le fil est non glissant et inextensible on a : $x_2 = R\theta$, $x_1 = R2\theta$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M4R^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}2mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m4R^2\dot{\theta}^2 = (M+3m)R^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle :

$$E = E_{pk} + E_{p\ 2m} + E_{p\ m} = \frac{1}{2}kx_1{}^2 + 2mgx_2 - mgx_1 = 2kR^2\theta$$

la fonction de dissipation: $D = \frac{1}{2}c\ \dot{x}^2 = 2cR^2\dot{\theta}^2$

Le Lagrangien est :$L = (M+3m)R^2\dot{\theta}^2 - 2kR^2\theta^2$

2. L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$2(M+3m)R^2\ddot{\theta} + 2cR^2\dot{\theta}^2 + 2kR^2\theta^2 = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2c}{(M+3m)}\dot{\theta}^2 + \frac{2k}{(M+3m)}\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta}^2 + \omega^2{}_o\theta = 0$$

3. La pulsation propre ω_oω0 et le coefficient d'amortissement β:

Le coefficient d'amortissement β :

$$2\beta = \frac{2c}{(M+3m)} \Leftrightarrow \beta = \frac{8}{1+1} = 4\ s^{-1}$$

La pulsation propre

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2k}{(M+3m)}} = \sqrt{\frac{2\,2}{(1+3\;0.5)}} = 1.26\,rd.s^{-1}$$

4. La nature de mouvement :

$$\beta^2 - {\omega_o}^2 = 4^2 - 1.26\,^2 = 6.4 > 0 \Rightarrow \; Le\ mouvement\ apériodique$$

5. Pour avoir des oscillations il faut que

$$\beta^2 - {\omega_o}^2 < 0 \Longrightarrow \beta < \omega_o \Longrightarrow c < \sqrt{2k(M+3m)} \Longrightarrow c < 4\;Ns/m$$

Chapitre IV

SYSTEMES LINEAIRES FORCES AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

I.1 Oscillations forcées et résonance mécanique

I.1.1 Oscillations forcées

Les oscillations sont parfois nuisibles et il faut les amortir (suspension de véhicule) et d'autres fois nécessaires et il faut les entretenir (balancier d'une horloge). Dans ce dernier cas le couplage avec une source d'énergie peut être périodique comme les impulsions données à une balançoire ou continu comme le couplage à un générateur sinusoïdal. Au couplage continu, correspond l'étude des oscillations forcées et celle des phénomènes de résonances qui lui sont associés.

Une force extérieure dépendante du temps imposée à un oscillateur définit un régime d'oscillations forcées. Ce sont, par exemple, les irrégularités de la chaussée d'une route qui vont provoquer les oscillations forcées du véhicule ou un moteur avec excentrique qui tire un ressort.

I.1.2 Équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle des oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté est donnée par :

- Pour un mouvement de translation l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=F_{ext}$$

Pour un mouvement de rotation, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=\mathcal{M}(F_{ext})$$

Ou $\mathcal{M}(F_{ext})$ est le moment de la force appliqué, F_{ext}la force généralisée à une force extérieure. L

Le bras de levier est la distance droite d'action de la force.

Exemple : masse ressort- amortissent

Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple). il est soumis entre autre, à une force de frottement $F_c = -xv$ et à une force excitatrice $F_{ext} = F_{ext}\cos(\omega_0 t)$

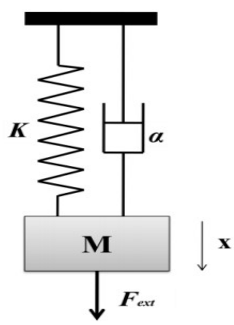


Fig.1 système masse-ressort

L'énergie cinétique du système :$E_c = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système :$E_p = \frac{1}{2}\, k\, x^2$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\, c\, \dot{x}^2$

- La fonction de Lagrange : L = $E_c - E_p$=$\frac{1}{2}\ m\ \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\ k\ x^2$

L'équation différentielle du mouvement de la charge q s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F_{ext} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\ \dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m}sin(\omega t)$$

C'est l'équation différentielle du mouvement d'un système amorti forcé à 1ddL de la forme :

$$\ddot{x} + 2\beta\ \dot{x} + \omega_0^2 x = A_o$$

$A_o$est la fonction d'excitation du système.

- Nature des mouvements oscillatoires
  - Si $A_o = 0 \rightarrow$ le mouvement oscillatoire est dit libre, si non le mouvement est forcé.
  - Si $\beta = 0 \rightarrow$ le mouvement oscillatoire est dit conservatif (non amorti), si non le mouvement est amorti.

I.1.3 Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle est égale à la somme de la solution homogène $x_h(t)$ de l'équation sans second membre et d'une solution particulière x_p(t) de l'équation complète :

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

Remarque :

La solution homogène a été étudiée dans les cas des oscillations libres amorties.

I.1.3.1 Solution particulière

La solution particulière x_p(t) est déterminée ici dans les deux cas suivants : excitation uniforme (échelon, $A_o = cst$) et Excitation harmonique de pulsation ω.

- **Excitation harmonique de pulsation**

En utilisant les représentations complexes $A_o = A_m e^{j\omega t}$, la solution x_p est une fonction harmonique de même pulsation ω :

$$x_p(t) = Ae^{j(\omega t+\gamma)}$$

On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme complexe :

$$x_p(t) = Ae^{j(\omega t+\gamma)} \longrightarrow \dot{x}_p(t) = Aj\omega e^{j(\omega t+\gamma)} = j\omega x_p(t) \longrightarrow \ddot{x}_p(t) = Aj^2\omega^2 e^{j(\omega t+\gamma)} = -\omega^2 x_p(t)$$

En utilisant ces résultats dans l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x_p} + 2\beta\ \dot{x_p} + \omega_0^2 x_p = A_o \Leftrightarrow (-\omega^2 + 2\beta\omega j + \omega_0^2)\ Ae^{j(\omega t+\gamma)} = A_m e^{j\omega t}$$

$$(-\omega^2 + 2\beta j + \omega_0^2)\ Ae^{+j\gamma} = A_m \Leftrightarrow (-\omega^2 + 2\beta\omega j + \omega_0^2)\ A = A_m e^{-j\gamma}$$

Et on a: $e^{-j\gamma} = cos\gamma - jsin\gamma$

D'où :

$$(-\omega^2 + 2\beta\omega j + \omega_0^2)\ A = A_m(cos\gamma - jsin\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + \omega_0^2)\ A = A_m cos\gamma \\ 2\beta\omega A = -A_m sin\gamma \end{cases}$$

En divisant les équations on obtient :

$$\tan(\gamma) = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega} \Leftrightarrow \gamma = artan(\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega})$$

Et :

$$((-\omega^2+\omega_0^2)\, A)^2 \quad + (2\beta\omega A)^2 = A_m(sin^2\gamma + cos^2\gamma) \leftrightarrow A = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$$

Donc :

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} e^{j(\omega t + artan(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega}))}$$

D'autre part :

$$x_p(t) = \frac{F_o}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \cos(j\omega t + artan(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}))$$

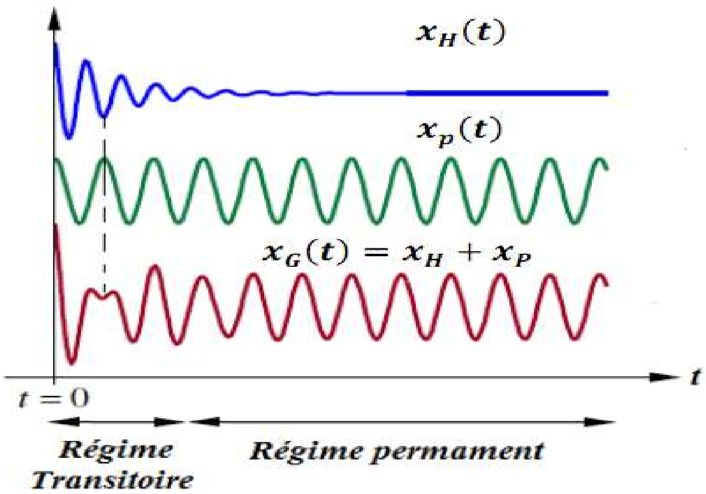


Fig.2 Superposition du régime transitoire et du régime permanant

I.2 Caractéristiques du mouvement oscillatoire forcée en fonction de la frequence

I.2.1 Phénomène de résonance

La pulsation d'excitation Ω pour laquelle L'amplitude A atteint son maximum est appelée pulsation de résonance (d'amplitude).

Lorsqu'il est en oscillation forcée, l'amplitude de la vibration d'un oscillateur est maximale si la fréquence imposée par l'excitateur atteint une valeur particulière appelée fréquence de résonance. Celle-ci est voisine de sa fréquence propre. On a alors atteint la résonance.

I.2.2 Résonnance en amplitude

Nous allons étudier la variation de l'amplitude A en fonction de la pulsation de l'excitation :

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$$

A est maximale lorsque :

$$\frac{dA}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}\right)=\frac{2(-2\omega)(\omega_0^2-\omega^2)+8\omega\beta^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}=0\Longrightarrow\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

Cette pulsation est appelée la pulsation de résonance et est notée :$\omega_R=\omega$

A cette pulsation, l'amplitude est :

$$A_{max}(\omega=\omega_R)=\frac{\frac{F_o}{m}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

L'étude complète de la fonction montre qu'il existe :

Si $\beta>\frac{\omega_o}{\sqrt{2}}$ un maximum pour : $\omega_R=0$

Si $\beta=\frac{\omega_o}{\sqrt{2}}$ un maximum pour : $\omega_R=0$

Si $\beta<\frac{\omega_o}{\sqrt{2}}$ un maximum pour : $\omega=\omega_R$. dans ce dernier cas la fonction présente un pic de résonance pour la pulsation de résonance. On dit que le système entre en résonance et l'amplitude A est maximale :

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

Cette condition ($\omega 0\gg\beta$) conduit à l'hypothèse suivante : $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\sqrt{\omega_0^2}=\omega_0$. L'amplitude de vibration à la résonance est (pour les faibles amortissements):

$$A_{max}=\frac{\frac{F_o}{m}}{2\beta\omega_0}$$

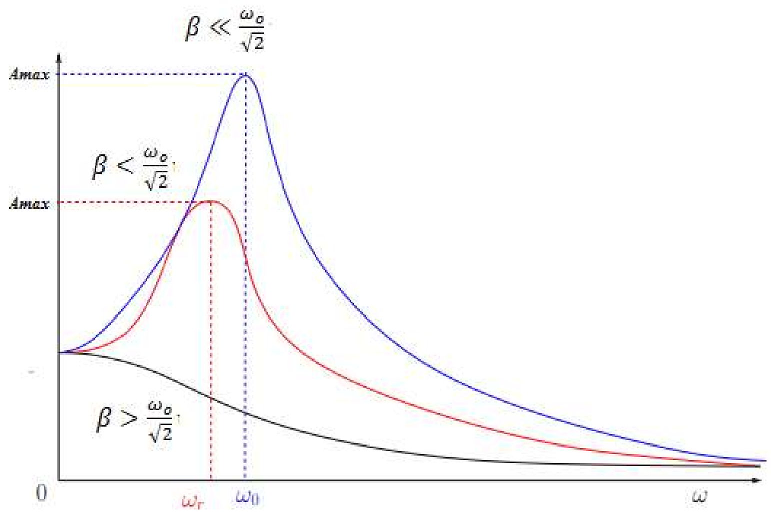


Fig.3 Réponse fréquentielle de l'amplitude d'un oscillateur vis à vis d'une excitation sinusoïdale.

La Fig. 3 représente l'évolution de *A* en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement. On constate que si l'amortissement est suffisamment faible, l'amplitude des oscillations passe par un maximum : c'est la résonance en élongation

Remarques importantes :

On prend l'équation de l'amplitude :

$$\frac{A(\omega)}{A_o} = \frac{1}{\omega_o\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2)^2+\left(2\beta\frac{\omega}{\omega_o\omega_o}\right)^2}} = \frac{1}{\omega_o\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$$

Quand le rapport d'amortissement $\xi = \frac{\beta}{\omega_o}$. La valeur de ωpour laquelle l'amplitude A est maximale dépend du rapport d'amortissement. L'amplitude A varie non linéairement en fonction de la pulsationω. L'amplitude A diminué quand le rapport d'amortissement augmente L'amplitude A diminué quand le rapport d'amortissement augmente. La variation de l'amplitude est représentée sur la figure ci-dessous.

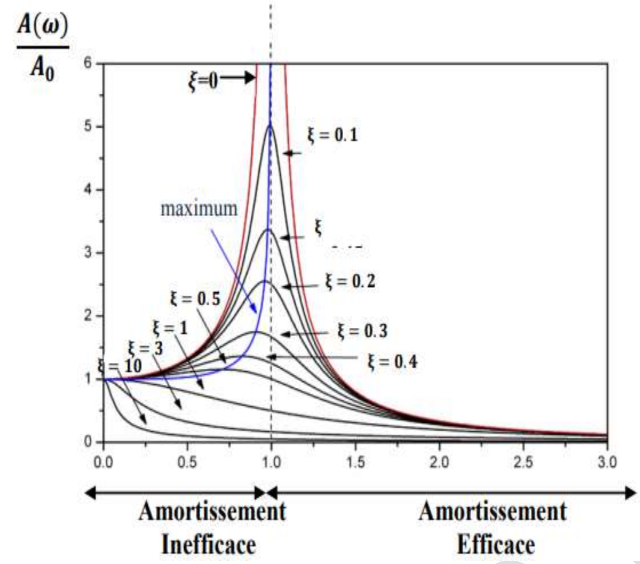


Fig.4 Variation de l'amplitude en fonction de pulsation

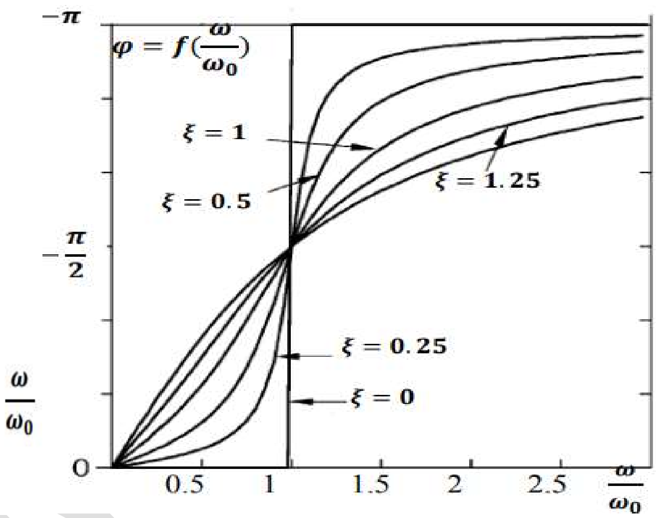


Fig.5 Variation de la phase en fonction de pulsation

La phase est exprimée par :

$$\tan(\gamma) = \frac{-\frac{2\beta\omega}{\omega_o\omega_o}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{-2\xi\frac{\omega}{\omega_o}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} = g(\omega)$$

L'étude des variations de la phase permet d'écrire

- Pour $\frac{\omega}{\omega_o} = 1 \Longrightarrow tan(\gamma) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \gamma = -\frac{\pi}{2} \quad ,\forall\xi$
- Pour $\xi = 0 \Longrightarrow \ tan(\gamma) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0 \quad ,\gamma = -\pi$

I.2.3 Bande passante:

On définit la largeur de la bande passante comme suit:

$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$

où ω_1, ω_2sont des pulsations correpondantes à une amplitude égale à:

$$\frac{A_{max}(\omega = \omega_R)}{\sqrt{2}}$$

Le facteur de qualité Le facteur de qualité est un nombre sans dimension qui caractérise une résonance. Il est défini par :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_R}{\omega_1 - \omega_2}$$

- Amortissement faible: On obtient pour $A(\omega\ )$ une "courbe de résonance" typique caractérisée par:

$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ et $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{2\beta\omega}{\omega_R}$

La bande passante est donc donnée par : $\omega_1 \approx \omega_R - \beta\,, \omega_2 \approx \omega_R + \beta$

Pour caractériser l'acuité (intensité) de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une bande passante

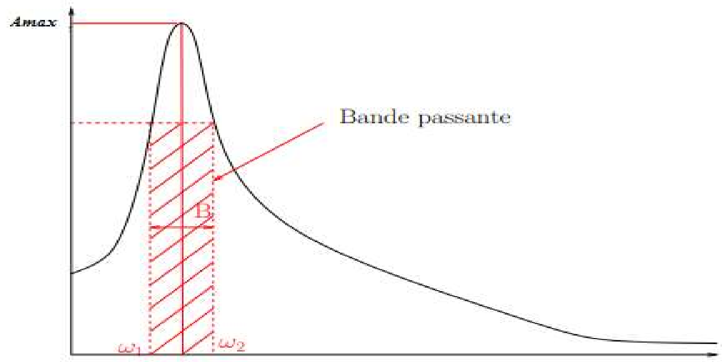


Fig.5 Bande passante

La bande passante B est très utile pour déterminer la constante d'amortissement du système.

I.2.4 Facteur de qualité

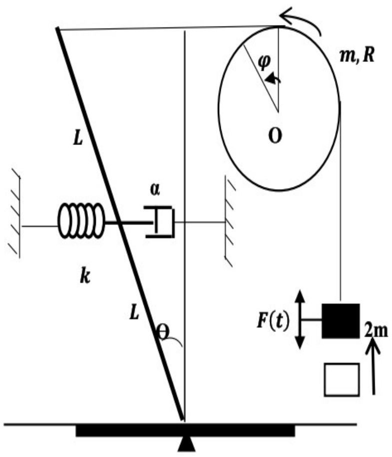
Dans les systèmes électriques, ce phénomène permet de calculer le facteur de qualité □ qui augmente lorsque l'amplitude maximale augmente :

$$Q = \frac{A_{max}}{A_o} = \frac{\omega_R}{\omega_1 - \omega_2}$$

Exercices et solutions

Exercice 1 :

Dans le système ci-contre un fil inextensible, roule son glisser autour d'un disque de masse et de rayon R; qui tourne librement autour de son axe fixe. Il porte à son extrémité une masse $2m$; une tige de masse m et de longueur l et un ressort de raideur k à une extrémité fixe et de l'autre reliée au milieu de la tige avec un amortisseur de coefficient (α). A l'équilibre (représenté en pointille) la tige était verticale et le ressort subit une déformation initiale.

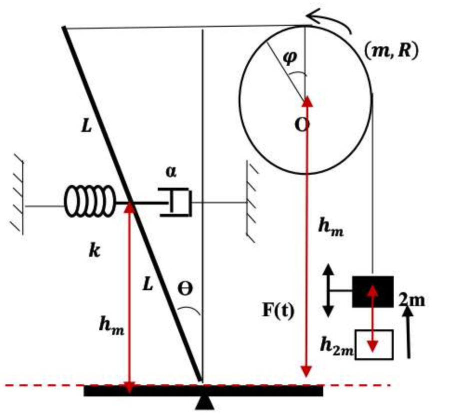


1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2. Trouver la valeur que le coefficient α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.
3. Trouver la nature du mouvement si $\alpha = 22\ N.s/m.$; ainsi que la solution de l'équation.

Le système est soumis à une force extérieure $F_0 sin(\omega t)$ appliquee à la masse 2m

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement forcé amorti et donnez l'expression de la solution correspondant au régime permanent.
2. Ecrire l'expression de l'amplitude A et du déphasage γ
3. Donner la solution générale correspondante et tracer θ(t) (les deux régimes).

Solution :



1. L'équation différentielle :

- Le nombre de degré de liberté : d =N-r ,

N=3 (rotation m → φ , rotation m→ θ, translation 2m→ x) - r =2 (x=Rφ , Rφ=2Lθ) = 1 , donc $d = 1$.

- Energie cinétique

$$T = T_{2m} + T_{m/b} + T_{m/c} = \frac{1}{2}(8mL^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

$$J_{m/o} = \frac{1}{12}m(2L)^2 + mL^2 = \frac{3}{4}mL^2$$

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

$$T = T_{2m} + T_{m/b} + T_{m/c} = \frac{1}{2}(8mL^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}mL^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)\dot{\varphi}^2$$

Et: $\varphi = \frac{2L\theta}{R}$

$$T_{tot} = \frac{1}{2}\left(8m + \frac{4}{3}m + 2m\right)L^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{34}{3}mL^2)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle :

$$U_{tot} = U_p + U_e = U_k + U_{2m} + U_{m/T} + U_{m/c}$$

$U_k = \frac{1}{2}k(x - x_o)^2$, $x = L\theta$

$U_{2m} = 2mgh_{2m}$, $h_{2m} = x + h = 2L\theta + h$

$U_m = mgh_{m/b}$, $h_{m/b} = Lcos\theta$

$U_m = mgLcos\theta$

Donc:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}k(L\theta - x_o)^2 + 2mg(2L\theta + h) + mgLcos\theta$$

$$\frac{dU_{tot}}{d\theta} = k(L\theta - x_o) \quad + 2mg(2L) - mgLsin\theta \rightarrow \theta = 0 \text{ condition d'équilibre}$$

- Le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}(\frac{34}{3}mL^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(L\theta - x_o)^2 + 2mg(2L\theta + h) + mgLcos\theta$$

- Le formalisme de Lagrange s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha(L\dot{\theta})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (\frac{34}{3}mL^2)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kL^2\theta + \underbrace{(kLx_o - 4mgL)}_{condition\ d'equilibre} + mgLsin\theta = -kL\theta + mgLsin\theta = -(kL^2 - mgL)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{34}{3}mL^2\right)\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (kL^2 - mgL)\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{34m}\dot{\theta} + \frac{3(kL^2 - mgL)}{34mL^2}\theta = 0$$

équation différentielle est :

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + {\omega_o}^2\theta = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} 2\beta = \frac{3\alpha}{34} \\ \omega_o = \sqrt{\frac{3(kL^2 - mgL)}{34mL^2}} \end{cases}$$

2. Pour qu'un système amortie oscille il faut que

$\Delta = \beta^2 - {\omega_o}^2 < 0 \Leftrightarrow \beta < \omega_o \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{68m} < \sqrt{0.88} \Leftrightarrow \alpha < \sqrt{0.88}.\frac{1.68}{3} \Leftrightarrow \alpha < 21$ N.s/m

$\omega_o = \sqrt{\frac{3(20.1 - 1.10)}{34.1.1}} = \sqrt{\frac{30}{34}} = \sqrt{0.88}$ rad/s (Régime pseudo-périodique)

La solution de cette équation pour un amortissement faible : $\theta(t) = C\ e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \emptyset\right)$

3. La nature du mouvement si $\alpha = 22\ \mathrm{N.s/m}$

$$\Delta = \left(\frac{66}{68}\right) - \frac{30}{34} = 0.94 - 0.88 = 0.06 > 0$$

le mouvement est apériodique son équation :

$$\theta(t) = e^{-\beta t}\left(A\, e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + B\, e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}\right) = \left(A\, e^{-1.2t} + B\, e^{-0.7t}\right)$$

3- L'équation différentielle du mouvement forcé amorti :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F_{ext} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{34m}\dot{\theta} + \frac{3(kL^2 - mgL)}{34mL^2}\theta = \frac{3F_o}{34mL^2} sin(\omega t)$$

- Équation différentielle du 2éme ordre de la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + {\omega_o}^2\theta = Bsin(\omega t)$$

Avec

$$B = \frac{3F_o}{34mL^2}$$

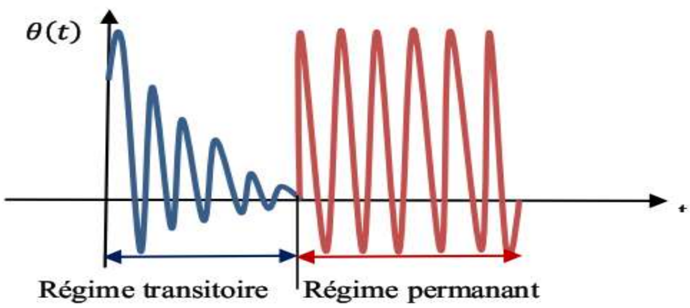
La solution de cette équation : $\theta(t) = \theta_g(t) + \theta_p(t)$

La solution du régime permanant : $\theta_p(t) = A\sin(\omega t + \gamma)$

$\omega = \sqrt{{\omega_o}^2 - 2\beta^2},\ A(\omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}$, $\gamma = artan(\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2})$

La solution du régime transitoire : $\theta_g(t) = C\, e^{-\beta t}\sin(\omega_d t + \gamma)$

Donc la solution générale : $\theta(t) = \theta_g(t) + \theta_p(t) = C\, e^{-\beta}\ \sin(\omega_d t + \gamma) + \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}\sin(\sqrt{{\omega_o}^2 - 2\beta^2}t + artan(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2})$



Chapitre IV

SYSTEMES LINEAIRES FORCES AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

I.1 Oscillations forcées et résonance mécanique

I.1.1 Oscillations forcées

Les oscillations sont parfois nuisibles et il faut les amortir (suspension de véhicule) et d'autres fois nécessaires et il faut les entretenir (balancier d'une horloge). Dans ce dernier cas le couplage avec une source d'énergie peut être périodique comme les impulsions données à une balançoire ou continu comme le couplage à un générateur sinusoïdal. Au couplage continu, correspond l'étude des oscillations forcées et celle des phénomènes de résonances qui lui sont associés.

Une force extérieure dépendante du temps imposée à un oscillateur définit un régime d'oscillations forcées. Ce sont, par exemple, les irrégularités de la chaussée d'une route qui vont provoquer les oscillations forcées du véhicule ou un moteur avec excentrique qui tire un ressort.

I.1.2 Équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle des oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté est donnée par :

- Pour un mouvement de translation l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=F_{ext}$$

Pour un mouvement de rotation, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=\mathcal{M}(F_{ext})$$

Ou $\mathcal{M}(F_{ext})$ est le moment de la force appliqué, F_{ext}la force généralisée à une force extérieure. L

Le bras de levier est la distance droite d'action de la force.

Exemple : masse ressort- amortissent

Reprenons le cas du pendule élastique (vertical par exemple). il est soumis entre autre, à une force de frottement $F_c = -xv$ et à une force excitatrice $F_{ext} = F_{ext}\cos(\omega_0 t)$

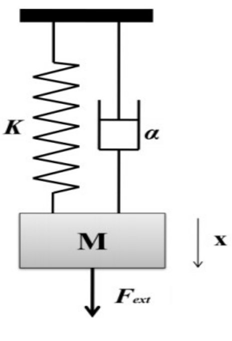


Fig.1 système masse-ressort

L'énergie cinétique du système :$E_c = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système :$E_p = \frac{1}{2}\, k\, x^2$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\, c\, \dot{x}^2$

- La fonction de Lagrange : L = $E_c - E_p = \frac{1}{2}\ m\ \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\ k\ x^2$

L'équation différentielle du mouvement de la charge q s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F_{ext} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\ \dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m}sin(\omega t)$$

C'est l'équation différentielle du mouvement d'un système amorti forcé à 1ddL de la forme :

$$\ddot{x} + 2\beta\ \dot{x} + \omega_0^2 x = A_o$$

$A_o$est la fonction d'excitation du système.

- Nature des mouvements oscillatoires
  - Si $A_o = 0 \rightarrow$ le mouvement oscillatoire est dit libre, si non le mouvement est forcé.
  - Si $\beta = 0 \rightarrow$ le mouvement oscillatoire est dit conservatif (non amorti), si non le mouvement est amorti.

I.1.3 Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle est égale à la somme de la solution homogène $x_h(t)$ de l'équation sans second membre et d'une solution particulière x_p(t) de l'équation complète :

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

Remarque :

La solution homogène a été étudiée dans les cas des oscillations libres amorties.

I.1.3.1 Solution particulière

La solution particulière x_p(t) est déterminée ici dans les deux cas suivants : excitation uniforme (échelon, $A_o = cst$) et Excitation harmonique de pulsation ω.

- **Excitation harmonique de pulsation**

En utilisant les représentations complexes $A_o = A_m e^{j\omega t}$, la solution x_p est une fonction harmonique de même pulsation ω :

$$x_p(t) = Ae^{j(\omega t+\gamma)}$$

On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme complexe :

$$x_p(t) = Ae^{j(\omega t+\gamma)} \longrightarrow \dot{x}_p(t) = Aj\omega e^{j(\omega t+\gamma)} = j\omega x_p(t) \longrightarrow \ddot{x}_p(t) = Aj^2\omega^2 e^{j(\omega t+\gamma)} = -\omega^2 x_p(t)$$

En utilisant ces résultats dans l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{x_p} + 2\beta\ \dot{x_p} + \omega_0^2 x_p = A_o \Leftrightarrow (-\omega^2 + 2\beta\omega j + \omega_0^2)\ Ae^{j(\omega t+\gamma)} = A_m e^{j\omega t}$$

$$(-\omega^2 + 2\beta j + \omega_0^2)\ Ae^{+j\gamma} = A_m \Leftrightarrow (-\omega^2 + 2\beta\omega j + \omega_0^2)\ A = A_m e^{-j\gamma}$$

Et on a: $e^{-j\gamma} = cos\gamma - jsin\gamma$

D'où :

$$(-\omega^2 + 2\beta\omega j + \omega_0^2)\ A = A_m(cos\gamma - jsin\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} (-\omega^2 + \omega_0^2)\ A = A_m cos\gamma \\ 2\beta\omega A = -A_m sin\gamma \end{cases}$$

En divisant les équations on obtient :

$$\tan(\gamma) = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega} \Leftrightarrow \gamma = artan(\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega})$$

Et :

$$((-\omega^2+\omega_0^2)\ A)^2 \quad + (2\beta\omega A)^2 = A_m(sin^2\gamma + cos^2\gamma) \leftrightarrow A = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$$

Donc :

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} e^{j(\omega t + artan(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega}))}$$

D'autre part :

$$x_p(t) = \frac{F_o}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \cos(j\omega t + artan(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}))$$

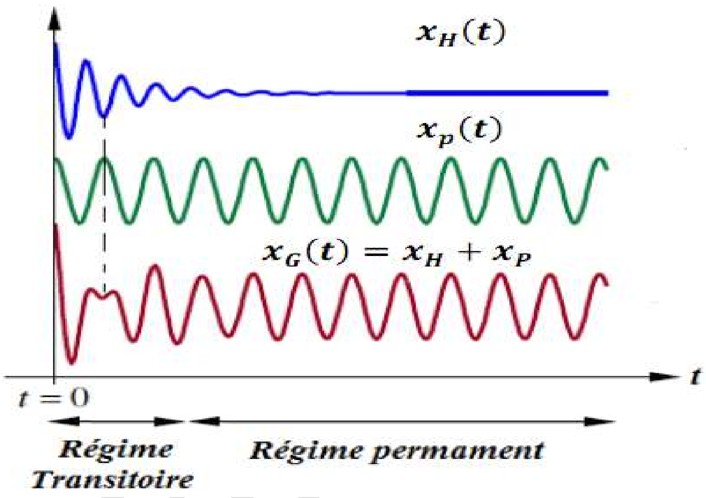


Fig.2 Superposition du régime transitoire et du régime permanant

I.2 Caractéristiques du mouvement oscillatoire forcée en fonction de la frequence

I.2.1 Phénomène de résonance

La pulsation d'excitation Ω pour laquelle L'amplitude A atteint son maximum est appelée pulsation de résonance (d'amplitude).

Lorsqu'il est en oscillation forcée, l'amplitude de la vibration d'un oscillateur est maximale si la fréquence imposée par l'excitateur atteint une valeur particulière appelée fréquence de résonance. Celle-ci est voisine de sa fréquence propre. On a alors atteint la résonance.

I.2.2 Résonnance en amplitude

Nous allons étudier la variation de l'amplitude A en fonction de la pulsation de l'excitation :

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}}$$

A est maximale lorsque :

$$\frac{dA}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\frac{F_o}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}\right)=\frac{2(-2\omega)(\omega_0^2-\omega^2)+8\omega\beta^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}=0\Longrightarrow\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

Cette pulsation est appelée la pulsation de résonance et est notée :$\omega_R=\omega$

A cette pulsation, l'amplitude est :

$$A_{max}(\omega=\omega_R)=\frac{\frac{F_o}{m}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

L'étude complète de la fonction montre qu'il existe :

Si $\beta>\frac{\omega_o}{\sqrt{2}}$ un maximum pour : $\omega_R=0$

Si $\beta=\frac{\omega_o}{\sqrt{2}}$ un maximum pour : $\omega_R=0$

Si $\beta<\frac{\omega_o}{\sqrt{2}}$ un maximum pour : $\omega=\omega_R$. dans ce dernier cas la fonction présente un pic de résonance pour la pulsation de résonance. On dit que le système entre en résonance et l'amplitude A est maximale :

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

Cette condition ($\omega0\gg\beta$) conduit à l'hypothèse suivante : $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\sqrt{\omega_0^2}=\omega_0$. L'amplitude de vibration à la résonance est (pour les faibles amortissements):

$$A_{max}=\frac{\frac{F_o}{m}}{2\beta\omega_0}$$

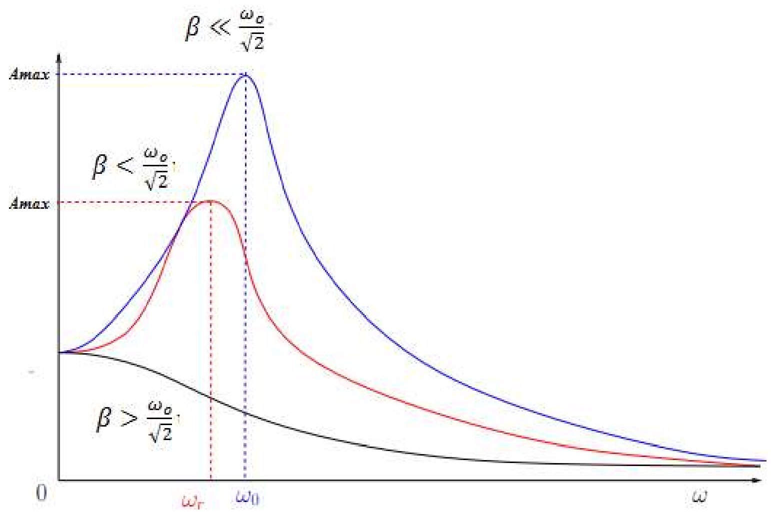


Fig.3 Réponse fréquentielle de l'amplitude d'un oscillateur vis à vis d'une excitation sinusoïdale.

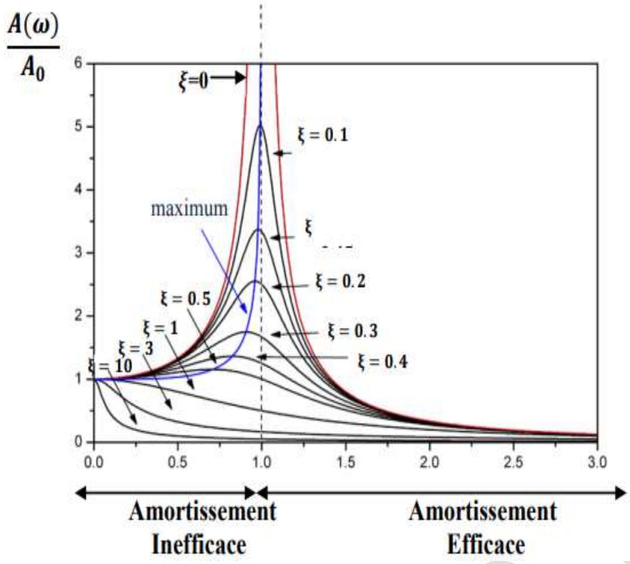
La Fig. 3 représente l'évolution de *A* en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement. On constate que si l'amortissement est suffisamment faible, l'amplitude des oscillations passe par un maximum : c'est la résonance en élongation

Remarques importantes :

On prend l'équation de l'amplitude :

$$\frac{A(\omega)}{A_o} = \frac{1}{\omega_o\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2)^2 + \left(2\beta\frac{\omega}{\omega_o\omega_o}\right)^2}} = \frac{1}{\omega_o\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_o})^2)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$$

Quand le rapport d'amortissement $\xi = \frac{\beta}{\omega_o}$. La valeur de ωpour laquelle l'amplitude A est maximale dépend du rapport d'amortissement. L'amplitude A varie non linéairement en fonction de la pulsationω. L'amplitude A diminué quand le rapport d'amortissement augmente L'amplitude A diminué quand le rapport d'amortissement augmente. La variation de l'amplitude est représentée sur la figure ci-dessous.



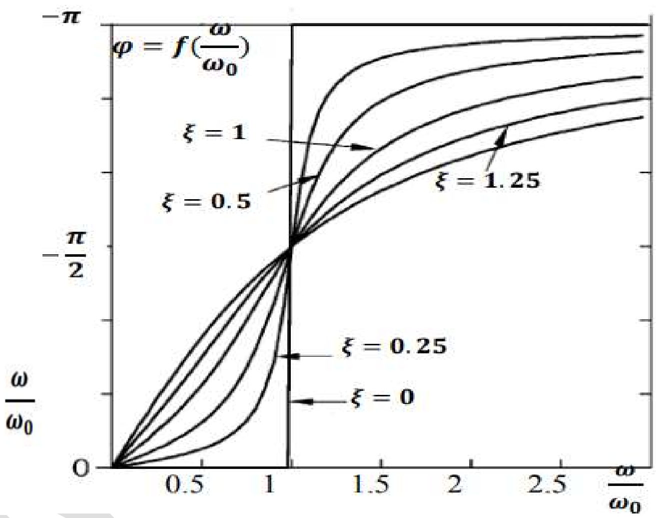


Fig.4 Variation de l'amplitude en fonction de pulsation Fig.5 Variation de la phase en fonction de pulsation

La phase est exprimée par :

$$\tan(\gamma) = \frac{-\frac{2\beta\omega}{\omega_o\omega_o}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{-2\xi\frac{\omega}{\omega_o}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2} = g(\omega)$$

L'étude des variations de la phase permet d'écrire

- Pour $\frac{\omega}{\omega_o} = 1 \Longrightarrow tan(\gamma) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \gamma = -\frac{\pi}{2} \quad , \forall\xi$
- Pour $\xi = 0 \Longrightarrow \; tan(\gamma) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0 \quad , \gamma = -\pi$

I.2.3 Bande passante:

On définit la largeur de la bande passante comme suit:

$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$

où ω_1, ω_2sont des pulsations correpondantes à une amplitude égale à:

$$\frac{A_{max}(\omega = \omega_R)}{\sqrt{2}}$$

Le facteur de qualité Le facteur de qualité est un nombre sans dimension qui caractérise une résonance. Il est défini par :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_R}{\omega_1 - \omega_2}$$

- Amortissement faible: On obtient pour $A(\omega\ )$ une "courbe de résonance" typique caractérisée par:

$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ et $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{2\beta\omega}{\omega_R}$

La bande passante est donc donnée par : $\omega_1 \approx \omega_R - \beta\,, \omega_2 \approx \omega_R + \beta$

Pour caractériser l'acuité (intensité) de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une bande passante

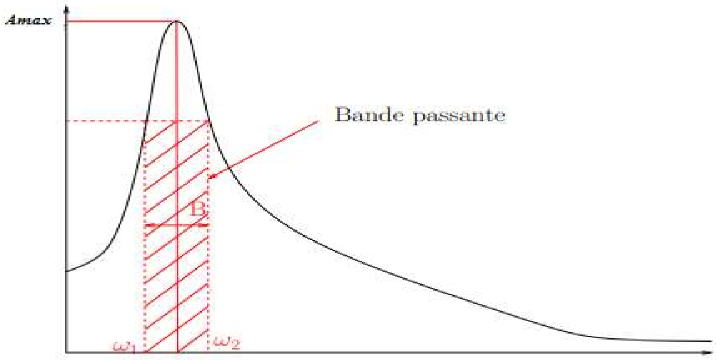


Fig.5 Bande passante

La bande passante B est très utile pour déterminer la constante d'amortissement du système.

I.2.4 Facteur de qualité

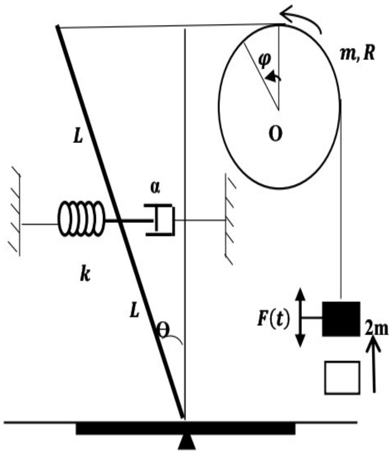
Dans les systèmes électriques, ce phénomène permet de calculer le facteur de qualité □ qui augmente lorsque l'amplitude maximale augmente :

$$Q = \frac{A_{max}}{A_o} = \frac{\omega_R}{\omega_1 - \omega_2}$$

Exercices et solutions

Exercice 1 :

Dans le système ci-contre un fil inextensible, roule son glisser autour d'un disque de masse et de rayon R; qui tourne librement autour de son axe fixe. Il porte à son extrémité une masse $2m$; une tige de masse m et de longueur l et un ressort de raideur k à une extrémité fixe et de l'autre reliée au milieu de la tige avec un amortisseur de coefficient (α). A l'équilibre (représenté en pointille) la tige était verticale et le ressort subit une déformation initiale.



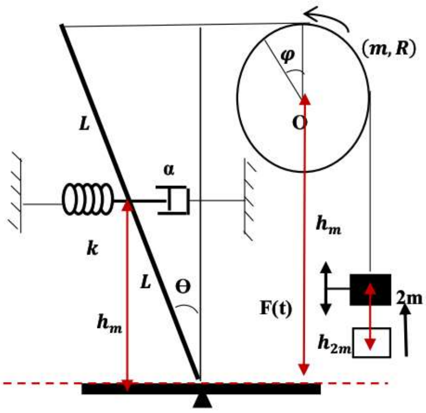
1. Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2. Trouver la valeur que le coefficient α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.
3. Trouver la nature du mouvement si $\alpha = 22\ N.s/m.$; ainsi que la solution de l'équation.

Le système est soumis à une force extérieure $F_0 sin(\omega t)$ appliquee à la masse 2m

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement forcé amorti et donnez l'expression de la solution correspondant au régime permanent.
2. Ecrire l'expression de l'amplitude A et du déphasage γ
3. Donner la solution générale correspondante et tracer θ(t) (les deux régimes).

Solution :

1. L'équation différentielle :



- Le nombre de degré de liberté : d =N-r ,

N=3 (rotation m → φ , rotation m→ θ, translation 2m→ x) - r =2 (x=Rφ , Rφ=2Lθ) = 1 , donc $d = 1$.

- Energie cinétique

$$T = T_{2m} + T_{m/b} + T_{m/c} = \frac{1}{2}(8mL^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

$$J_{m/o} = \frac{1}{12}m(2L)^2 + mL^2 = \frac{3}{4}mL^2$$

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

$$T = T_{2m} + T_{m/b} + T_{m/c} = \frac{1}{2}(8mL^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}mL^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)\dot{\varphi}^2$$

Et: $\varphi = \frac{2L\theta}{R}$

$$T_{tot} = \frac{1}{2}\left(8m + \frac{4}{3}m + 2m\right)L^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(\frac{34}{3}mL^2)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle :

$$U_{tot} = U_p + U_e = U_k + U_{2m} + U_{m/T} + U_{m/c}$$

$U_k = \frac{1}{2}k(x - x_o)^2$, $x = L\theta$

$U_{2m} = 2mgh_{2m}$, $h_{2m} = x + h = 2L\theta + h$

$U_m = mgh_{m/b}$, $h_{m/b} = Lcos\theta$

$U_m = mgLcos\theta$

Donc:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}k(L\theta - x_o)^2 + 2mg(2L\theta + h) + mgLcos\theta$$

$$\frac{dU_{tot}}{d\theta} = k(L\theta - x_o) \quad + 2mg(2L) - mgLsin\theta \to \theta = 0 \text{ condition d'équilibre}$$

- Le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}(\frac{34}{3}mL^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(L\theta - x_o)^2 + 2mg(2L\theta + h) + mgLcos\theta$$

- Le formalisme de Lagrange s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha(L\dot{\theta})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (\frac{34}{3}mL^2)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kL^2\theta + \underbrace{(kLx_o - 4mgL)}_{condition\ d'equilibre} + mgLsin\theta = -kL\theta + mgLsin\theta = -(kL^2 - mgL)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{34}{3}mL^2\right)\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (kL^2 - mgL)\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{34m}\dot{\theta} + \frac{3(kL^2 - mgL)}{34mL^2}\theta = 0$$

équation différentielle est :

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + {\omega_o}^2\theta = 0 \quad \text{avec} \begin{cases} 2\beta = \frac{3\alpha}{34m} \\ \omega_o = \sqrt{\frac{3(kL^2 - mgL)}{34mL^2}} \end{cases}$$

2. Pour qu'un système amortie oscille il faut que

$\Delta = \beta^2 - {\omega_o}^2 < 0 \Leftrightarrow \beta < \omega_o \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{68} < \sqrt{0.88} \Leftrightarrow \alpha < \sqrt{0.88}.\frac{1.68}{3} \Leftrightarrow \alpha < 21$ N.s/m

$\omega_o = \sqrt{\frac{3(20.1 - 1.10)}{34.1.1}} = \sqrt{\frac{30}{34}} = \sqrt{0.88}$ rad/s (Régime pseudo-périodique)

La solution de cette équation pour un amortissement faible : $\theta(t) = C\ e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \emptyset\right)$

3. La nature du mouvement si $\alpha = 22$ N.s/m

$$\Delta = \left(\frac{66}{68}\right) - \frac{30}{34} = 0.94 - 0.88 = 0.06 > 0$$

le mouvement est apériodique son équation :

$$\theta(t) = e^{-\beta t}\left(A\, e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + B\, e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}\right) = \left(A\, e^{-1.2t} + B\, e^{-0.7t}\right)$$

3- L'équation différentielle du mouvement forcé amorti :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F_{ext} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{34m}\dot{\theta} + \frac{3(kL^2 - mgL)}{34mL^2}\theta = \frac{3F_o}{34mL^2}sin(\omega t)$$

- Équation différentielle du 2éme ordre de la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + {\omega_o}^2\theta = Bsin(\omega t)$$

Avec

$$B = \frac{3F_o}{34mL^2}$$

La solution de cette équation : $\theta(t) = \theta_g(t) + \theta_p(t)$

La solution du régime permanant : $\theta_p(t) = A\sin(\omega t + \gamma)$

$\omega = \sqrt{{\omega_o}^2 - 2\beta^2}$, $A(\omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\quad)^2}}$, $\gamma = artan(\frac{-2\beta}{\omega_0^2-\omega^2})$

La solution du régime transitoire : $\theta_g(t) = C\, e^{-\beta t}\sin(\omega_d t + \gamma)$

Donc la solution générale : $\theta(t) = \theta_g(t) + \theta_p(t)$= $C\, e^{-\beta t}\sin(\omega_d t +$ $\gamma)$+ $\frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}\sin(\sqrt{{\omega_o}^2 - 2\beta^2}t + artan(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2})$