Chapitre VI

PHENOMENES DE PROPAGATION A UNE DIMENSION

I.1 Qu'est-ce qu'une onde

I.1.1 Le concept d'onde

Onde en termes simples, une onde est un moyen de transfert d'énergie. Ce transfert se produit par une sorte de perturbation (ou oscillation) qui se déplace de la source à la destination sans transfert net de matière.

On donne le nom général d'onde à un phénomène physique décrit par une fonction scalaire ou vectorielle dépendant à la fois de l'espace et du temps.

- Exemples d'ondes scalaires :
  - rides à la surface de l'eau ;
  - ondes acoustiques (provoquées par des variations locales de pression ou, ce qui revient au même, par le déplacement des molécules suivant la direction de propagation de l'onde) ;
  - ébranlement le long d'une corde ;
  - déformation d'un ressort.
- Exemple d'ondes vectorielles :
  - ✓ les ondes électromagnétiques (dont la lumière visible n'est qu'un cas particulier) résultent quant à elles de la variation de champs électrique et magnétique . (lumière, WIFI, bluetooth, téléphonie…)

Comment distinguer le concept d'oscillation du concept d'onde ? Dans le second cas il y a transport d'énergie. Mais il faut reconnaître que ces deux notions sont très proches. D'ailleurs, dans le cas d'ondes stationnaires, on ne peut plus distinguer l'onde de la vibration car il n'y a plus de propagation.

Pour simplifier on peut retenir : ***Onde = double oscillations couplées***

Dans la suite du cours, l'onde sera caractérisée par un signal qui dépend de la position M et de l'instant t : $\psi(M,t)$

I.1.2 Ondes planes

S'exprime en coordonnées cartésiennes : $\psi(x,y,z,t)$. S'il existe un repère tel que l'onde ne dépende plus que d'une seule coordonnée cartésienne d'espace alors l'onde est dite plane. Une onde plane est donc de la forme $\psi\,(M,t)\;=\;\psi\,(x,t)$. Dans ce cas, $\psi\,(M,t)$ est uniforme sur tout plan normal à l'axe (Ox), d'où le nom d'onde plane.

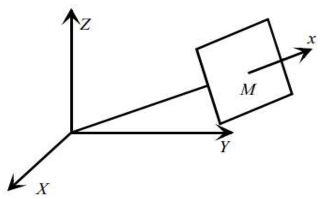


Fig.1 Ondes planes

I.1.3 Ondes planes progressives

L'onde plane est de plus progressive si le signal se propage dans un sens déterminé. Pour un signal qui se propage sans déformation le long de l'axe (Ox) à vitesse constante c, on a :

Onde plane progressive (sens Ox) : $\psi_+ \,(M,t) \;=\; f(t-\frac{x}{c})$ avec c vitesse de propagation

Onde plane régressive (sens " -Ox") : $\psi_- \,(M,t) \;=\; f(t+\frac{x}{c})$ avec c vitesse de propagation

I.1.4 Ondes sinusoïdales (ou monochromatiques ou harmoniques)

Il est possible pour les ondes précédentes de choisir une dépendance sinusoïdale. On obtient en particulier une onde plane progressive harmonique très utilisée dans les problèmes de propagation d'ondes :

$\psi_+ \,(M,t) = \psi_o \cos(\omega t - kx + \varphi_o)$

Ou k son vecteur d'onde.

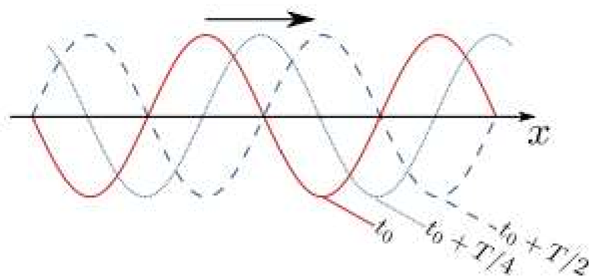


Fig.2 Ondes sinusoïdales

I.1.5 Ondes planes stationnaires

Une onde plane de la forme $U(M,t) = f(x).g(t)$ (où il y a découplage des variables d'espace et de temps) est dite onde plane stationnaire et ne se propage pas (oscillations « sur place »).

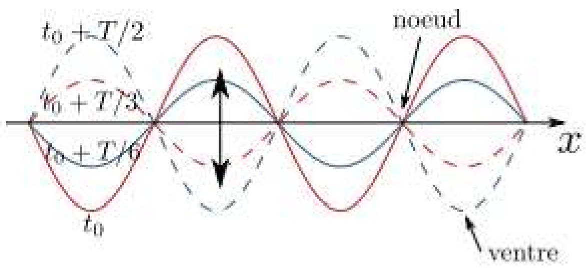


Fig.3 Simulation d'une onde stationnaire

I.2 Types d'ondes

I.2.1 Onde mécanique:

C'est une onde qui a besoin d'un milieu matériel pour se propager. Les ondes sonores, les ondes générées dans l'eau lorsqu'un objet y tombe, ou les ondes qui se propagent le long d'une corde lorsque l'on fait osciller son extrémité sont des exemples d'ondes mécaniques.

I.2.2 Onde électromagnétique:

C'est une onde qui n'a pas besoin d'un milieu matériel pour se propager. La lumière, les micro-ondes, les ondes radio son des exemples d'ondes électromagnétiques.

I.3 Onde mécanique

Perturbation mécanique (une torsion, une compression, etc.) soudaine est créée dans un milieu matériel, celle-ci peut se propager dans ce milieu.

La propagation de cette perturbation est appelée onde mécanique progressive.

Exemples d'onde mécanique :

Une vague à la surface de l'eau (perturbation de la hauteur de la surface), la compression rapide d'un ressort, le son (compression rapide de l'air… ou de tout autre milieu dans lequel le son se propage).

I.3.1 Onde mécanique progressive

I.3.1.1 Définition

Une onde mécanique progressive est la propagation d'une perturbation dans un milieu matériel élastique sans transport global de matière mais avec transfert d'énergie.

Les ondes mécaniques (contrairement aux ondes électromagnétiques) necessitent un milieu matériel pour se propager.

- Une perturbation est une déformation temporaire et locale de la matière.
- Elle se propage quand elle se transmet de proche en proche dans un milieu matériel grâce aux propriétés élastiques du milieu.
- On dit que l'onde est progressive car elle se propage « de proche en proche ».

I.3.1.2 Onde mécanique progressive périodique

Une onde mécanique est périodique si la perturbation se répète identique à lui-même à des intervalles de temps identiques

I.3.1.3 Onde mécanique progressive sinusoïdale

Une onde progressive périodique est dite sinusoïdale si la perturbation crée par la source entraîne une variation sinusoïdale en fonction du temps

I.4 Direction de propagation de l'énergie

I.4.1 Onde transversale :

Une onde est dite transversale si la direction de la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

Les vagues sont des ondes transversale : elles se propagent dans le plan horizontal alors que la perturbation créée par une vague est une perturbation verticale.

I.4.2 Onde longitudinale :

Direction de la perturbation parallèle à la direction de propagation de l'onde. Les ondes sonores sont des ondes longitudinales. La perturbation créée par une onde sonore se fait dans le même sens que la propagation de l'onde.

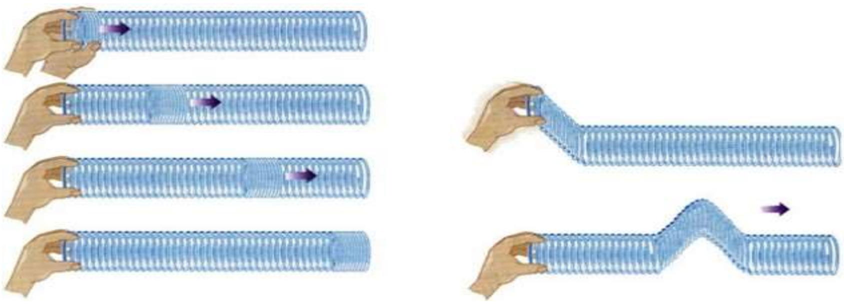


Fig.4 Un ressort peut servir de support à une onde longitudinale (à gauche) et transversale (à droite)

On parle aussi de dimension. On dit qu'une onde progressive est à une dimension si la perturbation ne se propage que dans 1 direction. De même, une onde progressive peut être à 2 ou 3 dimensions si la perturbation se propage dans 2 ou 3 directions.

I.5 Grandeurs physiques

I.5.1 Retard

Le retard τ est la durée mise par l'onde pour se propager sur une distance entre 2 points M_1 et M_2 d1-2: $\tau = t_2 - t_1$.

Fig.5 Le retard τ d'une onde

I.5.2 Célérité

On appelle célérité la vitesse de propagation d'une onde. Elle dépend du référentiel, de la nature de l'onde et des caractéristiques du milieu de propagation.

La perturbation en un point M_1 du milieu, à l'instant t, est celle qui existait auparavant en un point M_2 au temps $t_2 = t_1 + \tau$, τ étant le retard (dans un milieu non dispersif).

$$v = \frac{M_2M_1}{t_2 - t_1} = \frac{d_{1-2}}{\tau}$$

La vitesse de propagation d'une onde mécanique dépend principalement de l'élasticité du milieu de propagation, de sa masse volumique et de sa température.

I.6 Les caractéristiques d'une onde progressive périodique.

I.6.1 Double périodicité

Si la source de la perturbation du milieu matériel est périodique, le milieu est perturbé à intervalles de temps réguliers, notés T et appelés période.

On prend l'exemple des vaguelettes générées par la cuve à ondes.

Les perturbations engendrées se propagent dans toutes les directions offertes. Lorsque l'onde est établie de manière permanente, on observe une double périodicité :

Fig.6 Double périodicité de l'onde mécanique progressive périodique

I.6.1.1 Périodicité temporelle T

La période T d'une onde progressive périodique est la durée minimale au bout de laquelle l'onde se répète identiquement à elle-même. Elle s'exprime en seconde (s).

On un point x donné, $f(x,t) = f(x,t+T)$

Tous les points du milieu de propagation reproduisent le mouvement de la source ; ils vibrent avec la même période T et la même fréquence ν que la source. T est appelé « **période temporelle** » de l'onde progressive.

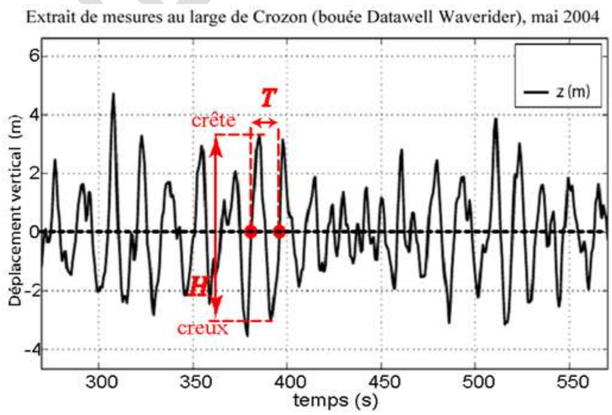


Fig.6 Exemple de forme d'onde des vagues (variation temporelle)

I.6.1.2 Périodicité spatiale λ

La longueur d'onde λ d'une onde progressive périodique est la distance minimale séparant deux positions vibrant en phase.

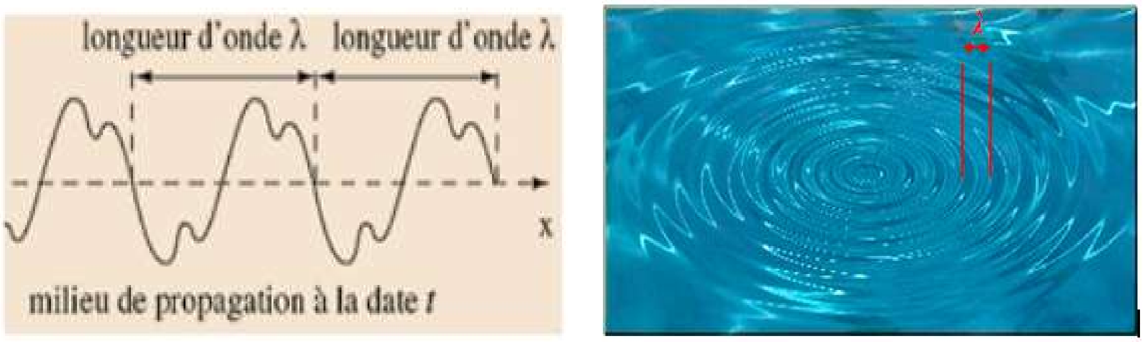


Fig.7 Variation spatiale d'une onde mécanique

A un instant donné, on a:

$f(x,t) = f(x+\lambda,t)$

Une onde progressive périodique présente une double périodicité :

- Une périodicité temporelle, de période T ;
- Une périodicité spatiale, de période λ.

I.6.1.3 Double périodicité λ et T

La période temporelle T est aussi bien la durée qu'il faut à l'onde pour avancer d'une longueur d'onde λ (période spatiale) que la durée nécessaire pour qu'un point se retrouve dans le même état de vibration.

La période spatiale λ est aussi bien la distance parcourue en T secondes (période temporelle) que la distance séparant deux points consécutifs vibrant en phase.

En pratique, pour mesurer la fréquence d'une onde sur cuve à onde par exemple, on utilise un stroboscope. La fréquence de l'onde est la plus petite fréquence stroboscopique pour laquelle il y a immobilité apparente.

I.7 Etats vibratoires et longueur d'onde

a) Deux points M_1 et M_2appartenant au même de milieu de propagation sont en phase si la distance qui les sépare est multiple entier de la longueur d'onde λ: $M_1M_2 = k\lambda$ k nombre entier.

A un instant t donné

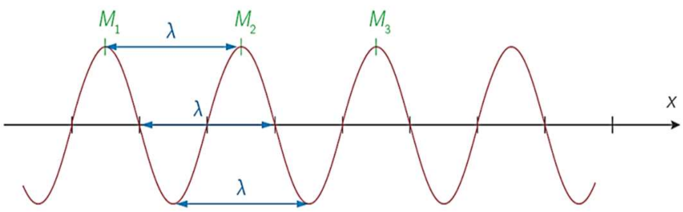


Fig.8 propagation sont en phase

b) Deux pointsM_1 et M_2appartenant au même milieu de propagation sont en opposition de phase si la distance qui les sépare est un multiple impair de la moitié de la longueur d'onde : $M_1M_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

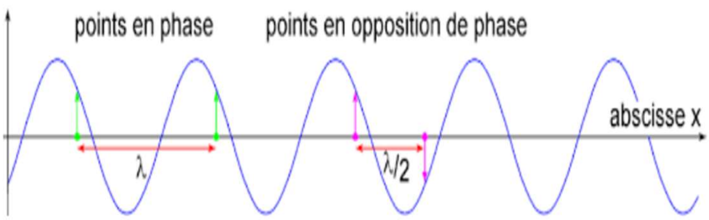


Fig.9 propagation sont en opposition de phase

I.8 Phénomènes de diffraction et de dispersion

I.8.1 Diffraction des ondes progressives sinusoïdales

Lorsqu'on interpose un diaphragme de petite dimension dans le faisceau d'une onde progressive, le faisceau s'élargit : c'est le phénomène de diffraction**.** De manière générale, il y a diffraction chaque fois qu'une onde rencontre un obstacle.

Conséquences : les ondes peuvent contourner des obstacles.

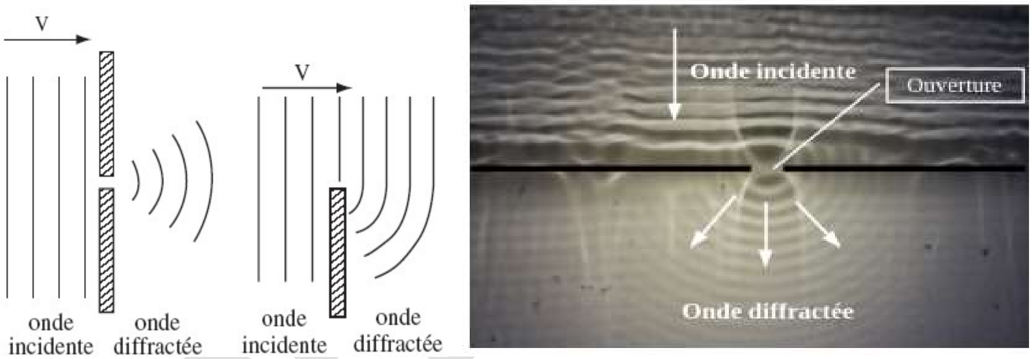


Fig.10 Diffraction des ondes progressives

I.8.2 Influence de la dimension de l'ouverture sur le phénomène observé

Lorsqu'une onde progressive sinusoïdale, de longueur d'onde λ , passe au travers d'une ouverture de dimension d :

- si$d < \lambda$, l'onde est diffractée et elle prend la forme d'une onde sphérique (ou circulaire) centrée sur l'ouverture ;
- si $> \lambda$, l'onde passe sans être perturbée. Elle est seulement diaphragmée (sauf près des bords où l'on retrouve une diffraction mais très négligeable en général).

Le passage par une ouverture, quelle que soit sa dimension d, ne modifie ni la longueur d'onde ni la fréquence de l'onde progressive.

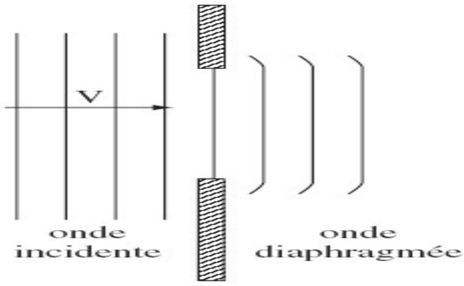


Fig.11 onde progressive sinusoïdale passe au travers d'une ouverture

I.9 Équation d'onde

L'équation générale qui décrit la propagation d'une onde $\vec{E}$ dans l'espace libre, dans un milieu homogène, linéaire et isotrope est :

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$\vec{E}$ décrit à la fois l'amplitude de l'onde, et sa polarisation (par son caractère vectoriel). C'est assimilable à la vitesse de propagation de l'onde, comme nous le verrons plus bas.

Si l'on s'intéresse à ce qui se passe pour chacune des composantes de $\vec{E}$ (en projetant la relation dans chacune des directions de l'espace), nous obtenons une équation portant sur un scalaire, appelée équation de d'Alembert :

$$\Delta \mathrm{U} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

La propagation selon la seule direction z :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

Remarque : en partant de l'hypothèse d'un milieu homogène, isotrope, non dispersif, sans pertes (donc vitesse proportionnelle amplitude de l'onde constantes) on établit l'équation dite de d'Alembert :

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation est en c², incluant l'onde réfléchie.

Pour une onde plane, la solution générale de cette équation est la somme de deux fonctions :

$$U(z,t) = f(z - ct) + g(z + ct)$$

En effet, on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(z,t) = 0$$

soit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)U(z,t) = 0$$

Et si l'on pose $a = z - ct$ et $b = z + ct$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)U(a,b) = 0$$

Qui se résout en : $U(a,b) = f(a) + g(b)$ soit $U(z,t) = f(z - ct) + g(z + ct)$

Le premier terme est une onde se propageant dans le sens des z croissants (appelée onde progressive), et le deuxième terme dans le sens des z décroissants (appelée onde régressive).

Les fonctions f et g sont a priori quelconques mais, si elles sont périodiques, l'analyse de Fourier permet d'écrire ces fonctions sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales (ou harmoniques). C'est la raison pour laquelle on étudie en détail le cas des ondes planes progressives harmoniques.

I.9.1 Onde harmonique - période et fréquence

Une onde harmonique est une onde monochromatique dont l'expression est donnée dans notre cas par :

$$U(z,t) = U_o\, cos(\omega(t - \frac{z}{c}))$$

La propriété essentielle de cette onde est sa double périodicité, spatiale et temporelle :

$$U\left(z, t + 2\frac{\pi}{\omega}\right) = U\left(z + 2\pi\frac{c}{\omega}, t\right) = U(z,t)$$

On définit alors les quantités suivantes :

- La fréquence de l'onde $\nu = \omega / 2\pi$ (ω est appelé pulsation)
- La longueur d'onde $\lambda = c / \nu$
- Le nombre d'onde $k = 2\pi / \lambda$

À trois dimensions, le nombre d'onde est remplacé par le vecteur d'onde, dont le sens est celui de la propagation de l'onde.

I.10 Familles de solutions de l'équation d'onde de d'Alembert

I.10.1 Ondes progressives

On se propose de résoudre l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U = 0$$

De manière symbolique, cette équation peut s'écrire :

$$\left(c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(c\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)U = 0$$

On pose :

$$p = t + \frac{x}{c} \text{ et } q = t - \frac{x}{c}$$

Et, en considérant x et t comme des fonctions de p et de q :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial q}=\left(\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

L'équation de d'Alembert prend alors la forme :

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}U=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)=0$$

Par conséquent, $\frac{\partial U}{\partial q}=\varphi(q)$ et, si f(q) désigne une primitive de $\varphi(q)$, alors

$$U(t)=f(q)+g(p)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)+g(t+\frac{x}{c})$$

Cette solution s'interprète comme la superposition de deux phénomènes de propagation à vitesse v, l'un suivant les x positifs (onde progressive) et l'autre suivant les x négatifs (onde régressive).

I.10.2 Ondes stationnaires

On cherche des solutions de l'équation de d'Alembert de la forme (méthode de séparation des variables) :

$$U(t)=f(x)g(t)$$

En substituant dans l'équation de d'Alembert :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U=0$$

Il vient :

$$\ddot{f}(x)g(t)-\frac{1}{c^2}f(x)\ddot{g}(t)=0$$

D'où :

$$\frac{1}{f(x)}\ddot{f}(x)=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}=cte=K$$

Ou encore :

$$\ddot{f}(x)-f(x)\mathrm{K}=0, \ddot{g}(t)+c^2Kg(t)=0$$

On suppose K < 0 ; alors, en posant $-c^2K=\omega^2$:

$$g(t)=Acos(\omega t-\varphi)$$

La 1ère équation donne alors :

$$\ddot{f}(x)+\frac{\omega^2}{c^2}f(x)=0\,, f(x)=Acos(\frac{\omega}{c}x-\emptyset)$$

La solution globale de l'équation de d'Alembert est alors :

$$U(x,t)=C\ cos(\frac{\omega}{c}x-\emptyset)cos(\omega t-\varphi)$$

Ce type de solutions, appelé onde plane stationnaire est très différent d'une onde plane progressive.

Il est d'usage dans la communauté scientifique de distinguer les ondes progressives des ondes stationnaires. Les ondes progressives, décrites précédemment, avancent dans l'espace.

- **Ondes stationnaires**

Les ondes stationnaires, au contraire, oscillent sans se déplacer. Ainsi, elles ne dépendent plus du seul paramètre $z - ct$, mais des paramètres d'espace z et de temps t de façon indépendante. Une expression simple d'une onde stationnaire harmonique à une dimension est la suivante :

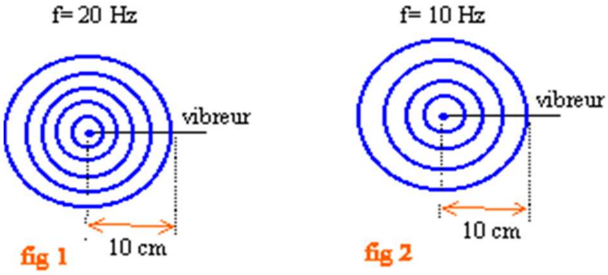
$$U(z,t) = U_o cos\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

Les ondes stationnaires sont des objets physiques très courants et se rencontrent notamment dans les cavités laser ou les lignes hyperfréquence.

Exercices et solutions

Exercice 01 : ondes à la surface de l'eau

Photographies de la cuve à ondes pour deux valeurs de la fréquence de l'excitateur.



1. Figure 2 : l'onde étudiée elle est, mécanique, longitudinale, progressive périodique, diffractée ?
2. Justifier. Déterminer la longueur d'onde et en déduire la célérité des ondes à la surface de l'eau.
3. Figure 1 : la célérité des ondes à la surface de l'eau reste-t-elle la même ? Quel phénomène a-t-on mis ici en évidence ?

Solution :

propagation à la surface de l'eau d'une onde mécanique, périodique, transversale (la déformation du milieu est perpendiculaire à la direction de propagation) l'onde n'est pas diffracté par un obstacle ou une ouverture dont les dimensions sont proches de la valeur de la longueur d'onde ; dans le cas de la diffaction on observerait la figure suivante :

Quatre longueurs d'onde correspondent à 10 cm d'où $\lambda = 10/4 = 2{,}5$ cm $= 2{,}5\ 10^{-2}$ m.

La longueur d'onde λ (m), la célérité v (m/s) et la fréquence f (Hz) sont liées par la relation $\lambda = v / f$

$v = \lambda f = 0{,}025*10 = 0{,}25$ m/s.

Figure 1 :

Cinq longueurs d'onde correspondent à 10 cm d'où $\lambda = 10/5 = 2$ cm $= 2\ 10^{-2}$ m.

$v = \lambda f = 0{,}02*20 = 0{,}4$ m/s.

la célérité de l'onde dépend de la fréquence : la surface de l'eau est un milieu dispersif pour les ondes mécaniques.

Chapitre VII

CORDES VIBRANTS

I. 1 Equation des ondes

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée x, et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cet ébranlement se produise suivant l'axe 0y. Etudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par T la tension à laquelle est soumise la corde. On considère en un point d'abscisse x un segment très court de cette corde, de longueur Δx. La masse Δm du segment est donnée par :

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

Où μ est la densité linéique de masse de la corde, c'est-à-dire la masse par unité de longueur qui s'exprime en kg/m

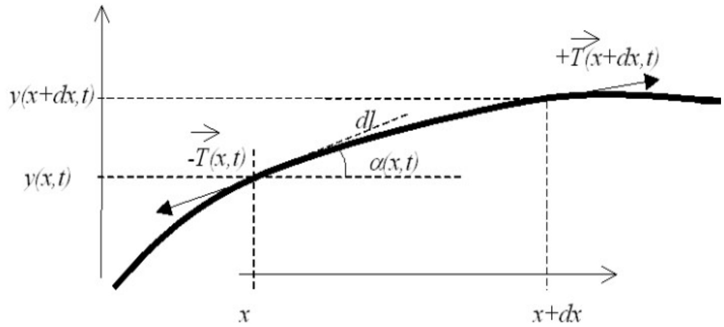


Fig.1 Cordes vibrant transversalement

Dans une situation hors équilibre, le segment n'est plus droit, il présente une courbure. Nous considérons des mouvements d'oscillation de la corde de petite amplitude :

$$\vec{u}(x,t) = u(x,t)\,\vec{e}_y$$

Si bien que nous pouvons faire l'approximation :

$$sin(\theta)|_x = tan(\theta)|_x = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$$

$$sin(\theta)|_{x+\Delta x} = tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

Cette approximation néglige aussi l'allongement du segment, et considère donc la tension T comme constante. La force appliquée sur le segment dans la direction y est la résultante de la force appliquée au point x, qui est une force appliquée vers le bas et égale en module :

$$F(x,t) = T\,sin(\theta)|_x \cong T\,tan(\theta)|_x = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$$

Et de la force appliquée au point x+Δx qui est vers le haut et égale à :

$$F(x+\Delta x,t) = T\,sin(\theta)|_{x+\Delta x} \cong T\,tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

La force totale dans la direction y est donc :

$$R = F(x+\Delta x,t) - F(x,t) = T\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right] = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$$

Nous pouvons appliquer maintenant la loi fondamentale de la dynamique au segment Δx. La force dans la direction y doit être égale au produit de la masse Δm du segment par l'accélération de celui-ci. Donc :

$$R = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} T$$

Si on définit $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$qui a la dimension d'une vitesse, on constate que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Qui est l'équation d'ondes de la corde. V qui est la vitesse de propagation de cette onde

I. 2 Vibrations libres d'une corde fixée à ses extrémités

On considère une corde de longueur L, que l'on fait vibrer. On note μ la densité linéaire de la corde (qui s'exprime en kg/m) et T la tension de la corde (qui s'exprime en Newtons). Ici $u(x, t)$ représente l'ordonnée du point de la corde d'abscisse x à l'instant t (on suppose que la corde vibre dans un plan xoy et que ses extrémités O et A ont pour coordonnées (0, 0) et (0, L). Soit une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Nous étudions les mouvements transverses libres de cette corde.

Les solutions de l'équation d'onde de d'alembert à une dimension sont de la forme :

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g(t + \frac{x}{v})$$

Cette solution doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \forall t\ u(0, t) = 0 \Rightarrow \forall t\ f(t) + g(t) = 0 \\ \forall t\ u(L, t) = 0 \Rightarrow \forall t\ f\left(t - \frac{L}{v}\right) + g\left(t + \frac{L}{v}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f\left(t - \frac{L}{v}\right) = -g\left(t + \frac{L}{v}\right) = f\left(t + \frac{L}{v}\right)$$

Les fonctions f et g sont donc périodique et de période temporelle $T = \frac{2L}{v}$ et donc de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v\pi}{L}$. Nous e1ectuons alors une décomposition en série de Fourier de la fonction f :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cos(n\omega t) + b_n\, sin(n\omega t))$$

$$\Rightarrow\ u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\, cos\left(n\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) + b_n\, sin\left(n\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)\right)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\, cos\left(n\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right) + b_n\, sin\left(n\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right)\right)$$

La solution générale de l'équation d'onde sur la corde vibrante de longueur L, fixée aux deux extrémités, s'obtient comme une superposition générale de tous les modes propres (4.2.13) associes: La solution est donc :

$$\Rightarrow\ u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2b_n\, cos(n\omega t) + 2a_n\, sin(n\omega t)\, sin\left(n\omega \frac{x}{v}\right)\right)$$

Il s'agit d'une onde stationnaire car les variables x et t sont découplées.

I. 2.1 Solution de l'équation de d'Alembert sous forme d'ondes stationnaires

On cherche des solutions de l'équation de d'Alembert de la forme (méthode de séparation des variables) :

$u(z,t) = f(z)g(t)$

En substituant dans l'équation de d'Alembert :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Il vient :

$$f"(z)g(t) - \frac{1}{c^2} f(z)\ddot{g}(t) = 0$$

D'où :

$$\frac{1}{f"(z)} f"(z) = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = cste = k$$

On obtient ainsi deux équations différentielles :

$\frac{1}{f(z)} f"(z) = k$ et $\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = cste = k$

Ou encore :

$$f''(z) - Kf(z) = 0 \quad et \quad \ddot{g}(t) - c^2 g(t) = 0$$

Si $K > 0$, la solution de la deuxième équation différentielle est de la forme :

$$g(t) = Ae^{c\sqrt{K}t} + Be^{-c\sqrt{K}t}$$

Cette solution est à rejeter : en effet, elle correspond soit à une solution divergente soit à une solution transitoire. Dans la suite, on suppose K<0 ; alors, en posant $-c^2K = \omega^2$:

$g(t) = A\cos(\omega t - \phi)$

La 1ère équation donne alors :

$f"(z) + \frac{w^2}{c^2} f(z) = 0$ soit $f(z) = B\cos(\frac{\omega}{c} z - \psi)$

La solution globale de l'équation de d'Alembert est alors :

$$u(z,t) = C\cos(\frac{\omega}{c} z - \psi)\cos(wt - \emptyset)$$

On pose dans la suite k=ω/c, alors :

$$u(z,t) = C\cos(kz - \psi)\cos(wt - \emptyset)$$

Ce type de solutions, appelé onde plane stationnaire est très différent d'une onde plane progressive : les dépendances spatiale et temporelle interviennent séparément ; la dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase, de telle sorte que tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase. L'allure de la corde à différents instants est représentée sur la figure ci-dessous.

Certains points de la corde sont fixes et sont appelés nœuds de vibrations ; d'autres ont une amplitude de vibration maximale et sont appelés ventres de vibrations.

Remarque :

- La distance entre deux nœuds successifs est égale à λ/2.
- La distance entre deux ventres successifs est égale à λ/2.
- La distance entre un nœud et un ventre successif est égale à λ/4.

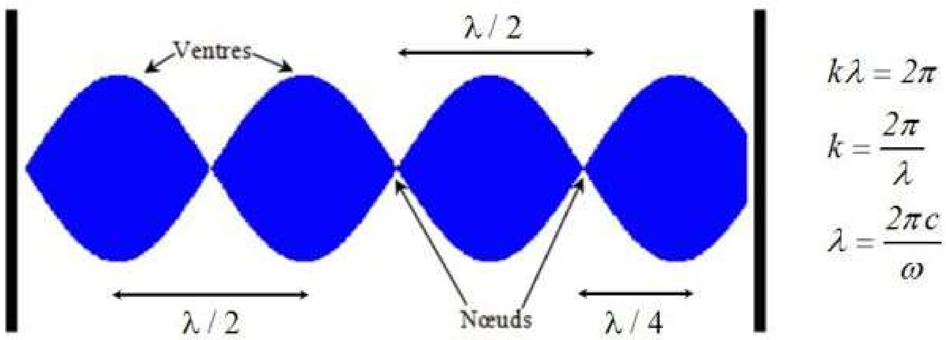


Fig.2 L'allure de la corde à différents instants

I. 2.2 Solution de l'équation de d'Alembert sous forme d'onde progressive

A une dimension, l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \rightarrow \frac{1}{c^2} = \varepsilon_o \mu_o$$

où $u(u, t)$ représente une des coordonnées du champ, fonction uniquement de z et de t.

On démontre qu'une forme de solution de l'équation d'onde de d'Alembert s'écrit sous la forme :

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où f est une fonction quelconque de la variable $t - x/c$ et g une fonction de la variable $t + x/c$.

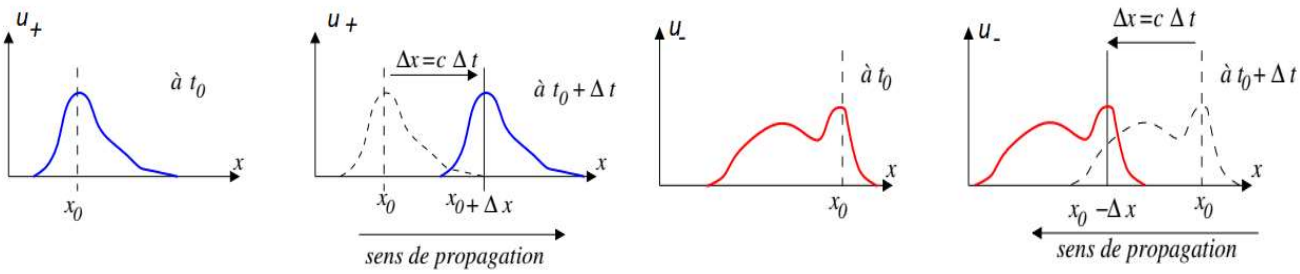


Fig.3 Représentation d'un signal qui se propage sans déformation

- **Interprétation physique :**

On considère une fonction de la forme :

$$u_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

On constate que :

$$u_+(x, t) = f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{c}\right)$$

pour tout couple Δz et Δt vérifiant :

$$\Delta t = c\Delta x$$

Ainsi, $u_+(x,t)$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse c le long de l'axe (Oz) dans le sens positif. La solution :

$$u_-(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Où u_- représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse c le long de l'axe (Oz) dans le sens négatif. Dans un plan $z = cste$, les fonctions :

$u_-(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) et u_+(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

Prennent, à tout instant, la même valeur : on parle d'onde plane et les plans $z = cste$ sont appelés des plans d'onde. Une source (par exemple, une station radiophonique) émet a priori des ondes sphériques ; cependant, à grande distance de celle-ci, l'onde reçue pourra être localement assimilée à une onde plane progressive.

I. 2.3 Ondes planes progressives monochromatiques (ou harmoniques, OPPH)

L'équation de propagation est linéaire, par conséquent, l'analyse de Fourier permet d'affirmer que toute solution de cette équation est la somme de fonctions sinusoïdales du temps. On se limite ici à des solutions harmoniques de l'équation de d'Alembert, c'est-à-dire des solutions de la forme (pour une onde qui se propage dans le sens $x > 0$:

$u(x,t) = Acos(\omega(t - \frac{x}{c}))$

Ces solutions correspondent à des ondes planes progressives harmoniques (OPPH). Ces fonctions, de période temporelle $T = 2\pi/\omega$ possèdent une période spatiale $\lambda = cT$ appelée longueur d'onde. On définit le vecteur d'onde $\vec{k}$ tel que :

$\vec{k} = k\vec{u}_z\ avec k = \frac{x}{c}$

Une onde progressive harmonique se propageant dans le sens des x croissants s'écrit :

$u(x,t) = Acos(\omega t - kx)$

I. 3 La réflexion, la transmission et la superposition des ondes

Changement de milieu de propagation Lorsqu'une onde voyageant dans un milieu rencontre un nouveau milieu différent, il se produit deux situations à l'interface :

1) Transmission : l'onde continue son déplacement dans le nouveau milieu.

2) Réflexion : l'onde change de direction et continuer son déplacement dans son milieu d'origine.

Les caractéristiques des ondes réfléchies et transmises sont :

- Une onde réfléchie et transmise conserve sa fréquence f (ou période T) d'origine, car la fréquence est une caractéristique de l'oscillateur ayant produit l'onde et non du milieu qui propage l'onde.
- Une onde réfléchie conserve sa longueur d'onde λ et une onde transmise possède une longueur d'ondeλ différente causée par le changement de densité du milieu μ .

Réflexion dure se produit lorsqu'une onde voyageant dans un milieu rencontre un nouveau milieu de densité supérieure. Pour une corde, la réflexion dure est caractérisée par l'expression suivante :

Lorsqu'une onde passe d'un milieu à un autre elle est affectée par trois phénomènes : la réflexion, la transmission et l'absorption.

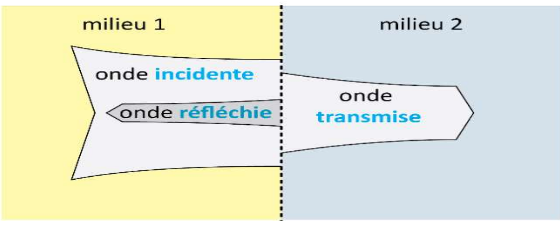


Fig.4 Les caractéristiques des ondes

I. 4 Formule des amplitudes des ondes réfléchies et des ondes transmises

L'équation de cette onde à t = 0 est un simple sinus sans constante de phase.

$y = Acos(k_1 \mathrm{x})$

Voici maintenant le graphique de l'onde incidente (à gauche) et de l'onde transmise (à droite).

L'onde transmise n'a pas la même longueur d'onde ni la même amplitude que l'onde incidente. L'équation de cette onde à t = 0 s est

$y_T = A_T cos(k_2 \mathrm{x})$

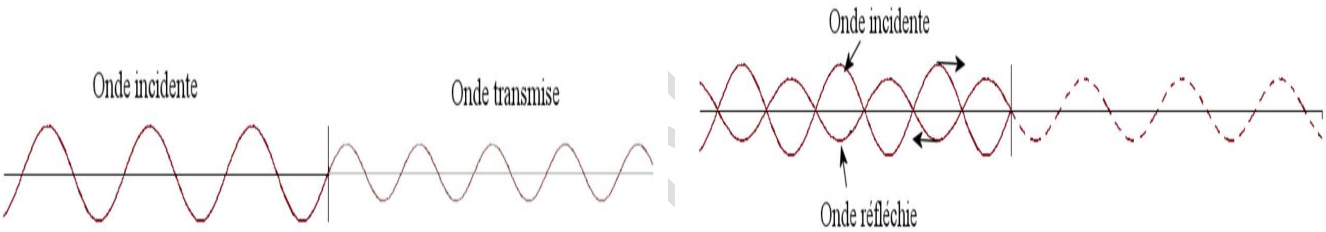


Fig.5 graphique de l'onde incidente (à gauche) et de l'onde transmise (à droite)

L'onde réfléchie à t = 0 doit donc être décrite par l'équation suivante :

$y_R = -A_R cos(k_1 \mathrm{x})$

On va maintenant mettre en mouvement ces ondes. Comme les ondes incidente et transmises vont vers la droite, on ajoute $-\omega t$ dans le sinus. Comme l'onde réfléchie va vers la gauche, on ajoute $+\omega t$ dans le sinus. Nos trois ondes sont donc :

$y = \mathrm{A}\, sin(k_1 \mathrm{x} - \omega t)$

$y_R = -A_R\, sin(k_1 \mathrm{x} - \omega t)$

$y_T = A_T\, sin(k_1 \mathrm{x} + \omega t)$

Sur la corde de gauche, il y a l'onde incidente et l'onde réfléchie qui s'additionnent. Le déplacement total de la corde de gauche est donc de :

$y_1 = \mathrm{A}\, sin(k_1 \mathrm{x} - \omega t) - A_R\, sin(k_1 \mathrm{x} + \omega t)$

Sur la corde de droite, il n'y a que l'onde transmise. Le déplacement total de la corde de droite est donc :

$$y_2 = A_T sin(k_1 \mathrm{x} + \omega t)$$

Au point de jonction des cordes (x = 0), les deux cordes doivent toujours avoir la même position pour qu'elles restent toujours en contact.

À x = 0, le déplacement de la corde de gauche est :

$$y_1 = \mathrm{A}\ sin(-\omega t) - A_R\ sin(\omega t)$$

À x = 0, le déplacement de la corde de droite est :

$$y_2 = A_T\ sin(-\omega t)$$

Si le déplacement des milieux est toujours le même à la jonction (x = 0), on doit avoir

$$\mathrm{A}\ sin(-\omega t) - A_R\ sin(\omega t) = A_T\ sin(-\omega t)$$

$$\mathrm{A} + A_R = A_T$$

C'est la première équation pour trouver l'amplitude des ondes transmise et réfléchie.

On trouve la deuxième équation avec la conservation de l'énergie. La puissance de l'onde incidente doit être égale à la puissance de l'onde transmise additionnée à celle de l'onde réfléchie.

$$\mathrm{P} = P_R + P_T$$

De façon générale, la puissance d'une onde est donnée par

$$P = \frac{1}{2} Z w^2 A^2$$

Puisque Z = µv pour une onde sur une corde, on revient à la formule connue pour la puissance sur une onde dans une corde. On a donc :

$$\mathrm{P} = P_R + P_T \Leftrightarrow \frac{1}{2} Z_1 w^2 {A_R}^2 + \frac{1}{2} Z_2 w^2 {A_T}^2 = \frac{1}{2} Z_1 w^2 A^2$$

On trouve premièrement A_R en remplaçant le A_T de la première équation dans la deuxième équation :

$$A_R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1}\ A$$

De là, on trouve que :

$$A_T = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} A$$

L'amplitude des ondes transmise et réfléchie dépend des impédances des milieux. Si l'onde initiale a une amplitude A, alors les amplitudes des ondes réfléchies et transmises sont les suivantes.

I. 5 Réflexion et transmission selon la différence d'impédance

I. 5.1 Impédances très différentes

Si l'impédance Z_1 est beaucoup plus grande que l'impédance Z_2 :

$$A_R = \frac{Z_1}{Z_1}\ A$$

L'onde réfléchie a pratiquement la même amplitude que l'onde initiale. Cela signifie que presque toute l'énergie de l'onde initiale s'est réfléchie et qu'il y a très peu d'énergie dans l'onde transmise. L'onde est donc presque entièrement réfléchie.

Si l'impédance Z_1 est beaucoup plus petite que l'impédance Z_2 , on a alors :

$$A_R = \frac{-Z_2}{Z_2} A = -A$$

L'onde réfléchie a pratiquement la même amplitude que l'onde incidente. (On s'occupera de la signification du signe négatif un peu plus loin). Encore une fois, cela signifie qu'il y a beaucoup de réflexion et qu'il n'y a pratiquement pas d'énergie dans l'onde transmise.

I. 5.2 Impédances ayant des valeurs près l'une de l'autre

Si l'impédance Z1 est presque identique à l'impédance Z2, on a alors :

$$A_R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} \mathrm{A} \approx 0$$

Dans ce cas, il n'y a pas d'onde réfléchie et l'onde se transmet au complet dans l'autre milieu. La notion d'impédance est très familière aux électriciens. Cette notion est également utile en mécanique pour exprimer le comportement des ondes aux interfaces entre milieux différents. Par analogie à la situation électrique, l'impédance mécanique est définie comme le rapport :

$$Z_{mec} = \frac{Force\ ou\ pression\ dans\ le\ milieu\ due\ \grave{a}\ l'ond}{r\acute{e}ponse\ du\ milieu(sa\ vitesse\ vibratoire)} = \frac{F}{v} = \sqrt{Fv}$$

Les règles d'inversion de l'onde réfléchie deviennent alors

Si $\mu_2 > \mu_1$ ou si $v_1 > v_2$, l'onde réfléchie est inversée

Si $\mu_2 < \mu_1$ ou si $v_2 > v_1$, l'onde réfléchie n'est pas inversée

I. 5.3 Les coefficients énergétiques

Le coefficient de réflexion, noté *R*, est la fraction de l'énergie incidente qui est réfléchie. Le coefficient de transmission, noté *T*, est la fraction de l'énergie incidente qui est transmise. À l'interface entre les deux milieux, toute l'énergie qui n'est pas transmise est réfléchie, ce qui se traduit par la relation :

$$R + T = 1 = 100\%$$

À l'interface entre deux milieux dans lesquels la propagation est possible est plus compliquée. Il faut quantifier quelle part de l'intensité est réfléchie, et quelle part est absorbée dans le milieu. Cela revient à exprimer des coefficients de réflexion (*R*) et de transmission (*T*) en intensité, en fonction des caractéristiques du milieu, c'est-à-dire de l'impédance. On a déjà fait le calcul et trouvé :

$$R = \frac{I_{refelichi}}{I_{incident}} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$$

$$T = \frac{I_{transmiss}}{I_{incident}} = 1 - \mathrm{R} = \frac{4Z_2Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Le facteur de transmission T est égale à $1 - R$.

Exercices et solutions

Exercice 1 :

On considère une corde homogène initialement au repos et confondue avec l'axe Ox , inélastique, de masse linéique μ , tendue par une tension de norme T . Le dispositif global est représenté figure 1. La corde est tendue par une masse par l'intermédiaire d'une poulie. La corde est fixée au point O et un guidage impose $y = 0$ à chaque instant à l'abscisse $x = L$.

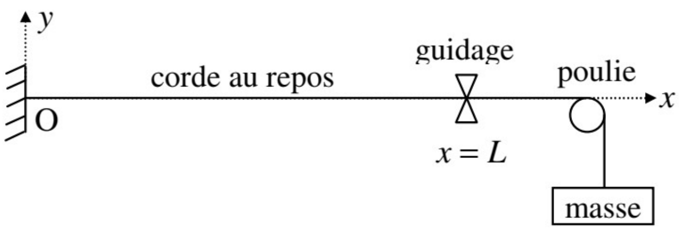


Fig.6

On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xoy , autour de la position d'équilibre. L'élongation à l'instant t du point M d'abscisse x est notée $y\,(x, t\,)$. La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\theta\,(x\,, t)$. Les déplacements étant de faibles amplitudes, cet angle θ reste petit (voir figure 2). Dans l'étude du mouvement de la corde, on négligera l'action du champ de pesanteur ainsi que toute cause d'amortissement. La géométrie du problème est représentée figure 2 ; on y a représenté les tensions appliquées à l'élément de corde MN.

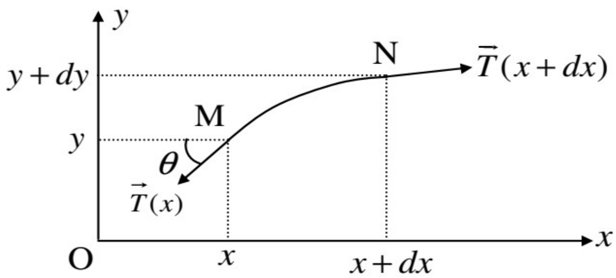


Fig.7

1. Expliquer qualitativement devant quelle grandeur on néglige l'action du champ de pesanteur et pourquoi on peut le faire.

2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'élément de corde MN. Que peut-on en conclure pour T ? En déduire l'équation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. Comment se nomme cette équation ? Exprimer la constante C en fonction de T et μ et en donner la dimension.

3. Montrer que les solutions de l'équation différentielle précédente sont de la forme: $y(x,t) = f(Ct - x) + g(Ct + \mathrm{x})$. Interpréter le sens physique de la fonction f par exemple et donner le sens physique de .

4. On rappelle que la corde est fixée de façon rigide en x = 0 et guidée en L = x. On cherche les solutions de l'équation de propagation sous la forme :

$y(x,t) = f(x).\,g(\mathrm{x})$ · (ondes stationnaires) et on admet que les fonctions f (x) et g (t) sont sinusoïdales et on pose :

$$\begin{cases} f(x) = a_1 \sin(kx + \varphi_1) \\ g(x) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

En déduire la relation qui lie k à ω , comment s'appelle cette relation ?

Montrer que ω ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes ω_n . Exprimer ω_n en fonction de , n et C .

A chaque valeur de ω_n correspond un mode propre. Le mode n =1 est appelé mode fondamental. Les modes correspondant à n supérieur à 1 sont les harmoniques. Exprimer l'élongation $y_n(x,t)$ du mode d'indice n et donner une représentation graphique de la corde en mouvement (à un instant donné) pour les trois premiers harmoniques.

5. Calculs sur les cordes d'une guitare électrique Une guitare électrique comporte six cordes en acier. Le tableau ci-dessous fournit pour chaque corde, la valeur de sa fréquence fondamentale et son diamètre.

Corde n°	1	2	3	4	5	6
f_1 fréquence fondamentale (Hz)	82,5	110	147	196	247	330
Diamètre d (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25

Toutes les cordes ont une longueur L = 63,0 m et une masse volumique 3 7800 kg.m^{-3}. Déterminer T en fonction de ρ , π , d , L et $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ pour le mode fondamental.

Calculer numériquement les tensions nécessaires pour que la guitare soit accordée. Quelle variation relative peut être tolérée sur la tension d'une corde pour que sa fréquence fondamentale ne varie pas de plus de 1% en valeur relative ? Application numérique. L'instrumentiste veut produire un son de fréquence fondamentale de 500 Hz puis 1 kHz avec une tolérance de 1% sur la corde n°6. Avec quelle précision absolue doit-il placer son doigt pour raccourcir la corde ? Comment varie la précision absolue avec la fréquence fondamentale du son à produire ? Application numérique. Commenter.

Solution :

1. On étudie le système « élément de corde MN » de masse dm dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Cet élément de corde subit 3 forces : la tension en M $\vec{T}\,(x)$, la tension en N $\vec{T}\,(x + dx)$, et son poids $dm\,\vec{g}$. La tension est supposée suffisamment importante pour que la corde, au repos, puisse être considérée comme horizontale. Cette tension est apportée par l'intermédiaire d'une masse m et d'une poulie. Si la masse de la corde est négligeable devant m , alors le poids de la corde est négligeable devant la tension.

2. On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à cet élément de corde :

$$dm\,\vec{a} = \vec{T}\,(x) + \vec{T}\,(x + dx)$$

La masse dm de l'élément de corde de longueur dl s'écrit $dm = \mu\, dl$ avec $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$

Soit $dx = dl$ au 1er ordre, l'élément de corde conserve la même longueur, en effet la corde est inextensible. Cet élément de corde a alors une masse $dm = \mu\, dx$. Puisqu'on étudie les mouvements transversaux de la corde, MN n'a pas de mouvement longitudinal (selon l'axe Ox), son vecteur accélération s'écrit alors

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y$$

En projetant le PFD sur l'axe Ox :$-T_x\ (x) + T_x\ (x + dx) = 0$

En effectuant un développement de Taylor au 1er ordre : $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ et $T_x = 0$

Puisque$T_x = T sin\theta = cte$ et $\theta \ll 1$ on alors $\cos(\theta) = 1$ et on obtient $T = cte$

En projetant le PFD sur l'axe Oy : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = --T_y\ (x) + T_y\ (x + dx)$

En développant au 1er ordre : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$ or $T_y\ (x) = T\sin(\theta)$ donc $\frac{\partial T_y}{\partial x} = T\ \frac{\partial \sin(\theta)}{\partial x}$

Comme $\theta \ll 1$, on a $sin(\theta) \approx \theta \approx \tan(\theta)$. De plus $\tan(\theta) = \frac{\partial y}{\partial x}$, et donc $\frac{\partial \sin(\theta)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

D'où : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ On obtient bien une équation de la forme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. Cette équation est l'équation de d'Alembert. En identifiant : $C = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. En regardant la dimension de l'équation de d'Alembert précédente on remarque que C est une vitesse.

3. on pose $u = Ct - x$ et $v = Ct + x$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = C\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial y}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = C^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2C^2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + C^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

En reportant dans l'équation

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, on obtient$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$. En intégrant par rapport à u : $\frac{\partial y}{\partial v} = G(v)$. Puis en intégrant par rapport à v : $y(u, v) = f(u) + g(v)$

On a bien $y(x, t) = f(Ct - x) + g(Ct + x)$ (c'est le théorème de d'Alembert). Interprétation : supposons que la fonction g soit nulle : $y(x, t) = f(Ct - x)$.

La fonction y a la même valeur dans le plan à la position x_1 observé à l'instant t_1 et dans le plan à la position $x_2$observé à l'instant t_2 si $f(Ct_1\ - x_1)$=$f(Ct_2\ - x_2)$

, soit pour $(Ct_1\ - x_1)$=$(Ct_2\ - x_2)$, ou encore $x_2 - x_1 = C(t_2\ - t_1)$

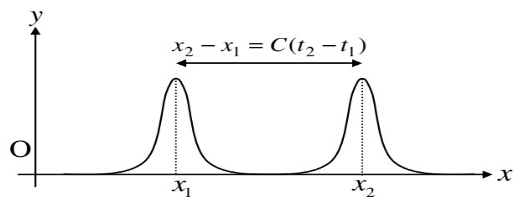


Fig. 8 La fonction y aux positions

Ceci signifie que le phénomène s'est propagé « en bloc », suivant l'axe Ox , dans le sens des x croissants, sans déformation ni atténuation, à la vitesse C (onde progressive).

4. Avec $f(x) = \mathrm{a}_1 \sin(kx + \varphi_1)$ et $(t) = \mathrm{a}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, l'onde stationnaire s'écrit :

$y(x,t) = \mathrm{a}_1\,\mathrm{a}_2 \sin(kx + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_1)$, On en déduit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$

En reportant dans l'équation de propagation, on obtient : $\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{C^2}\right) y = 0$ et ce $\forall y$ d'où $C = \frac{\omega}{k}$ appelée relation de dispersion de l'onde.

Les points *x*=0 et *x* =*L* sont fixés, donc *y* (0, *t*) 0 et *y* (*L*, *t*) 0 (conditions aux limites). Puisque $y = f(x).\,g(t)$ on en déduit *f* (0) =0=et *f* (*L*) =0

$f(0) = 0 \Rightarrow \sin(\varphi_1) = 0$ et $f(L) = 0 \Rightarrow \sin(kL + \varphi_1) = 0 = \sin(kL)\cos(\varphi_1) + \cos(kL)\sin(\varphi_1)$

On en déduit donc $\sin(kL) = 0$, soit $kL = \pi n$ avec *n* entier.

Or $C = k\omega$ est quantifiée et ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes $\omega_n = n\frac{\pi C}{L}$

L'élongation $y_n(x,t)$du mode de rang *n* s'écrit :$y_n(x,t) = \pm \mathrm{a}_1\,\mathrm{a}_2 \sin(k_n x + \varphi_1)\sin(\omega_n t + \varphi_1)$

Que l'on note, avec les résultats précédents : $y_n(x,t) = A_{\,n} \sin(n\frac{\pi}{L}x)\sin(n\frac{\pi C}{L}\mathrm{t} + \varphi\ \ )$

Représentons graphiquement la corde en mouvement (à un instant donné) pour les trois premiers harmoniques :

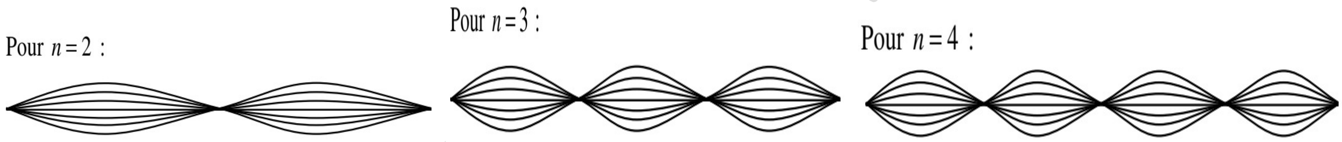


Fig.5 Représentons graphiquement la corde en mouvement

5. Calculs sur les cordes d'une guitare électrique.

Pour le mode fondamental : $\omega = \omega_1 = \frac{\pi C}{L} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ et $\omega_1 = 2\pi f_1$d'où $T = 4\mu\, L^2\, {f_1}^2$ or $\mu = \rho\pi r^2 = \rho\pi\frac{d^2}{4}$, d'où $T = \pi\rho d^2\, L^2\, {f_1}^2$

Corde n°	1	2	3	4	5	6
T *en Newton*	83	93	103	113	73	66

Différentions logarithmiquement l'expression $T = 4\mu\, L^2\, {f_1}^2$ à μ□□et L constants $\frac{dT}{T} = 2\frac{df_1}{f}$

En passant aux variations on obtient : $\frac{\Delta T}{T} = 2\frac{\Delta f_1}{f}$, , soit :$\Delta T = 2T\frac{\Delta f_1}{f_1}$

Avec les valeurs précédentes *T* ≈100 N et $\frac{\Delta f_1}{f_1} = 1\%$ on obtient:$\Delta T = 2\ \ N$

Différentions logarithmiquement l'expression $T = 4\mu\, L^2\, {f_1}^2$ a μ et T constants : $0 = 2\frac{dL}{L} + 2\frac{df_1}{f_1}$

En passant aux variations on obtient : $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta f_1}{f_1}$ soit $\Delta L = L\frac{\Delta f_1}{f_1}$ soit , avec $\frac{\Delta f_1}{f_1} = 1\%$

$$\Delta L = \frac{L}{100}$$

Pour la corde n° 6 : $L_o = 0{,}63\ m$ et $f_{o1} = 330\ Hz$

Puisque μ et T sont constants dans la relation $T = 4\mu\ L^2\ {f_1}^2$, on en déduit $Lf_1 = cst = f_{o1}L_o$

On a donc : $L = \frac{f_{o1}L_o}{f_1}$ et $\Delta L = \frac{L}{100}$, , et on obtient :

f_1	L(m)	ΔL(m)
500	0,42	$4{,}2.10^{-3}$
1000	0,21	$2{,}1.10^{-3}$

On en déduit que l'instrumentiste doit placer son doigt pour raccourcir la corde avec une précision absolue de l'ordre du millimètre. $\Delta L = \frac{L_o}{100}\frac{f_{o1}}{f_1}$ n déduit que la précision absolue varie inversement proportionnelle avec la fréquence fondamentale du son à produire. Plus un son est aigu, plus il est difficile de l'émettre juste.

Application numérique:

prenons ΔL=0,5 mm (cas difficile), on a alors f_1=4158 Hz . On en déduit qu'il est difficile de jouer un son juste au-delà de 4000 Hz.

Chapitre VIII

LES ONDES ACOUSTIQUES DANS LES FLUIDES

I. Propagation d'une onde sonore

I.1 Description et modélisation du problème

Un fluide est d´écrit, dans le formalisme eul´erien, par la donn´ee des champs suivants : le champ de vitesse $\vec{v} = (M,t)$, tq, le champ de pression $p = (M,t)$, tq et le champ de masse volumique $\rho = (M,t)$. On note les valeurs au repos de ces champs $\vec{v}(M,t) = \vec{0}$, $P(M,t) = P_o$, et $\rho(M,t) = \rho_o$. L'onde se traduit par la perturbation du milieu, de sorte que

$$\vec{v}(M,t) = \vec{v_1}(M,t), p(M,t) = p_o(M,t) + p_1(M,t), \rho(M,t) = \rho_o(M,t) + \rho_1(M,t),$$

Ou $p_1$est appelé surpression ou pression acoustique. On néglige l'action de la pesanteur et on suppose le fluide parfait, obéissant donc à l'équation d'Euler.

I.2 Mise en équation

I.2.1 Equation d'Euler

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right] = -\overrightarrow{grad}(\rho)$$

En utilisant les hypothèses de l'approximation acoustique :

$$(\rho_o + \rho_1)\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_1.\overrightarrow{grad})\vec{v}_1\right] = -\overrightarrow{grad}(p_1)$$

Les termes$\rho_1 \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}$ et $(\vec{v}_1.\overrightarrow{grad})\vec{v}_1$sont des infiniments petits d'ordre 2, et sont donc n´egligeables. On obtient alors une version linéarisée de l'équation d'Euler :

$$\rho_o \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(p_1)$$

I.2.2 Conservation de la matière

L'´équation locale de conservation de la matière est la suivante :

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

qui se réécrit en utilisant les hypothèses de l'approximation acoustique

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_o div(\vec{v}_1) + div(\rho_1\vec{v}_1) = 0$$

I.3 Equation de propagation

On cherche à obtenir l'´équation vérifiée par la surpression p1.

$$div\left(\overrightarrow{grad}(p_1)\right) = -div\left(\rho_o\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t}\right) = -\rho_o\frac{\partial}{\partial t}(div(\vec{v}_1))$$

Et

$$-\rho_o div(\vec{v}_1) = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$

Donc

$$div\left(g\vec{rad}(p_1)\right) = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}$$

Par ailleurs**,** permet d'´écrire :

$$div\left(g\vec{rad}(p_1)\right) = -\rho_o \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \Leftrightarrow div\left(g\vec{rad}(p_1)\right) = -\rho_o \chi_S \Delta p_1$$

Est l'´équation de d'Alembert pour la surpression, avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_o \chi_S}}$$

I.4 Ondes sonores

I.4.1 Ondes planes progressives harmoniques

L'expression générale d'une onde plane progressive de pression se propageant dans la direction $\vec{u}$ est :

$$p_1(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{\vec{u}\vec{r}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\vec{u}\vec{r}}{c}\right) +$$

et pour une onde se propageant sur l'axe Ox($\vec{u} = \overrightarrow{u_x}$), dans le sens des x croissants

$$p_1(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Il est donc particulièrement intéressant, en raison de la linéarité des équations, d'étudier les solutions en ondes planes progressives harmoniques

$$p_1(M, t) = p_{1o}\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Le vecteur d'onde est égale $\vec{k} = k\,\vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda}\,\vec{u}_x$. Et la relation de dispersion qui permet à la solution harmonique de vérifier l'équation de d'Alembert est $\omega = kc$

Dans le cas d'une onde harmonique, on peut utiliser la notation complexe :

$$\underline{p_1}(M, t) = \underline{p_{1o}}\exp(i(\omega t - kx))\ ,\ \underline{p_{1o}} = \exp(i\varphi)$$

- **Impédance acoustique**

Compte tenu du caractère longitudinal des ondes, on a donc

$$\rho_o \omega \underline{\vec{v}_1}(M,t) = k\underline{p_1}(M,t)$$

Soit en utilisant la relation de dispersion :

$$\underline{p_1}(M,t) = \rho_o c \underline{v_1}(M,t)$$

On définit alors l'impédance acoustique :

$$Z_a = \frac{p_1}{v_1} = \rho_o c = \sqrt{\frac{\rho_o}{\chi_S}}$$

Cette expression est valable pour une onde se propageant vers les $x > o$.

I.5 Aspects énergétiques

I.5.1 Bilan d'énergie

Consid´erons un ´el´ement de surface du fluide $\overrightarrow{dS}$. La force exerc´ee sur la surface peut s'exprimer

$$\overrightarrow{dF} = \left(p_o + p_1(M,t)\right)\overrightarrow{dS}$$

Les particules se déplacent à la vitesse $\vec{v}_1(M,t)$, on peut donc exprimer la puissance moyenne des forces de pression

$$< dP >=< \overrightarrow{dF}\,\vec{v}_1(M,t) >=< p_o\,\vec{v}_1(M,t)\overrightarrow{dS} > +< p_1(M,t)\,\vec{v}_1(M,t)\overrightarrow{dS} >$$

Le premier terme est nul car$<\ \vec{v}_1(M,t) >= 0$. Il reste donc pour la puissance moyenne

$$dP >=< p_1(M,t)\,\vec{v}_1(M,t)\overrightarrow{dS} >$$

$$P = \iint_{\Sigma} \ < p_1(M,t)\,\vec{v}_1(M,t) > \overrightarrow{dS}$$

La puissance moyenne est donc ´égale au flux moyen d'un vecteur. $\vec{\prod}$ à travers la surface

$$\vec{\prod} = p_1(M,t)\,\vec{v}_1(M,t)$$

I.5.2 Equation de conservation de l'énergie

On considère un volume V d´élimite par une surface Σ. En notant em la densité d'´énergie mécanique

$$E_m = \iiint_V \ e_m\, d\tau$$

La variation d'´énergie dans le volume V entre $t + dt$ est

$$E_m(t+dt) - E_m(t) = -\oiint_{\Sigma} \ \vec{\prod} \overrightarrow{dS} \, dt$$

on peut réécrire le membre de gauche

$$E_m(t+dt) - E_m(t) = \frac{\partial E_m}{\partial t} \, dt = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \ e_m \, d\tau$$

On inverse les opérations de d´dérivation et d'intégration (variables indépendantes) et on simplifie par dt

$$\iiint_V \ \frac{\partial e_m}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \oiint_{\Sigma} \vec{\prod} \overrightarrow{dS}$$

Enfin on utilise le théorème de Green-Ostrogradski

$$\iiint_V \ \frac{\partial e_m}{\partial t} d\tau + \iiint_V \ div(\vec{\prod}) \, d\tau = 0$$

ce qui nous donne l'´équation locale de conservation de l'´énergie

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + div(\vec{\prod}) = 0$$

I.6 Vitesse de propagation de l'´énergie

L'´énergie traversant une surface dS pendant un intervalle de temps dt est :

$$dE = \vec{\prod} \overrightarrow{dS} \, dt$$

Par ailleurs, si l'onde se propage à la vitesse c, l'´énergie contenue dans l'´élément de volume $dV = c \, dt \, dS$ vaut aussi dE

$$dE = e_m \, c \, dt \, dS \Leftrightarrow c = \prod / e_m$$

Si l'onde est plane, $p_1 = \rho_o c v_1$. On a donc

$$e_m = \frac{1}{2}\left(\chi_S \, {p_1}^2 + \rho_o {v_1}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\chi_S \left(\rho_o c v_1\right)^2 + \rho_o {v_1}^2\right) \ = \rho_o {v_1}^2$$

Ce qui montre que l'´énergie se propage à la vitesse c. Ces résultats sont valables évidemment pour des ondes harmoniques.

I.7 Réflexion et transmission d'une onde sonore

On s'intéresse à la réflexion et à la transmission d'une onde progressive sous incidence normale.

Les milieux (1) et (2) ont des caractéristiques physiques a priori différentes mais la pression à l'équilibre est identique, notée p_o .

Une surface qui délimite deux milieux différents est appelée "dioptre acoustique".

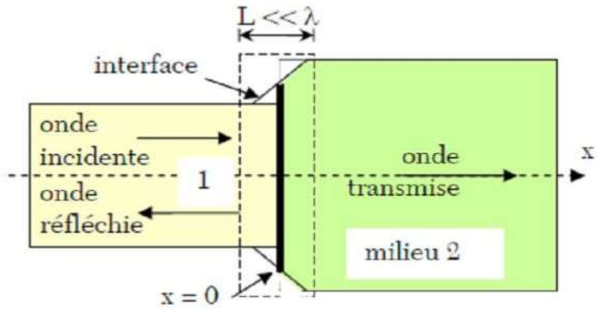


Fig. 1 Dioptre acoustique

On étudie la réflexion et la transmission d'ondes sonores planes au niveau du raccordement de deux conduites de sections S1 et S2, séparant deux milieux matériels d'impédances caractéristiques z_1 pour $x < 0$ et z_2 pour > 0 .

On rappelle que l'impédance acoustique est définie à partir de :

$$z = \frac{p}{v}$$

On note :

$$z_1 = \mu_1 \, c_1 \, , \, z_2 = \mu_2 \, c_2$$

I.7.1 Continuité du débit volumique à l'interface

On considère que les deux fluides ne se mélangent pas, de telle sorte que l'interface constitue une membrane imperméable.

Soit V un volume dans la zone de raccordement, compris entre les deux sections droites $\sum_1$ et $\sum_2$ Σ_1 , situées en $x = -\varepsilon$ et $x = +\varepsilon$.

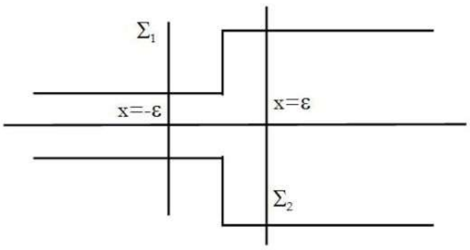


Fig.2 Continuité du débit volumique

On peut imaginer le volume (V) qui oscille de part et d'autre de la membrane de séparation et écrire directement la conservation du volume, ce qui donne la conservation du débit volumique :

$$v_1 \, S_1 = v_2 \, S_2$$

Dans le cas particulier où les deux sections sont égales, il y a alors continuité de la vitesse de part et d'autre de la membrane.

I.7.2 Continuité de la surpression

Dans l'approximation acoustique, le déplacement de l'interface est faible devant la longueur d'onde et peut être négligé, de sorte que l'interface reste confondue avec le plan $x = 0$.

On suppose que la pression au repos a la même valeur P_o en tout point de l'espace.

En considérant un élément de surface dS de l'interface entre les deux fluides comme une membrane fictive de masse nulle, on montre à l'aide du principe fondamental de la dynamique en projection sur Ox que la surpression est continue à l'interface. En effet :

$$\left(P_0 + p_1(0,t)\right)dS - \left(P_0 + p_2(0,t)\right)dS = 0$$

Soit : $p_2(0,t) = p_2(0,t)$

Exercices et solutions

Exercice 01 :

On considère une onde sonore monochromatique plane progressive définie par la perturbation de pression $\delta p = \delta p_o \; e^{j(wt-kx)}$

1) Exprimer la vitesse de propagation *c* de cette onde en fonction de w et k, puis en fonction de la masse volumiqueρ et du coefficient de compressibilité isentropique χ_ϱ du fluide.

2) Le fluide étant de l'air assimilé à un gaz parfait, montrer que $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ si *T* et *M* sont respectivement la température et la masse molaire de l'air, *R* la constante des gaz parfaits et γ le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants. Application numérique pour T= 293 K.

3) Comment appelle t'on la quantité $R = \rho c$? Quelle est sa définition ?

Solution

On ne peut espérer résoudre ce problème sans une bonne connaissance du cours et savoir établir, compte tenu de l'approximation linéaire de l'onde acoustique, les expressions suivantes :

$$\rho_O \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \delta p}{\partial t} + c^2 \rho_O \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{\rho_O \, \chi_\varrho}$$

$\chi_\varrho = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\varrho$: coefficient de compressibilité adiabatique$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} = 0, , \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$;

s représente la position d'un front de matière par rapport à sa position au repos, $u = \frac{\partial s}{\partial t}$ la vitesse de déplacement de ce front de matière et δp la " surpression " de l'onde acoustique.

1) Une onde monochromatique progressive s'écrit, pour la surpression, $\delta p = \delta p_o \; e^{j(wt-\ \ )}$

On remplace cette expression dans l'équation de propagation (équation de D'Alembert) de la surpression et on obtient par identification . $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\rho_O \, \chi_\varrho}}$

Par définition, $R = \frac{\partial p}{u}$ est l'impédance caractéristique de l'onde monochromatique incidente.

A partir de $\rho_O \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0$, on calcule $u = \frac{\delta p_o}{\rho_o c} \; e^{j(wt-kx)}$ et on déduit $R = \rho_O \, c$

2) Il suffit de faire un peu de Thermodynamique pour calculer$\chi_\varrho = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\varrho$ pour un gaz parfait.

L'écoulement de la surpression se fait dans une transformation isentropique où, pour un gaz parfait, nous pouvons écrire : $pV^{\gamma} = cte$, par différentiation,$\frac{\partial p}{p} + \gamma \frac{\partial V}{V}$, soit $\frac{\partial p}{p_o} + \gamma \frac{\partial V}{V_o}$ (approximation linéaire de l'onde acoustique)

$$\chi_{\varrho} = -\frac{1}{V_o}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\varrho} \approx -\frac{1}{V_o}\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\gamma p_o}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_O\,\chi_{\varrho}}} = \sqrt{\frac{\gamma p_o}{\rho_O}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 343\ m\ s^{-1}$$

3) Par définition, $R = \frac{\partial p}{u}$ est l'impédance caractéristique de l'onde monochromatique incidente.

A partir de $\rho_O\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} =$, on calcule $u = \frac{\delta p_o}{\rho_O c}\ e^{j(wt-kx)}$ et on déduit $R = \rho_O\ c$

Exercice 02 :

Un tuyau cylindrique de longueur infinie et de section constante , contient un fluide qui, au repos, est à la pression p_o, à la température T_o et à une masse volumiqueρ_o.

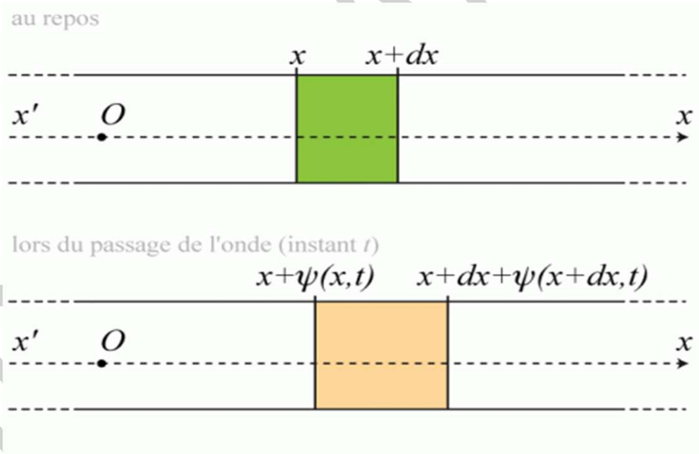


Fig.1 schéma représentant la tranche de fluide au repos et à l'instant t

On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses x et $x + dx$. Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse x . Soit $\psi(x,t)$ ce déplacement à l'instant t . La tranche de fluide considérée se trouve ainsi à l'instant t entre les plans d'abscisse $x + \psi(x,t)$ et $x + dx + \psi(x + dx, t)$.

On notera :

- $u(x,t)$, la vitesse de déplacement de la section d'abscisse x à l'instant t .
- $p(x,t)$, la surpression acoustique liée au passage de l'onde en x à l'instant t .. Ainsi la pression s'écrira $P(x,t) = p_0 + p(x,t)$
- $\rho(x,t)$, la masse volumique du fluide à l'abscisse x à l'instant t .

On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes : le déplacement particulaire $\psi(x,t)$, la surpression acoustique $p(x,t)$, la variation de la masse volumique $\rho(x,t)-\rho_0$ et leurs dérivées peuvent être considérés comme des infiniments petits du premier ordre (on négligera dans la suite tous les infiniments petits d'ordre supérieur ou égal à deux). On négligera l'action de la pesanteur ainsi que toute viscosité ou frottements.

1. En raisonnant sur la tranche de fluide considérée et en précisant la loi utilisée, retrouver l'équation $\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$
2. En supposant que l'évolution de la portion de fluide est isentropique, le coefficient de compressibilité isentropique d'un fluide est défini par :

   $\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$ où V est le volume du fluide et P sa pression.

   Pour le fluide contenu dans le tuyau cylindrique, on supposera que χ_S est une constante.

   Montrer que l'on peut écrire : $p(x,t) = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$.
3. a) En utilisant les résultats des questions 1) et 2), établir l'équation d'onde à laquelle satisfait la grandeur $\psi(x,t)$. Exprimer c (vitesse du son) en fonction de ρ_0 et χ_S .

   b) Montrer que les grandeurs $p(x,t)$ et $u(x,t)$ satisfont à la même équation de propagation que $\psi(x,t)$.
4. Le fluide est de l'air considéré comme un gaz parfait :

- de $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (rapport des capacités calorifiques molaires à pression et à volume constants)
- de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$
- de température $T_0 = 293\ K$

avec $R = 8{,}32\ J.mol^{-1}.K^{-1}$ (constante molaire des gaz parfaits). Donner l'expression de c en fonction de γ, R, T_0, M.

Application numérique : calculer c dans l'air.

Solution :

On pose $x_1 = x + \psi(x,t)$ et $x_2 = x + dx + \psi(x+dx,t)$

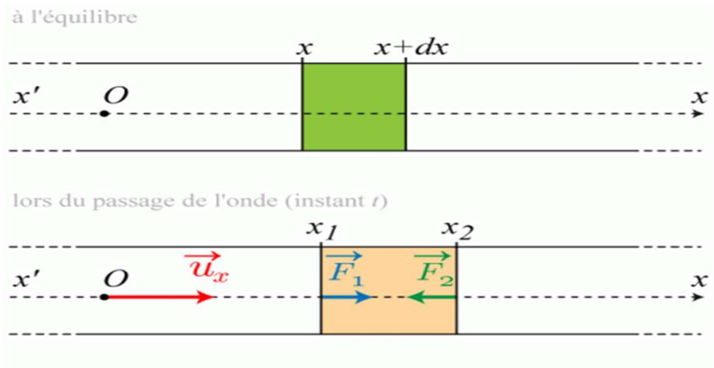


Fig.1 schéma représentant la tranche de fluide au repos et à l'instant t avec bilan des forces

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la tranche de fluide, il vient :

$$dm\,\vec{a} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

Après projection sur l'axe horizontal Ox , on obtient :

$$dm\,a_x = F_1 - F_2$$

Le plan d'abscisse x au repos est à l'abscisse $x + \psi(x,t)$ à l'instant t et à l'abscisse $x + \psi(x,t+dt)$ à l'instant $t + dt$. Alors, la vitesse acoustique est égale à :

$$v_x = \frac{\big(x + \psi(x,t+dt)\big) - \big(x + \psi(x,t)\big)}{dt} = \frac{\big(\psi(x,t+dt)\big) - \big(\psi(x,t)\big)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

En dérivant la vitesse, l'accélération s'écrit :

$$a_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Avec la conservation de la masse de la tranche de fluide, il vient :

$$dm = \rho S(x_2 - x_1) = \rho_0 S\,dx$$

avec la force de pression $F = S\,P$, il vient :

$$F_1 - F_2 = S\,[P(x + \psi(x,t),t) - P(x + dx + \psi(x+dx,t),t) = -Sdx\frac{\partial p(x+\psi(x,t),t)}{\partial x}$$

Or $P(x,t) = p_0 + p(x,t)$ Avec p_0 constante , d'où :

$$\frac{\partial P(x+\psi(x,t),t)}{\partial x} = \frac{\partial p(x+\psi(x,t),t)}{\partial x}$$

Sachant que $(x,t) \ll x$, on peut faire un développement au 1^er^ ordre tel que :

$$p(x+\psi(x,t),t) \approx p(x,t) + \psi(x,t)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

D'où :

$$\frac{\partial p(x+\psi(x,t),t)}{\partial x} \approx \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \psi(x,t)\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

En négligeant les termes du $2^{\text{ème}}$ ordre, on obtient :

$$\frac{\partial p(x+\psi(x,t),t)}{\partial x} \approx \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

Alors :

$$\rho_0 S\,dx\,\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -S\,dx\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \rightarrow \rho_0\,\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

2. Dans le cas de mouvements de faible amplitude, on peut écrire :

$$\chi_S = -\frac{1}{V_o}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \approx \frac{1}{V_o}\left[\frac{\Delta V}{\Delta p}\right]_{t=0}^{t}$$

Il faut donc déterminer la variation de pression et de volume entre la tranche de fluide au repos et à l'instant t .

- au repos : $V_0 = S\,dx$ et la pression est P_0
- à l'instant t : $V = S(x_2 - x_2)$ et $P = P_0 + p(x,t)$:

D'où : $\Delta P = P_0 + p(x,t) - P_0 = p(x,t)$

$$\Delta V = S[\left(x + dx + \psi(x + dx, t)\right) - (x + \psi(x + dx, t)] - Sdx \approx \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$$

Alors :

$$\chi_S = \frac{1}{Sdx}\frac{Sdx\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}}{p(x,t)} \rightarrow p(x,t) \approx -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$$

3. a) En combinant les formules obtenues à la question 1) et 2), il vient :

$$\rho\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\right)$$

En supposant que χ_S est une constante, on obtient finalement :

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$$

b) En dérivant par rapport à x l'équation d'onde obtenue à la question 3.a) et en supposant que les dérivations par rapport à x et t commutent, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}\right)$$

En supposant que les dérivations par rapport à x et t commutent, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$$

Avec :

$$p(x,t) \approx -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$$

χ_S est constante, on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

En dérivant par rapport à t l'équation d'onde obtenue à la question 3.a), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}\right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}\right)$$

En supposant que les dérivations par rapport à x et t et commutent, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t})\right)$$

Avec

$$u(x,t) \approx \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

On obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

4. a) Pour un gaz parfait lors d'un transformation isentropique : $PV^{\gamma} = K$ où K est une constante. Ou encore : $lnP + lnV^{\gamma} = ln\ K$. En dérivant, il vient

$$\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$$

On peut alors réécrire le coefficient de compressibilité isentropique d'un fluide :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \approx \frac{1}{\gamma P}$$

Où P est la pression totale

De plus, pour un gaz parfait de masse m à la températureT_o , on a :

$$PV = \left(\frac{m}{M}\right)RT_o \rightarrow P = \left(\frac{m}{V}\right)\frac{RT_o}{M} \approx \frac{\rho_o RT_o}{M}$$

Alors :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_o \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_o}} \rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma RT_o}{M}}$$

b) A.N : $c = 343\ m\ s^{-1}$, c'est la vitesse théorique du son dans l'air.

Chapitre IX

LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

I. Les ondes électromagnétiques

Une onde électromagnétique comporte à la fois un champ électrique et un champ magnétique oscillant à la même fréquence. Ces deux champs, perpendiculaires l'un par rapport à l'autre se propagent dans un milieu selon une direction orthogonale (figure ci-dessous).
La propagation de ces ondes s'effectue à une vitesse qui dépend du milieu considéré. Dans le vide, la vitesse de propagation est égale à 3.108 $m.s^{-1}$.

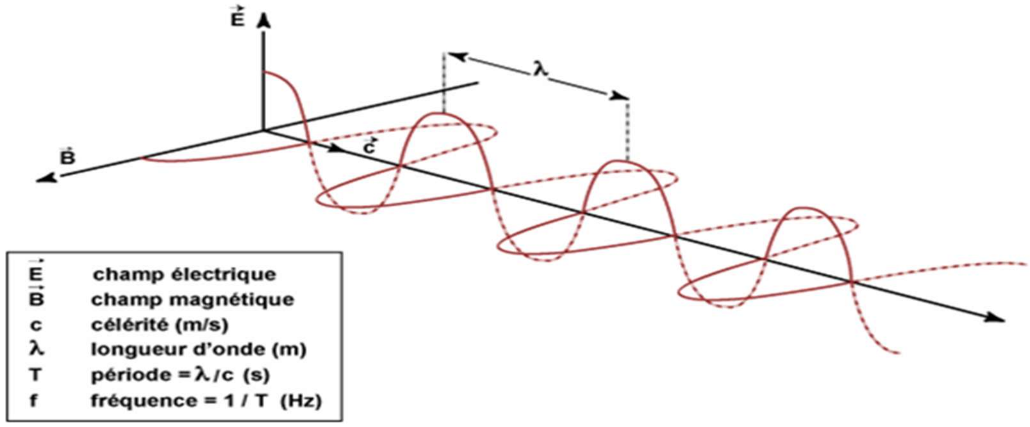


Fig.1 Nature et propagation d'une onde électromagnétique

I.1 Une onde électromagnétique est caractérisée par plusieurs grandeurs physiques :

I.1.1 La longueur d'onde (λ)

elle exprime le caractère oscillatoire périodique de l'onde dans l'espace.
C'est la longueur d'un cycle d'une onde, la distance séparant deux crêtes successives.
Elle est mesurée en mètre ou en l'un de ses sous-multiples, les ondes électromagnétiques utilisées en télédétection spatiale ayant des longueurs d'onde relativement courtes :

- le nanomètre =>1 nm = 10-9 mètre
- le micromètre => 1 µm = 10-6 mètre
- le centimètre => 1 cm = 10-2 mètre

I.1.2 La période (T) :

elle représente le temps nécessaire pour que l'onde effectue un cycle. L'unité est la seconde.

I.1.3 La fréquence (ν)

Inverse de la période, elle traduit le nombre de cycles par unité de temps. Elle s'exprime en Hertz (Hz) - un Hz équivaut à une oscillation par seconde - ou en multiples du Hertz, les ondes électromagnétiques utilisées en télédétection spatiale ayant des fréquences très élevées :

- le kilohertz => 1 kHz = 10^3 Hz
- le mégahertz => 1 MHz = 106 Hz
- le gigahertz => 1 GHz = 10^9 Hz

Longueur d'onde et fréquence sont inversement proportionnelles et unies par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

où λ est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique, c est la vitesse de la lumière (3.108 m.s-1) et ν la fréquence de l'onde.

Par conséquent, plus la longueur d'onde est petite, plus la fréquence est élevée, et réciproquement.

I.2 Spectre électromagnétique

Les premières ondes électromagnétiques découvertes par Hertz présentaient une longueur d'onde de quelques mètres. Ces ondes furent appelées ondes hertziennes (ou onde radio). On a pris l'habitude de découper l'intervalle des longueurs d'onde en différents domaines spectraux qui constituent le *spectre électromagnétique*. Dans le domaine optique, on parlera plutôt d'ondes planes *monochromatiques* car la fréquence du signal électromagnétique détermine la couleur de la lumière visible.

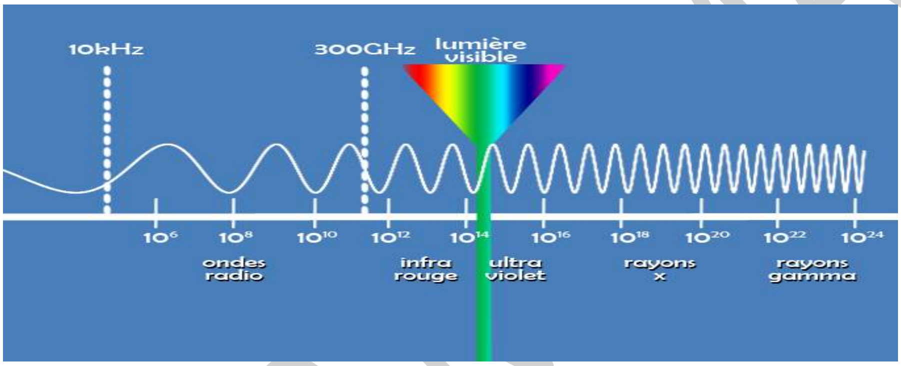


Fig.2 Spectre électromagnétique. Les ondes sont classées selon leurs fréquences en Hertz.

I.3 Équation de propagation

Plaçons-nous dans une région de l'espace ou règne le vide : aucune matière n'y est présente ; en particulier les densités de charge et courant électrique sont rigoureusement nuls. Dans cette région, les équations de Maxwell prennent la forme simple suivante :

$$div(\vec{E}) = 0$$

$$r\vec{o}t(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$r\vec{o}t(\vec{B}) = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$div(\vec{B}) = 0$$

Pour obtenir l'équation qui régit la dynamique du champ électrique ou magnétique on utilise l'identité:

$$r\vec{o}t\left(r\vec{o}t(\vec{E})\right) = -gr\vec{a}d\left(div(\vec{E})\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

Par ailleurs, on a également

$$r\vec{o}t\left(r\vec{o}t(\vec{E})\right) = r\vec{o}t\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On aboutit à l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta \vec{E} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

En procédant de la même manière avec le champ magnétique, c'est-à-dire en calculant $r\vec{o}t\left(r\vec{o}t(\vec{B})\right)$

I.3.1 Équation de propagation du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ vérifié l'équation :

$$\Delta\{\vec{E}, \vec{B}\} \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\{\vec{E}, \vec{B}\}}{\partial t^2} = \vec{0} \,, \mu_o \varepsilon_o c^2 = 1$$

I.4 Définition d'‘une onde électromagnétique

Une onde est une perturbation qui se propage en transportant de l'énergie et de la quantité de mouvement.

- Onde électromagnétique : formation du couple champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le temps et l'espace.
- Onde non matérielle : pas besoin de matière pour se propager : elle se propage bien dans le vide et avec une célérité maximale de 3.10 m.
- Onde transversale : déformation perpendiculaire à l'axe de propagation (similaire aux vagues à la surface de l'eau) Equation de propagation d'une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$

Propagation selon $(\overrightarrow{Ox})$

Pour$\vec{E}$: $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \varepsilon_o \mu_o \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

Pour$\vec{B}$: $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \varepsilon_o \mu_o \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$

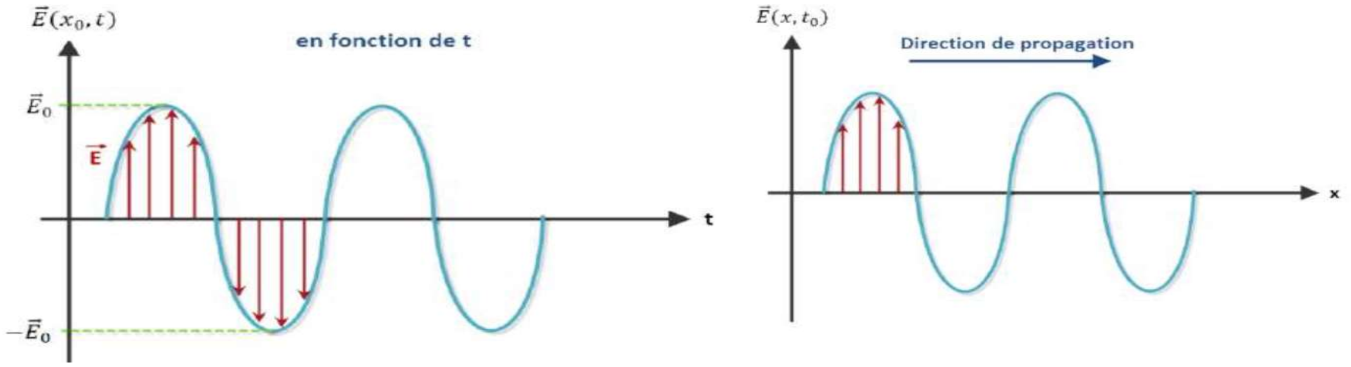


Fig. 3 Représentation d'une propagation de $\vec{E}$ ou de $\vec{B}$

I.5 Propagation d'onde électromagnétique dans le vide (ou dans l'air)

I.5.1 Equations de D‘Alembert

Dans le vide, permet d'établir les équations de D'Alembert pour $(\vec{E}, \vec{B})$:

$$\begin{cases} \Delta\vec{E} - \varepsilon_o\mu_o \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\vec{B} - \varepsilon_o\mu_o \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Où « c » est la célérité de l'OEM dans le vide $\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}$

I.5.2 Solution des équations de D'Alembert

La solution générale est : $f(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$

- Une Onde électromagnétique progressive se propageant dans la direction $\overrightarrow{Ox}$ est de la forme :

$$\vec{E}(x - ct), \vec{B}(x - ct)$$

- Une Onde électromagnétique régressive se propageant dans la direction $\overrightarrow{Ox}$ est de la forme :

$$\vec{E}(x - ct), \vec{B}(x - ct)$$

I.6. Ondes planes

Onde dont la surface d'onde est un plan. Ensemble des points où le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ a même direction, même sens et même intensité = même état vibratoire (surface d'onde).

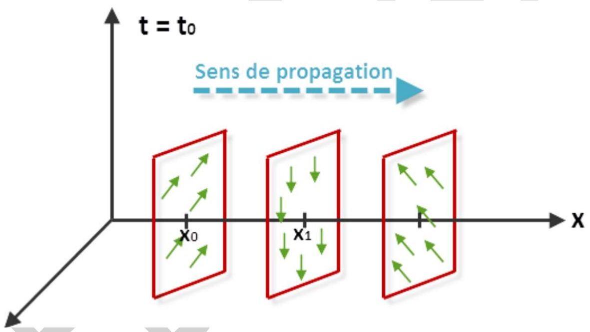


Fig. 4 Représentation de la surface d'onde

Au niveau de la source d'onde électromagnétique les ondes sont plutôt sphériques (la surface d'onde est une sphère).

En revanche, si on se situe très loin de la source (rayon de la sphère tend vers l'infini), la surface d'onde devient plane : on a donc des ondes planes.

Mathématiquement, les ondes planes sont plus faciles à manipuler

➢ Il faut faire l'étude très loin de la source

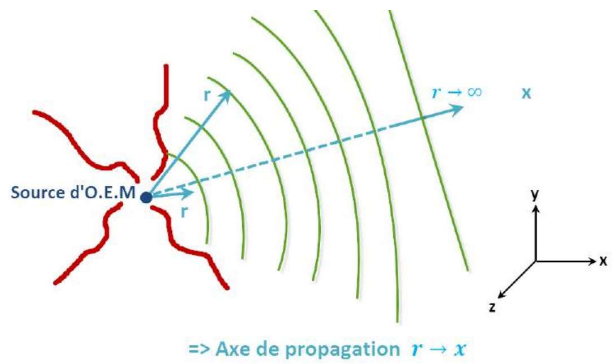


Fig. 3 Représentation de la surface d'onde avec une source d'OEM

I.6.1 Propriétés d''ondes planes

Ces propriétés ont été établies à partir des équations de Maxwell exprimées dans le milieu vide. Les 4 propriétés sont :

- $(\vec{E}\ et\ \vec{B})$ sont transverses ($\vec{E}\ et\ \vec{B}$ sont perpendiculaires à l'axe de propagation)
- $\vec{E}$ perpendiculaire $\vec{B}$
- $\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|$
- $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u})$ trièdre direct ($\vec{u}$ vecteur unitaire de l'axe de propagation)

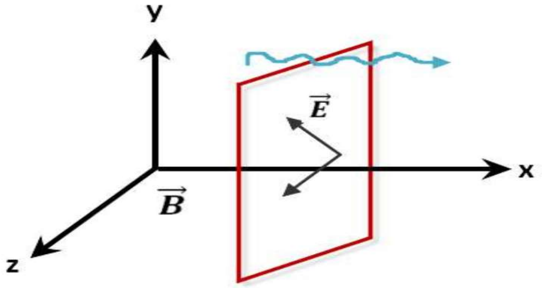


Fig. 5 Représentation de $\vec{E}\ et\ \vec{B}$ à l'axe de propagation

I.7 Ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS)

Expression générale d'une OPP se propageant sur $\overrightarrow{Ox}$: $\vec{E} = \vec{E}(x - ct)$

Alors : $\vec{E}(x - ct) = \vec{E_o}cos(k(x - ct)) = \vec{E_o}cos(kx - \text{k}\,ct) = \vec{E_o}cos(kx - \omega t))$

Ou : k est le nombre d'ondes, c vitesse de propagation et ω pulsation.

En fonction du temps (on fixe x donc une position de l'espace :$x = x_0$)

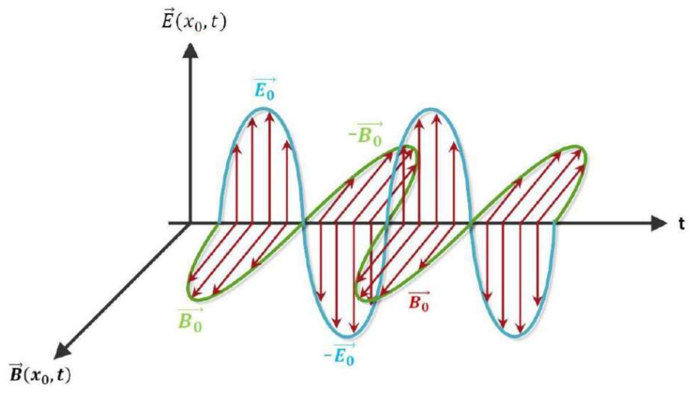


Fig. 6 Représentation de $\vec{E}\ et\ \vec{B}$ à l'axe de propagation

Longueur d''onde $\boldsymbol{\lambda}$ (en m) : C'est une période spatiale = distance parcourue par l'onde électromagnétique pendant T à la vitesse $c = \lambda/\text{T}$

I.8 Grandeurs énergétiques pour les OEM

La combinaison des équations de Maxwell dans un milieu matériel quelconque donne l'équation bilan de la puissance :

$$\frac{\delta W_{em}}{\delta t} c = \oiint_S \vec{S}\,\overrightarrow{ds} + \iiint \vec{J}\,\vec{E}\,d\tau$$

$\frac{\delta W_{em}}{\delta t}$ variation de l'énergie électromagnétique dans le temps , $\vec{S}$ vecteur de poynting en W/m^2, $\overrightarrow{ds}$ élément de surface. $\iiint \vec{J}\,\vec{E}\,d\tau$ puissance dissipée par effet Joule : exprime l'interaction onde-matière $\vec{J}$ est la densité de courant produite par les charges du milieu.

Par définition : $\vec{S} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu}$. Valable quel que soit le type d'OEM et quel que soit le milieu de propagation.

I représente la valeur moyenne sur une période T du module du vecteur de Poynting :

$$I = < S >_T = \frac{1}{T}\int_0^T S(M,t)dt$$

I.9 Propagation d'OEM dans un milieu matériel

- Vide : milieu non dispersif : toutes les fréquences se propagent à la même vitesse max : c = 3.10 $m/s2$

- Matériel : milieu dispersif : toutes les fréquences ne se propagent pas à la même vitesse, en effet : $v = f(w)$, $w = 2\pi f$

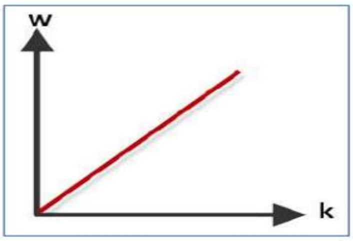


Fig. 7 Milieu non dispersif : $\omega = kc$
(relation linéaire entre ω et k)

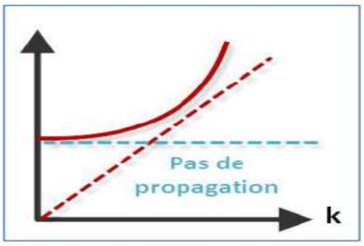


Fig. 8 Milieu dispersif :
ω n'est pas linéaire avec k

I.10 Equation de dispersion

Elle renseigne sur comment l'onde va être dispersée dans le milieu. Elle est obtenue à partir de la combinaison des quatre équations de Maxwell (écrites dans le milieu matériel neutre et en notation complexe) : $K^2 = \frac{w}{c}(1 + \frac{ij}{\varepsilon_0 w})$. Il y a 3 types de comportements :

✓ $k^2 > 0$ => k réel : onde progressive.

✓ $k^2 < 0$ => k imaginaire : onde atténuée ou onde évanescente.

✓ k^2 complexe => k complexe : onde amortie.

Exercices et solutions

Exercice 1 :

Propagation d'une onde électromagnétique plane dans le vide.

On considère une onde électromagnétique plane, progressive et sinusoïdale de pulsation w , se propageant dans le vide (caractérisé par la constante de la loi de Coulombε_o , la perméabilité magnétique du videμ_o et la célérité $c = 1/\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}$). L'espace est rapporté à un repère cartésien Oxyz de base orthonormée. L'onde se propage dans la direction oy. Le vecteur champ électrique $\vec{E} = E_o cos(wt - \vec{k}\vec{r})\overrightarrow{u_x}$ d'amplitudeE_o est parallèle à ox.

1. Écrire, en notation réelle, les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ puis celles du vecteur champ électrique$\vec{E}$ au point M de coordonnées (x,y,z) tel que $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et à l'instant t .
2. En utilisant les équations de Maxwell dans le vide (voir boîte à outils), établir l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans le vide. En déduire la relation de dispersion de cette onde dans le vide.
3. En utilisant les équations de Maxwell dans le vide (voir boîte à outils), exprimer les composantes du vecteur champ magnétique de l'ond $\vec{B}$ au point M . Préciser en particulier l'expression de l'amplitudeB_o du champ magnétique.

Solution :

1. L'onde se propage suivant Oy , alors : $\vec{k} = \begin{Bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \end{Bmatrix}$

En considérant l'onde se propageant dans le sens des y croissants et$\vec{E}$ étant orienté suivant Ox , on a :

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} E_o \cos(wt - ky) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2. Les équations de Maxwell donnent : $r\vec{o}t(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $r\vec{o}t(\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

En supposant que les dérivations par rapport à l'espace et t commutent : $r\vec{o}t\left(-\overrightarrow{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} r\vec{o}t(\vec{B})$

il vient alors $r\vec{o}t\left(r\vec{o}t(\vec{E})\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$, d'où : $g\vec{r}ad(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Or, $div\vec{E} = 0$ (équation de Maxwell) et $\vec{E}$ étant orienté suivant Ox , on obtient :

$$-\Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Vérifions qu'une solution réelle de cette équation d'onde est de la forme :

$E_x(y, t) = E_o \cos(wt - ky)$

En dérivant deux fois par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\omega^2 E_o \cos(wt - ky) = -\omega^2 E_x(y, t)$$

et en dérivant deux fois par rapport à y :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -k^2 E_o \cos(wt - ky) = -k^2 E_x(y,t)$$

En remplaçant dans l'équation d'onde, il vient :

$$-k^2 E_x(y,t) = -\frac{1}{c^2}\omega^2 E_x(y,t) \longrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Alors, $E_x(y,t) = E_o \cos(wt - ky)$ est solution de l'équation d'onde à la condition que$k = \pm\frac{\omega}{c}$: c'est la relation de dispersion. Ici, l'onde se propage seulement dans le sens des y croissants. Le terme de propagation $-ky$ de la phase $(wt - ky)$traduit alors forcement un retard (on récupère l'onde forcement après qu'elle ait été émise puisque qu'elle parcourt le chemin entre la source et le récepteur à vitesse non infinie). $-ky$ doit donc être négatif, soit > 0 . Dans ce cas, la condition devient unique : $k = \frac{\omega}{c}$.

3. Sachant que la seule composante non nulle de$\vec{E}$ est $E_x(y,t) = E_o \cos(wt - ky)$, on a :

$$r\vec{o}t(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Avec $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} \end{pmatrix}$

Et $r\vec{o}t(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (équation de Maxwell), il vient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} .$$

$\vec{B}$ n'a alors qu'une composante non nulle suivant Oz telle que : $\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = k\, E_o \sin(\omega t - ky)$

En intégrant par rapport à t : $B_z = -\frac{k\, E_o}{\omega}\cos(\omega t - ky) + K$. En l'absence de champ statique, la constante d'intégration K=0, d'où :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\,B_o \cos(\omega t - ky) \end{pmatrix} \text{avec } B_o = \frac{k\, E_o}{\omega}$$

Exercice 2 :

On prend l'exercice 1 :

1. Représenter sur un schéma clair les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$. L'onde électromagnétique étudiée est-elle longitudinale ou transversale? Justifier votre réponse.
2. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique U. Exprimer sa valeur moyenne temporelle $< U >$en fonction de E_o etε_o .
3. Déterminer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu}$ puis son module S et enfin sa valeur moyenne temporelle $< S >$en fonction deE_o , ε_o et c. Quelle relation existe-t-il entre les valeurs moyennes de U et S ?
4. Cette onde transporte une puissance électromagnétique moyenne $< P >$ de 0,5 kW, évaluée à travers une surface $\sum$=5 mm^2 normale à la direction de propagation. Calculer les valeurs numériques deE_o et B_o ?

On prendra : $\varepsilon_o = 1/36\pi 10^9 \; F\, m^{-1}$ et $\mu_o = 4\pi 10^{-7} H\, m^{-1}$.

Solution :

1. On a $\vec{E} = E_x \overrightarrow{u_x}$, $\vec{B} = -B_z \overrightarrow{u_z}$ et $\vec{k} = k\overrightarrow{u_y}$. Le repère étant orthonormé($(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}) = (\overrightarrow{u_x}, -\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_y})(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}) = (\overrightarrow{u_x}, -\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_y})$ est un trièdre direct. Alors $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est un trièdre direct (voir la figure).

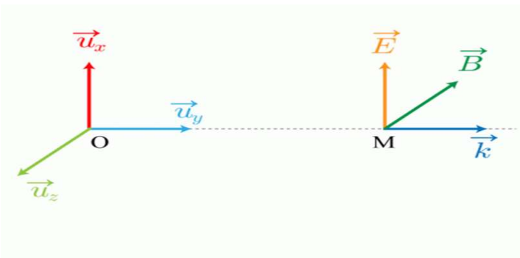


Fig.7 schéma représentant les vecteurs E , B et k dans le repère orthonormé

On a$(\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k})$: c'est une onde transversale.

2. Dans le vide :
   - la densité volumique d'énergie électrostatique $U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o(\vec{E})^2$
   - la densité volumique d'énergie magnétostatique$U_m = \frac{1}{2\mu_o}(\vec{B})^2$

Avec les résultats des questions 1) et 3) et $U = U_e + U_m$, il vient : $U = \varepsilon_o {E_o}^2 \cos^2(\omega t - ky) + \frac{1}{2\mu_o} {B_o}^2 \cos^2(\omega t - ky)$.

Avec $B_o = \frac{E_o}{c}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$, on a$\frac{1}{\mu_o} {B_o}^2 = \varepsilon_o {E_o}^2$, d'où : $U = \varepsilon_o {E_o}^2 \cos^2(\omega t - ky)$

$< U >= \varepsilon_o {E_o}^2 < \cos^2(\omega t - ky) >$. Or, $\cos^2 \omega t$ est une fonction périodique du temps variant entre 0 et 1, donc : $< \cos^2(\omega t - ky) > = \frac{1}{2}$.

Alors $< U >= \frac{1}{2}\varepsilon_o {E_o}^2$. C'est une constante dépendant de l'amplitude du champ.

3. Avec les résultats des questions 1) et 3), il vient : $\vec{S} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_o} = -\frac{{E_o}^2}{c\mu_o}\cos^2(\omega t - ky)(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_z})$

D'où $\vec{S} = \frac{{E_o}^2}{c\mu_o}\cos^2(\omega t - ky)\overrightarrow{u_y}$, on obtient :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_o c {E_o}^2 \cos^2(\omega t - ky) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : la norme du vecteur de Poynting est une puissance par unité de surface et est donc reliée à l'intensité de l'onde.

$< S >= \varepsilon_o c {E_o}^2 < \cos^2(\omega t - ky) >$. Or, $\cos^2(\omega t)$ est une fonction périodique du temps variant entre 0 et 1, donc : $< \cos^2(\omega t) >= \frac{1}{2}$.

Alors : $< S >= \frac{1}{2}\varepsilon_o c {E_o}^2 = c \ < U >$

Remarque :

l'énergie électromagnétique se déplace à la vitesse de la lumière le long de la coordonnée de propagation y .

4. La puissance électromagnétique à travers une surface $\sum$ est donnée par : $P = \iint \vec{S}\, d\vec{\sum}$. $\sum$ étant normale à la direction de propagation, sa normale est orientée selon $\overrightarrow{u_y}$ comme $\vec{S}$, d'où : $P = \iint \vec{S}\, d\vec{\sum}$. Alors la puissance moyenne s'écrit : $< P >= \iint < \vec{S}\, d\vec{\sum} >= \iint < S > \ d\sum \quad =< S > \iint d\sum \quad =< S > \sum$, d'où : $< P >= \frac{1}{2}\varepsilon_o c {E_o}^2 \sum$

Alors, $E_o = \sqrt{\frac{2<P>}{\varepsilon_o c \sum}}$ et $B_o = \frac{E_o}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2<P>}{\varepsilon_o c \sum}}$

A.N. : $E_o = 2{,}75\ V\ m^{-1}$ et $B_o = 0{,}92\ 10^{-3}\ T$