Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie (FST)
Département d'électrotechnique

Année académique : 2022/2023

Niveau L2: 2^{ieme} année/ELM-ELT
Module : Ondes et vibrations
Série N°01 :

Exercice 01 :

Calculer l'amplitude A et la phase ϕ pour les sommes suivantes :

a) $3.2 \times \sin(\omega t) + \cos(\omega t)$

b) $3\sin(\omega t) + 4\cos(\omega t)$

c) $11.5 \times \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) - 8\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 02 :

Déterminer l'amplitude A et la phase ϕ du mouvement vibratoire G résultant de la composition de quatre (4) mouvements vibratoires de même pulsation ω.

$$G = A_0[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \cos(\omega t + 3\varphi)]$$

Exercice 03 :

Soit les trois mouvements sinusoïdaux suivants ayant la même pulsation Ω:

$$X_1(t) = a_1\cos(\Omega t + \Phi_1) \quad , \quad X_2(t) = a_2\cos(\Omega t + \Phi_2) \quad , \quad X_3(t) = a_3\cos(\Omega t + \Phi_3).$$

1. En utilisant la représentation complexe montrer que la superposition $X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)$ est de la forme $A\cos(\Omega t + \Phi)$.

2. Déduire l'amplitude A et la phase Φ de la superposition.

3. *Application*: Trouver la superposition des mouvements suivants:

$$X_1(t) = 3\cos\Omega t \quad , \quad X_2(t) = 4\sin\Omega t \quad , \quad X_3(t) = 2\cos(\Omega t + 30°).$$

Exercice 04 :

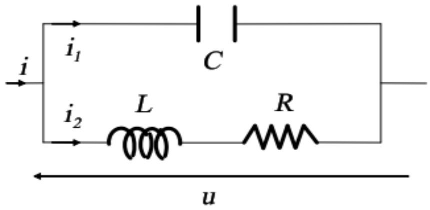
Soit le circuit ci-contre dans lequel $i(t) = I_0\cos\omega t$.

1. Trouver les courants complexes $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$ en fonction de $\underline{u}$.

2. Déduire l'impédance complexe $\underline{Z} = \underline{u}/\underline{i}$ du circuit.

3. Trouver la relation entre L, C, ω pour que le module de l'impédance complexe $\underline{Z}$ soit indépendant de R.

4. Trouver dans ce cas la valeur de R pour laquelle $\underline{Z}$ devient réelle.



Solution 01 :

a) $3.2 \times \sin(\omega t) + \cos(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$= A\cos(\omega t)\cos(\varphi) - A\sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

$$\begin{matrix}(1) \dots \dots \dots \\ (2) \dots \dots \dots\end{matrix}\begin{cases} A\cos(\varphi) = 1 \\ -A\sin(\varphi) = 3.2 \end{cases} \Rightarrow tg(\varphi) = -3.2 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = -72.64^\circ}$$

Si on élève au carré l'expression (1) et (2) et après sommation on obtient :

$$A^2 = (3.2)^2 + 1^2$$

$$A = \sqrt{(3.2)^2 + 1} \Rightarrow \boldsymbol{A = 3.35}$$

b) $3\sin(\omega t) + 4\cos(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$= A\cos(\omega t)\cos(\varphi) - A\sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

$$\begin{cases} A\cos(\varphi) = 4 \\ -A\sin(\varphi) = 3 \end{cases} \Rightarrow tg(\varphi) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = -36.86^\circ}$$

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \boldsymbol{A = 5}$$

Solution 02 :

$$G = A_0[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \cos(\omega t + 3\varphi)] = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$Ae^{j(\omega t+\phi)} = A_0\left[e^{j\omega t} + e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+2\varphi)} + e^{j(\omega t+3\varphi)}\right]$$

$$Ae^{j\phi} = A_0\left[1 + e^{j(\varphi)} + e^{j(2\varphi)} + e^{j(3\varphi)}\right]$$

$$Ae^{j\phi} = A_0 e^{j\frac{3\varphi}{2}}\left[e^{-j\frac{3\varphi}{2}} + e^{-j\frac{\varphi}{2}} + e^{j\frac{\varphi}{2}} + e^{j\frac{3\varphi}{2}}\right]$$

$$Ae^{j\phi} = A_0 e^{j\frac{3\varphi}{2}}\left[2\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + 2\cos(\frac{\varphi}{2})\right]$$

$$Ae^{j\phi} = 2A_0\left[\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + \cos(\frac{\varphi}{2})\right]e^{j\frac{3\varphi}{2}}$$

Par analogie on obtient : $\begin{cases} A = 2A_0\left[\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + \cos(\frac{\varphi}{2})\right] \\ \phi = \frac{3\varphi}{2} \end{cases}$

Solution 03 :

1. La superposition est: $X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)$. Pour trouver la pulsation de ce mouvement, utilisons la représentation complexe:

$X_1(t) = a_1\cos(\Omega t + \Phi_1) \longrightarrow \underline{X}_1(t) = a_1 e^{j(\Omega t+\Phi_1)}$.
$X_2(t) = a_2\cos(\Omega t + \Phi_2) \longrightarrow \underline{X}_2(t) = a_2 e^{j(\Omega t+\Phi_2)}$.
$X_3(t) = a_3\cos(\Omega t + \Phi_3) \longrightarrow \underline{X}_3(t) = a_3 e^{j(\Omega t+\Phi_3)}$.
$\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = a_1 e^{j(\Omega t+\Phi_1)} + a_2 e^{j(\Omega t+\Phi_2)} + a_3 e^{j(\Omega t+\Phi_3)} = (a_1 e^{j\Phi_1} + a_2 e^{j\Phi_2} + a_3 e^{j\Phi_3})e^{j\Omega t}$.

Puisque $a_1 e^{j\Phi_1} + a_2 e^{j\Phi_2} + a_3 e^{j\Phi_3}$ est un nombre complexe constant, il est de la forme $Ae^{j\Phi}$.
Donc, $\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\Omega t} = Ae^{j(\Omega t+\Phi)}$.
En revenant à la représentation réelle:
$\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = Ae^{j(\Omega t+\Phi)} \longrightarrow X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) = A\cos(\Omega t+\Phi)$.
La pulsation du mouvement résultant est Ω.

2. L'amplitude A est le module du nombre complexe:

$$A = |\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t)| = \sqrt{(a_1 e^{j\Phi_1} + a_2 e^{j\Phi_2} + a_3 e^{j\Phi_3})(a_1 e^{-j\Phi_1} + a_2 e^{-j\Phi_2} + a_3 e^{-j\Phi_3})}$$
$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) + 2a_1 a_3 \cos(\Phi_1 - \Phi_3) + 2a_2 a_3 \cos(\Phi_2 - \Phi_3)}.$$

Puisque

$$\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = a_1 \cos\Phi_1 + a_2 \cos\Phi_2 + a_3 \cos\Phi_3 + j(a_1 \sin\Phi_1 + a_2 \sin\Phi_2 + a_3 \sin\Phi_3),$$

la phase Φ du mouvement est donnée par:

$$\tan\Phi = \frac{\mathrm{Im}[\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t)]}{\mathrm{Re}[\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t)]} = \frac{a_1 \sin\Phi_1 + a_2 \sin\Phi_2 + a_3 \sin\Phi_3}{a_1 \cos\Phi_1 + a_2 \cos\Phi_2 + a_3 \cos\Phi_3}.$$

3. *Application*:

$$\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = 3\cos\Omega t + 4\cos(\Omega t - 90°) + 2\cos(\Omega t + 30°) = A\cos(\Omega t + \Phi).$$

D'après la question (**2**) $A = \sqrt{9 + 16 + 4 + 24\cos(90°) + 12\cos(30°) + 16\cos(120°)} \approx 5{,}6$.

$$\tan\Phi = \frac{3\sin 0 + 4\sin(-90°) + 2\sin 30°}{3\cos 0 + 4\cos(-90°) + 2\cos 30°} = -0{,}63 \Longrightarrow \Phi \approx -32{,}2°.$$

Solution 04 :

1. Utilisons la représentation complexe suivante:

$$i(t) = I_0 \cos\omega t \longrightarrow \underline{i}(t) = I_0 e^{j\omega t},$$
$$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{i}_1(t) = I_1 e^{j(\omega t + \phi_1)} = \underline{I}_1 e^{j\omega t},$$
$$i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{i}_2(t) = I_2 e^{j(\omega t + \phi_2)} = \underline{I}_2 e^{j\omega t}.$$

Nous avons: $\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_C \\ \underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{u} = \dfrac{1}{\mathrm{C}} \displaystyle\int \underline{i}_1 \mathrm{dt} = \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega} \underline{i}_1 \\ \underline{u} = \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}\underline{i}_2}{\mathrm{dt}} + \mathrm{R}\underline{i}_2 = (j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R})\,\underline{i}_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{i}_1 = j\mathrm{C}\omega\underline{u} \\ \underline{i}_2 = \dfrac{\underline{u}}{j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R}} \end{cases}$

2. L'impédance complexe du circuit est donc

$$\underline{\mathcal{Z}} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}_1 + \underline{i}_2} = \frac{\underline{u}}{j\mathrm{C}\omega\underline{u} + \dfrac{\underline{u}}{j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R}}} = \frac{1}{j\mathrm{C}\omega + \dfrac{1}{j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R}}} = \frac{\mathrm{R} + j\mathrm{L}\omega}{1 - \mathrm{LC}\omega^2 + j\mathrm{RC}\omega}.$$

Son module est $|\underline{\mathcal{Z}}| = \dfrac{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2\omega^2}}{\sqrt{(1 - \mathrm{LC}\omega^2)^2 + \mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}}$.

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie (FST)
Département d'électrotechnique

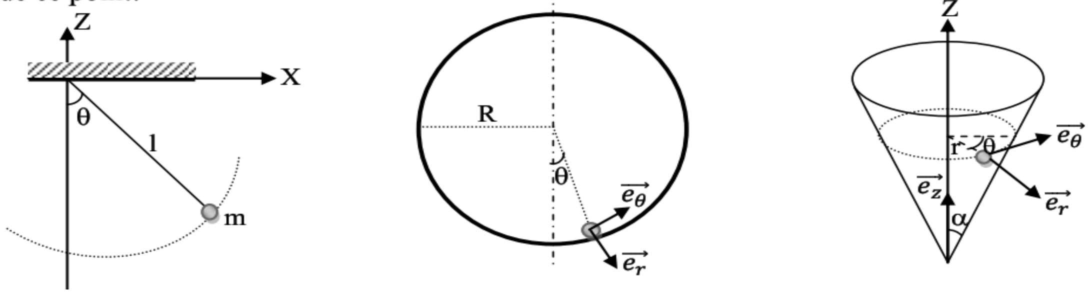
Année académique : 2022/2023

Niveau L2: 2^{ieme} année/ELM-ELT
Module : Ondes et vibrations
Série N°02

Exercice 01 :

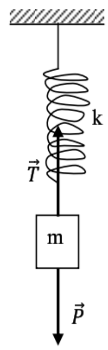
1- Quel est le nombre de degré de liberté du point matériel dans chaque système .

2- Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour définir le mouvement de ce point.



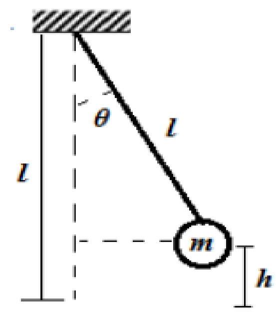
Exercice 02 :

Soit le système mécanique de la figure I-4, constitué d'une masse m et un ressort de raideur équivalente k. Trouver l'équation différentielle du mouvement par la méthode de Newton et la méthode de Lagrange.



Exercice 03:

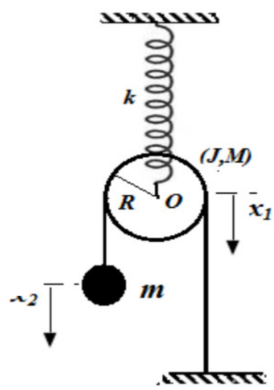
Soit le pendule de la figure ci-contre ; calculer la pulsation des petites pulsations à l'aide du formalisme de Lagrange :



Exercice 04:

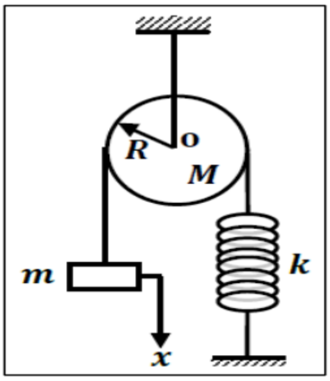
Une poulie de masse M, de moment d'inertie J, et de rayon R, suspendue au point O par un ressort de raideur k. Le fil inextensible glisse sur la poulie sans frottement relié par une masse m (voir figure 1.13.)

- Déterminer le nombre de degré de liberté
- Etablir l'énergie cinétique et l'énergie potentielle
- En déduire le Lagrangien du système
- Etablir l'équation différentielle du système par le principe de Lagrange



Exercice 05:

Dans la figure ci-contre, M et R représentent respectivement la masse et le rayon d'une poulie homogène de moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}\boldsymbol{MR^2}$. A la poulie sont fixés un ressort de raideur k et un corps de masse m par un fil non élastique de masse négligeable. On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie. Si x est le déplacement vertical de la masse m. Trouvez l'équation du mouvement et la pulsation propre du système.

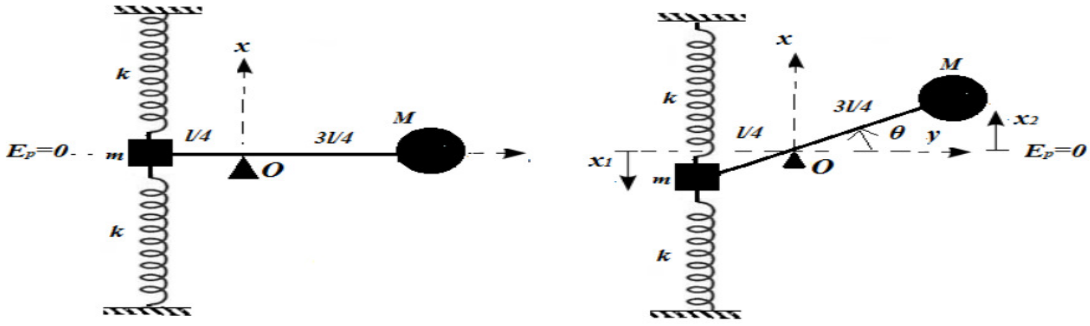


Exercice 06:

Le **fléau** est **un instrument agricole utilise pour le battage des céréales**. On modélise le système par une tige métallique de masse négligeable, de longueur l portant deux masses m et M, tournant sans frottement autour de son axe au point fixe O comme le montre la figure 14.2. A l'équilibre la barre est horizontale.

Déterminer dans le cas des petites oscillations:

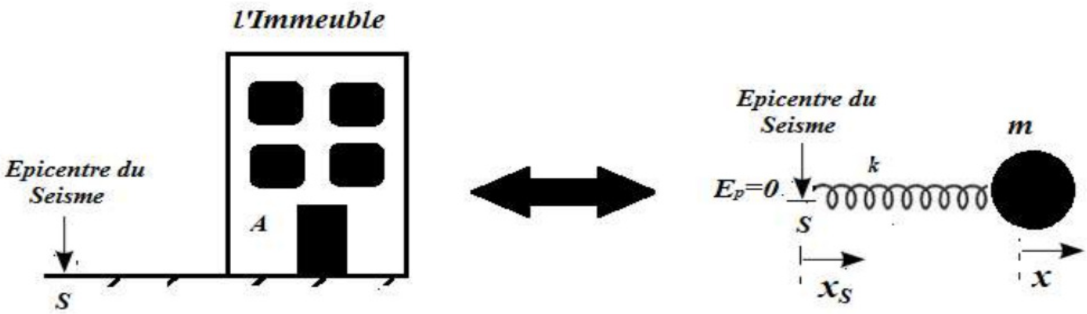
- Le Lagrangien du système
- L'équation différentielle du mouvement,
- La pulsation propre et la période propre.



En équilibre $\theta=0$ *En mouvement*

Exercice 07:

Soit un immeuble A modélisé par le système physique représenté par une masse m et un ressort de raideur k subit à un mouvement sismique sinusoïdal d'amplitude A de la forme $x_s = A\cos\omega t$ représenté dans la figure 9.4 comme suit:



- Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.
- En déduire le Lagrangien du système.
- Etablir l'équation différentielle du système
- Quelle est dans ce cas la réponse du système. Justifier le résultat.

Solution 1 :

Le système (a) :

1- Le point m est défini par :

$$\begin{cases} x = lsin\theta \\ z = lcos\theta \end{cases} \Rightarrow \text{N=2}$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + z^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{x^2 + z^2} = C^{te} \quad \Rightarrow \text{R=1}$$

2- La coordonnée généralisée qui définie le système est : θ

Le système (b) :

1- Le point M est défini par : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{e_r} = Rcos\theta\overrightarrow{e_x} - Rsin\theta\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{e_\theta} = Rsin\theta\overrightarrow{e_x} + Rcos\theta\overrightarrow{e_y}$

Et par conséquent :

$$\begin{cases} x = rsin\theta \\ y = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow \text{N=2}$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} = C^{te} \quad \Rightarrow \text{R=1}$$

Et le nombre de degré de liberté est : d=2-1=**1**

Le système (c) :

1- Le point M est défini par :

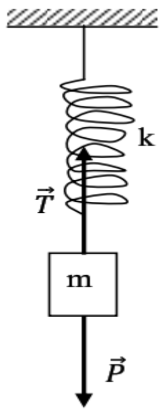
$$\begin{cases} x = rsin\theta \\ y = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow \text{N=2}$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} = C^{te} \quad \Rightarrow \text{R=1}$$

Et le nombre de degré de liberté est : d=2-1=**1**

Solution 2:



a- Méthode de Newton

à l'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$\vec{T}$: la force de rappel du ressort

$\vec{P}$: le poids de la masse m

...libre

Au mouvement : $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = mg - k(x + x_0)$$

En appliquant la condition d'équilibre, l'équation devienne :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Avec : ω_0 est la pulsation libre est égale : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b- Méthode de Lagrange

L'équation de Lagrange est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Le lagrangien est donné par : $L = E_c - E_p$

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

Et

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

En utilisant l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

L'équation différentielle de mouvement est comme suit :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

solution 3:

$$L = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} I_{/D}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2$$

$$U_{mas} = +mgh = +mg(l - l\cos\theta) = +mgl(1 - \cos\theta)$$

Dans le cas des petites pulsations :

$$\begin{cases} \text{Sin}\,\theta \approx \theta \\ \text{Cos}\,\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$$

$$U_{mas} = +mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\frac{\theta^2}{2}$$

Formule de Lagrange : $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ avec : $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$; $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[ml^2\dot{\theta}\right] + mgl\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \varpi = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Solution 4 :

La figure 1.13-a représente l'état d'équilibre du système et la figure 1.14-b représente l'état du système en mouvement.

Les paramètres, (X_{01}, X_{02}) et (X_1, X_2) représentent respectivement les positions des masses M et m en état d'équilibre et en mouvement.

- Le nombre de degré de liberté :

La longueur du fil l est la même en mouvement et en équilibre tel que:

En équilibre :

$$l = D - X_{01} + \pi R + (X_{02} - X_{01})$$

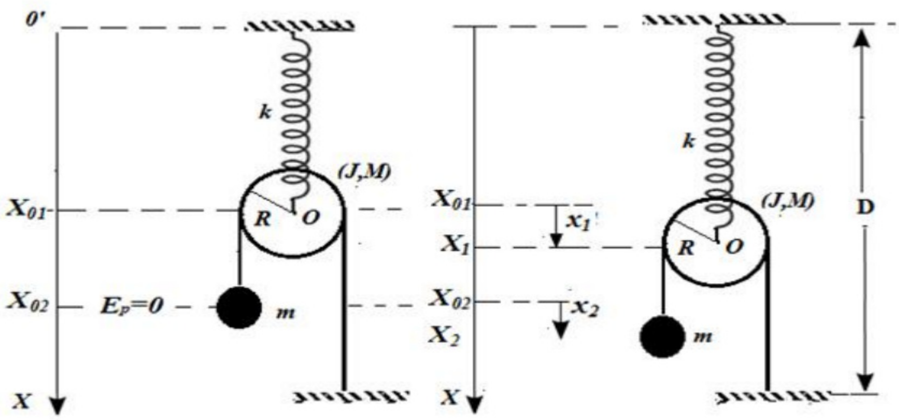
En mouvement :

$$l = D - X_1 + \pi R + (X_2 - X_1)$$

Apres l'égalité des deux équations, on obtient :

$$x_2 = 2x_1 \Rightarrow \quad x_1 , x_2 \text{ sont } \quad \text{dépendants}$$

Le nombre de degré de liberté est alors égal à 1 qui est représenté par $\boldsymbol{x_1}$.



En équilibre $\boldsymbol{E_P=0}$ **En mouvement**

- Pour l'énergie potentielle:

$$E_p = \frac{1}{2} k x_1^2$$

- Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} (M + 2m + \frac{J}{R^2}) \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

- L'équation différentielle s'exprime comme suit:

$$\frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 + (\frac{k}{M + 4m + \frac{J}{R^2}}) x_1 = 0$$

D'où l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x}_1 + (\frac{k}{M + 4m + \frac{J}{R^2}}) x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$$

Solution 5 :

- Le Lagrangien :

  On a les déplacements infinitésimaux comme suit :

$$x_1 = \frac{1}{4}\theta, x_2 = \frac{3l}{4}\theta \Rightarrow \quad x_1, x_2 \quad sont \quad dépandants$$

  On a donc un seul degré de liberté représenté par ***θ(t)***.

  ✓ L'énergie cinétique s'exprime :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m(\frac{1}{4}l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M(\frac{3}{4}l\dot{\theta})^2 \text{ avec } \quad x_1 = \frac{1}{4}\theta, x_2 = \frac{3l}{4}\theta$$

  ✓ L'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\frac{1}{4}\theta)^2 + \frac{1}{2}k(-\frac{1}{4}\theta)^2$$

  ✓ Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m(\frac{1}{4}l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M(\frac{3}{4}l\dot{\theta})^2 - k(\frac{1}{4}\theta)^2$$

  D'où :

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\frac{l^2}{16}\dot{\theta}^2(9M+m) - k(\frac{1}{4}\theta)^2$$

- L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2k}{m+9M}\theta = 0$$

- Respectivement, la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 sont de la forme :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m+9M} \qquad et \quad T_O = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m+9M}}}$$

- La solution générale est de la forme:

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Solution 6 :

- Le Lagrangien du système :
  - ✓ L'énergie cinétique s'écrit:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

  - ✓ L'énergie potentielle s'exprime:

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

  - ✓ Le Lagrangien du système s'écrit alors :

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

  - ✓ L'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum \overline{F}_{ext} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{A}{m}\cos\omega t$$

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2 x(t) == R_e\left\{\frac{A}{m}e^{j\omega t}\right\}$$

avec

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

- ✓ La solution de cette équation est de la forme :

$$x(t)=x_p(t)=X_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$$

En remplaçant dans l'équation de mouvement, on détermine l'amplitude de la réponse comme suit :

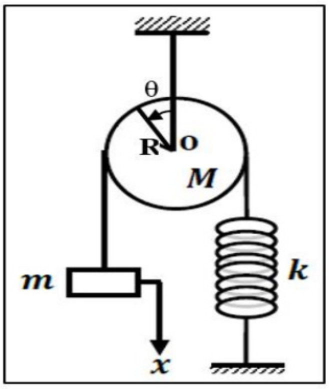
$$X_0(\omega)=\frac{\frac{a}{m}}{\left|\omega^2-\omega_0^2\right|}$$

Le système présente une singularité au point $\omega=\omega_0$ comme le montre la figure (4.10):

$$X_0(\omega)\to\infty \quad lorsque \quad \omega\to\omega_0$$

- ✓ L'immeuble va s'effondrer face au séisme car le système oscille à sa pulsation propre. On appelle ce phénomène la résonance. On se propose dans ce cas-là de mettre en place un moyen d'amortir les oscillations extérieures du système qui se traduit par une force de frottement visqueuse.
- ✓ Un exemple d'application est illustré dans la figure 4.11

Solution 7 :



Une poulie homogène $J_{/O}=\frac{1}{2}MR^2$

Ecriture de l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0 du système :

- Energie cinétique : $T=T_M+T_m$

$T=\frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ <u>Avec :</u> $x=R\theta$

$$T=\frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(\frac{M}{2}+m)R^2\dot{\theta}^2$$

$$T=\frac{1}{2}(\frac{M}{2}+m)R^2\dot{\theta}^2$$

- Energie potentielle : $U=\frac{1}{2}k(R\theta)^2$
- Fonction de Lagrange : $L=T-U$

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k(R\theta)^2$$

- Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\dot{\theta}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-k(R)(R\theta)$$

Donc : $\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\ddot{\theta}+kR^2\theta=0\Rightarrow\left(\frac{M}{2}+m\right)\ddot{\theta}+k\dot{\theta}=0$

- Pulsation propre ω_0 :

$\ddot{\theta}+\frac{2k}{(M+2m)}\dot{\theta}=0\Rightarrow{\omega_0}^2=\frac{2k}{(M+2m)}$ Et donc : $\omega_0=\sqrt{\frac{2k}{(M+2m)}}$

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie (FST)
Département d'électrotechnique

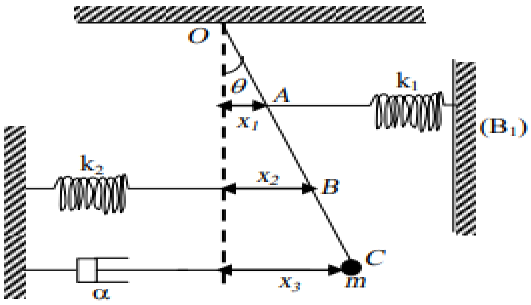
Année académique : 2022/2023

Niveau L2: 2^{ieme} année/ELM-ELT
Module : Ondes et vibrations
Série N°03

Exercice 1 :

Une masse m est soudée à l'extrémité d'une tige de longueur l et de masse négligeable L'autre extrémité du fil est articulée au point O. La tige est liée au point A à un Bâti (B_1) par un ressort de raideur k_1. Au point B, la tige est reliée à un Bâti (B_2) par un ressort de raideur k_2. La masse m est liée au Bâti (B_2) par un amortisseur de coefficient de frottement α. $OA=l/3$ et $OB=2l/3$.

1- Trouver l'équation différentielle du mouvement.
2- Déterminer la solution de l'équation différentielle dans le cas d'un faible amortissement, le coefficient d'amortissement, la pulsation propre et la pseudo-pulsation.



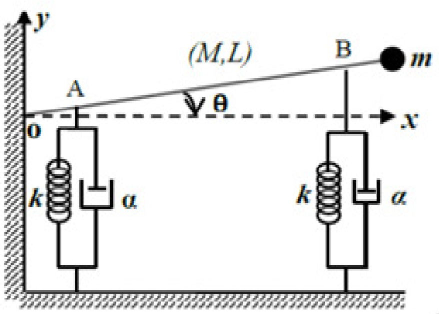
Exercice 2:

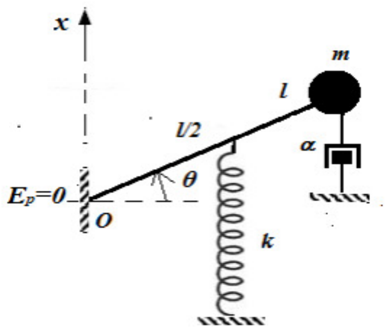
Soit le système mécanique vibratoire représenté sur la figure ci-contre.

Si G est le centre de gravité de la barre de masse M et de longueur L.

- Trouver l'équation différentielle du mouvement. Déduire ω_0 et δ.
- Ecrire l'équation du mouvement dans le cas $\delta < \omega_0$.

$(J_{/G} = \frac{1}{12}ML^2, OA = L_1, OB = L_2)$.





Exercice 3 :

On considère un système mécanique amorti oscillant autour d'un axe passant par O représenté par une tige métallique de longueur l de masse négligeable reliée par un ressort de constante de raideur k au point $l/2$ comme le montre la figure

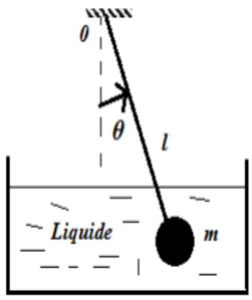
A l'équilibre la barre est horizontale. Dans le cas des petites oscillations :

- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
- En déduire la pulsation propre du système.
- Résoudre dans le cas de faible amortissement l'équation différentielle du mouvement avec les conditions initiales suivantes :

$$\theta(t=0)=0, \dot{\theta}(t=0)=\dot{\theta}_0$$

Exercice 4 :

Soit une boule de masse *m* suspendue à une tige de longueur *l*, de masse négligeable et plongée dans un liquide. Cette masse est soumise à une force de frottement visqueuse dont le coefficient de frottement est α, comme le montre la figure



- Etablir le Lagrangien du système.
- Déterminer l'équation du mouvement.
- Résoudre dans le cas de faible amortissement l'équation différentielle.

- ***Application numérique*** :

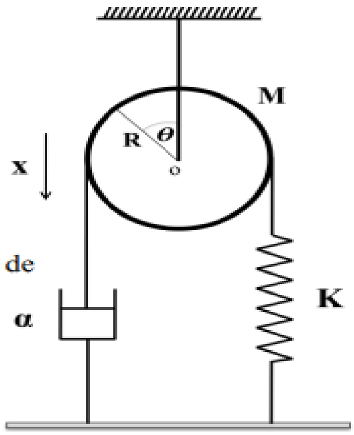
  Sachant on a*: m=1Kg, l=50cm, g=10m/s*. Calculer la valeur maximale que α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

- On prend la valeur de α égale à *10N.s/m* :

  Calculer le temps nécessaire τ pour que l'amplitude diminue à ¼ de sa valeur.

Exercice 4 :

Soit une poulie (cylindre creux) de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. La poulie est suspendue par une corde inextensible a un bâti fixe. Aux Extrémités de la poulie sont fixés un ressort de raideur K, et une masse M par un fil inextensible de masse négligeable. On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie. On donne le moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.



Valeurs numériques :

$M = 1kg, K = 50\ N/m,\ R = 0.2\ m, \alpha = 1\ kg/s.$

1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p et l'énergie de dissipation E_D.

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

3- Donner la solution dans le régime des faibles amortissements ($\delta < \omega_0$**).**

4- Calculer le coefficient de qualité du système mécanique Q.

Solution 1 :

1- L'équation différentielle du mouvement :

Le Lagrangien : $L=E_c-E_p$

$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$ avec : $x_3 = l\sin\theta \approx l\theta \Rightarrow \dot{x}_3 = l\dot{\theta} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

$E_p = E_{p1} + E_{p2}$

E_{p1} est l'énergie potentielle du ressort de raideur k_1. E_{p2} est celle du ressort k_2.

$E_{p1} = \frac{1}{2}k_1x_1^2$ avec $x_1 = \frac{l}{3}\theta \Rightarrow E_{p1} = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2\theta^2$

$E_{p2} = \frac{1}{2}k_2x_2^2$ avec $x_2 = \frac{2l}{3}\theta \Rightarrow E_{p2} = \frac{1}{2}k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2\theta^2$

$E_p = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2\theta^2$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2\theta^2$$

L'équation de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -\left(\frac{k_1l^2}{9} + \frac{4k_2l^2}{9}\right)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha l^2\dot{\theta}$$

En remplaçant terme par terme dans 'équation de Lagrange, on obtient :

$$ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + \left(\frac{k_1l^2}{9} + \frac{4k_2l^2}{9}\right)\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{k_1}{9m} + \frac{4k_2}{9m}\right)\theta = 0$$

2- Pour les faibles amortissements,

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t}\cos(w_Dt + \varphi)$$

Par analogie avec :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$$

La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{9m}}$$

Le coefficient d'amortissement :

$$\delta = \frac{\alpha}{2m}$$

La pseudo pulsation :

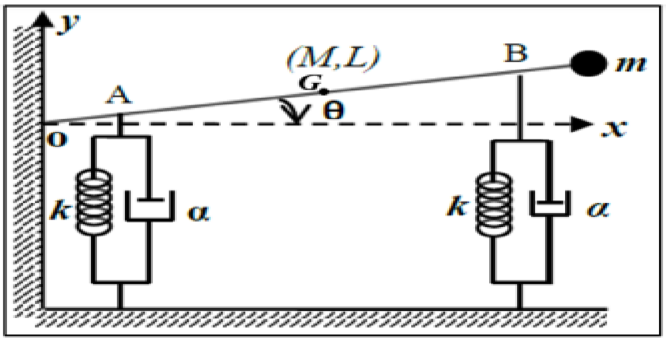
$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{1}{6m}\sqrt{4(k_1 + 4k_2) - 9\alpha^2}$$

Solution 2 :

$J_{/G} = \frac{1}{12} ML^2$

$OA = L_1$

$OB = L_2$



1. **Ecriture de l'équation différentielle du mouvement :**

- Coordonnées et composantes de vitesse :

$$M \begin{cases} Lcos\theta \\ Lsin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -L\dot{\theta}sin\theta \\ +L\dot{\theta}cos\theta \end{cases}$$

- Energie cinétique : $T = T_M + T_m$

$T = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$, sachant que : $J_{/O} = J_{/G} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$$J_{/O} = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}ML^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2$$

- Energie potentille : $U = U_{k_1} + U_{k_2}$

$$U = \frac{1}{2}k(L_1 sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k(L_2 sin\theta)^2$$

- Fonction de dissipation : $D = D_{\alpha_A} + D_{\alpha_B}$

$$D = \frac{1}{2}\alpha(L_1\dot{\theta}cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\alpha(L_2\dot{\theta}cos\theta)^2$$

- La fonction de Lagrange : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(L_1 sin\theta)^2 - \frac{1}{2}k(L_2 sin\theta)^2$$

- Le formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k(L_1 cos\theta)(L_1 sin\theta) - k(L_2 cos\theta)(L_2 sin\theta)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha(L_1 cos\theta)(L_1\dot{\theta}cos\theta) + \alpha(L_2 cos\theta)(L_2\dot{\theta}cos\theta)$$

L'équation différentielle s'écrit comme suit pour des oscillations de faibles amplitude ($sin\theta \approx \theta, cos\theta \approx 1$).

$$\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\ddot{\theta} + ({L_1}^2 + {L_2}^2)k\theta = -\alpha({L_1}^2 + {L_2}^2)\dot{\theta}$$

$$\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\ddot{\theta} + \alpha({L_1}^2 + {L_2}^2)\dot{\theta} + k({L_1}^2 + {L_2}^2)\theta = 0$$

- Déduction de ω_0 et δ :

On peut écrire l'équation différentielle comme :

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\alpha({L_1}^2 + {L_2}^2)}{\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2}}_{2\delta}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{k({L_1}^2 + {L_2}^2)}{\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2}}_{{\omega_0}^2}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\alpha\left(L_1{}^2+L_2{}^2\right)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}}_{2\delta}\dot{\theta}+\underbrace{\frac{k\left(L_1{}^2+L_2{}^2\right)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}}_{\omega_0{}^2}\theta=0$$

$$2\delta=\frac{\alpha\left(L_1{}^2+L_2{}^2\right)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}\Rightarrow\delta=\frac{\alpha\left(L_1{}^2+L_2{}^2\right)}{2\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}$$

$$\omega_0{}^2=\frac{k\left(L_1{}^2+L_2{}^2\right)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{k\left(L_1{}^2+L_2{}^2\right)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}}$$

2. Ecriture de l'équation du mouvement dans le cas $\delta<\omega_0$:

La solution est de la forme : $\theta(t)=Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi)$

Avec : $\omega_a=\sqrt{\omega_0{}^2-\delta^2}=\sqrt{\frac{k(L_1{}^2+L_2{}^2)}{(\frac{M}{3}+m)L^2}-(\frac{\alpha(L_1{}^2+L_2{}^2)}{2(\frac{M}{3}+m)L^2})^2}$

Solution 3 :

▪Le Lagrangien **:**

Le système a un seul degré de liberté représenté par $\boldsymbol{\theta}$

✓L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

✓Pour l'énergie potentielle on a:

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2 \qquad avec \quad x=\frac{l}{2}\sin\theta\cong\frac{l}{2}\theta$$

✓Le Lagrangien s'écrit :

$$L(\theta,\dot{\theta})=E_c-E_p=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k(\frac{l}{2}\theta)^2$$

▪L'équation différentielle est :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}})-\frac{\partial L}{\partial\theta}=\sum\overline{M}_{ext} \quad\Rightarrow\quad \ddot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}+\frac{k\frac{l^2}{4}}{ml^2}\theta=0$$

D'où :

$$\ddot{\theta}+2\xi\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

$$2\xi=\frac{\alpha}{m},\omega_0^2=\frac{k\frac{l^2}{4}}{ml^2}$$

▪Pour un faible amortissement la solution s'écrit sous la forme :

$$\theta(t)=Ae^{-\xi t}\cos(\omega t+\varphi)$$

Avec les conditions initiales, on a

$$avec \quad \begin{aligned} &t=0,\theta=0,\dot{\theta}=\dot{\theta}_0\\ &\varphi=-\frac{\pi}{2},A=\frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\end{aligned}$$

Alors, la solution générale s'écrit :

$$\theta(t)=\frac{\dot{\theta}_0}{\omega}e^{-\xi t}\sin\omega t$$

▪Le Lagrangien du système **:**

Le système est à un seul degré de liberté représenté par $\boldsymbol{\theta(t)}$

✓L'énergie cinétique s'exprime :

$$E_c = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

✓Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = -mgl\cos\theta$$

✓D'où le Lagrangien s'écrit comme suit :

$$L(\theta, \dot{\theta}) = E_c - E_p = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

▪L'équation différentielle s'écrit comme suit:

$$\ddot{\theta} + 2\xi\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Avec

$$2\xi = \frac{\alpha}{m}, \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

▪La solution générale est de la forme :

$$\theta(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi)$$

▪La valeur maximale de α_{max} :

$$\lambda^2 - \omega_0^2 \prec 0 \Rightarrow \alpha \prec 2m\sqrt{\frac{g}{l}} = \alpha_{max} \approx 8.94 N.s/m$$

▪Le temps τ :

$$Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{4}e^{-\lambda t} \Rightarrow \tau = \frac{\ln 4}{\lambda} \approx 0.28s$$

Solution 5 :

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie (FST)
Département d'électrotechnique

1- L'énergie cinétique E_c, potentielle E_p et de dissipation E_D:

L'énergie cinétique E_c:

$$E_c = \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}Kx^2 \text{ , avec } x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_P = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

2- L'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = 0 \quad ou \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = 0$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial\theta} = kR^2\theta$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M}\dot{\theta} + \frac{2K}{M}\theta = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{2\alpha}{M} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{M} = \frac{1}{1} = 1\ s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{1}} = 10\ rad.s^{-1}$$

3- la solution dans le régime des faibles amortissements.

$$\theta(t) = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \sqrt{100 - 1} = \sqrt{99} = 9.949\ rad.s^{-1}$$

4- le coefficient de qualité du système mécanique Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{10}{2 \times 1} = 5 \Rightarrow \quad Q = 5$$

5- Le décrément logarithmique D :

$$D = \frac{1}{n}\ln\frac{A(t)}{A(t+nT)} \Rightarrow D = \frac{1}{15}\ln\frac{100}{100-30} = 0.0237$$

$$D = 0.0237$$

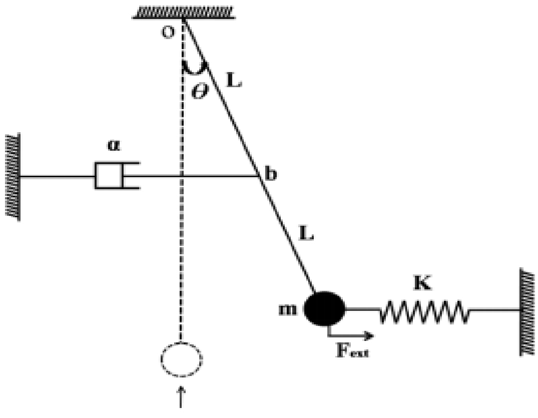
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie (FST)
Département d'électrotechnique

Année académique : 2024/2023

Niveau L2: 2^{ieme} année/ELM-ELT
Module : Ondes et vibrations
Série N°04

Exercice 1 :

On considère le système mécanique représenté à la figure ci-contre. La tige de masse négligeable et de longueur 2L peut tourner autour de l'articulation O dans le plan de la figure. Le milieu de la tige (point b) est relié à un bâti par un amortisseur de coefficient de frottement α et son extrémité libre porte une masse m à laquelle est attaché un ressort de raideur K. On applique une force extérieure $\vec{F}_{ext} = F_0\cos(\Omega t)$ sur la masse ponctuelle m.



1- montrer que l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

2- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

3- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

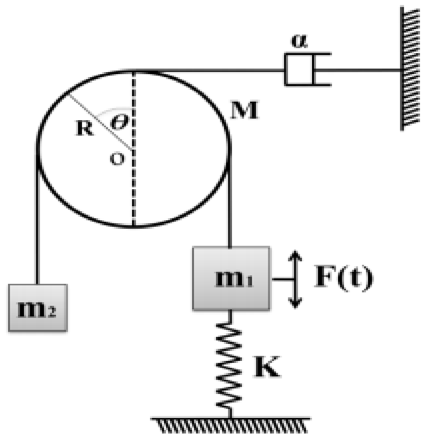
4- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

5- Si on enlève l'amortisseur , que ce passe-t-il ?

Exercice 2:

Soit un disque de masse négligeable enroulé par un fil inextensible et non glissant, comme le montre la figure ci-contre , On admet que les frottements existent, la masse m_1 effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale : $F(t) = F_0\cos\Omega t$.

On donne le moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.



1- Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

2- Donner sa solution en régime permanent.

3- Quelle est la fréquence de résonance pour que le module de l'amplitude soit maximum.

4- Donner les pulsations de coupure $\Omega_{C_1}, \Omega_{C_2}$ et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

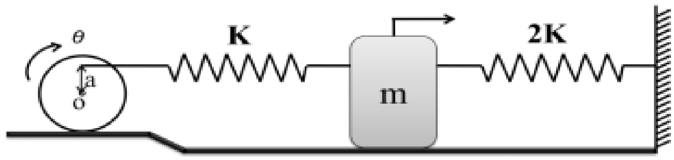
5- Calculer la pulsation de résonance Ω_R , la bande passante B et le facteur de qualité Q si : $m_1 = 2kg, m_2 = 1kg, K = 10\ N/m$ et $\alpha = 0.1\ N.s/m$

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie (FST)
'électrotechnique

Année académique : 2022/2023

Niveau L2: 2ieme année/ELM-ELT
Module : Ondes et vibrations
Série N°05

Exercice 1:



Un système mécanique est composé de deux oscillateurs (M, R) et $(m, 2K)$ couplés par un ressort de constante de raideur K se trouvant a une distance a du centre o du disque (voire la figure).

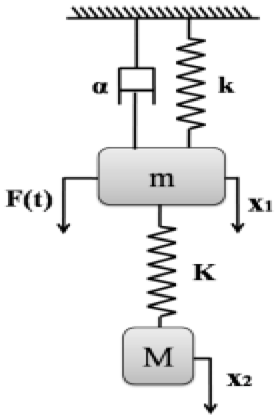
En considéron les oscillations des faibles amplitudes.

1- Donner la ou les équations différentilles du mouvement.

2- Donner la ou les solutions des équations différentilles du mouvement.

On donne $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2 = m$, $a = 1$

Exercice 2:



Considérons le système à deux degrés de liberté de la figure ci-contre.

Soient x_1 et x_2 les déplacements conséquents dynamique de m et M par rapport à leurs positions d'équilibres.

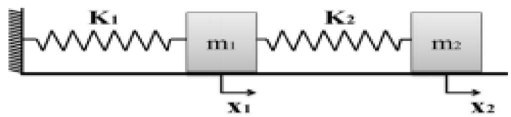
1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_C, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système.

3- Trouver les solutions du régime permanant sachant que $F(t) = KA\cos\Omega t$

4- Si $\alpha = 0$, pour quelle valeur de Ω le système entre en résonance. Donner dans ce cas la condition pour que la masse m excitée reste immobile ?

Exercice 3:



Soit le système mécanique représenté sur la figure ci-contre. Les deux masses font des oscillations sur l'axe horizontal.

1- Quel est le nombre de degré de liberté ? et donner le type du couplage ?

2- Calculer l'énergie cinétique, potentielle du système.

3- Pour $K_1 = K_2 = K$ et $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, et en utilisant la formule de Lagrange établir les équations différentielles du mouvement, et écrire les deux équations sous forme d'une matrice $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4- Déduire les pulsations propres du système.

1- L'équation différentielle du mouvement :

- L'énergie cinétique E_c:

$$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2} J_{m/o} \dot{\theta}^2, \; J_m = m(2L)^2 = 4mL^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}(4mL^2)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx_K^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow \sin\theta \approx \theta, \; \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$x_K = 2L\sin\theta \Rightarrow x_K = 2L\,\theta$$

$$h = 2L(1 - \cos\theta) \Rightarrow h = 2L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = L\theta^2$$

$$E_p = mgL\theta^2 + \frac{1}{2}K4L^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(2mgL + 4KL^2)\,\theta^2$$

- La fonction de dissipation E_D:

$$x_\alpha = L\sin\theta \Rightarrow x_\alpha = L\,\theta$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_\alpha^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$$

La Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}(4mL^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\,2mgL + 4KL^2)\,\theta^2$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F_{ext})$$

Ou :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = 4mL^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 4mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial\theta} = (\,2mgL + 4KL^2)\theta$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = 2LF_0\cos(\Omega t)$$

$$4mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (\,2mgL + 4KL^2)\theta = 2LF_0\cos(\Omega t)$$

Donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{2L} + \frac{K}{m}\right)\theta = \frac{F_0}{2mL}\cos(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{4m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{8m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{2L} + \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2L} + \frac{K}{m}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{2mL}$$

2- la solution permanente de l'équation du mouvement :

$$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t - \varphi)$$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{2mL}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{2mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}$

$$\theta(t) = \frac{F_0}{2mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}\sin\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right)$$

3- La condition de résonnance :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

-La pulsation de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2] = 0 \Rightarrow$$

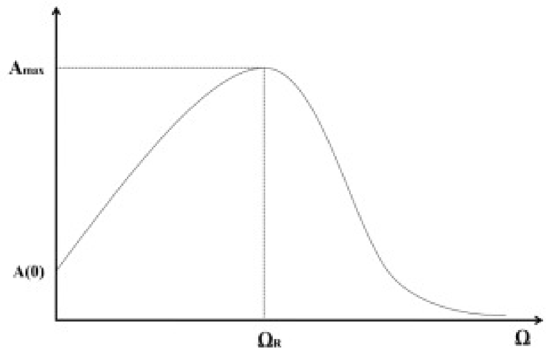
$$-4\Omega[(\omega_0^2-\Omega^2-2\delta^2] = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

4- la variation de l'amplitude A en fonction de Ω

- $A(\Omega=0) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{2mL\omega_0^2}$
- $A_{max}(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} = \frac{F_0}{4mL\delta\omega}$

Avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ c'est la pseudo-pulsation

- $\lim_{\Omega\to\infty} A(\Omega) = 0$



5- Si on enlève l'amortisseur :

$\delta = 0 \Rightarrow \Omega_R = \omega_0$ et $A(\Omega_R) = A(\omega_0) \Rightarrow \lim_{\Omega\to\omega_0}\left[\frac{A_0}{\omega_0^2-\Omega^2}\right] = \infty$

L'amplitude t'envers l'infini , signifier le système se casse.

1- l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ:

- L'énergie cinétique E_c :

$$E_c = E_{cm_1} + E_{cm_2}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2$$

$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(m_1)} + E_{P(m_2)}$$

$$E_P = \frac{1}{2}KX^2 + m_1gx - m_2gx$$

$$E_P = \frac{1}{2}KR^2\theta^2 + m_1gR\theta - m_2gR\theta$$

La condition d'équilibre élimine tous les termes linéaires

$$E_P = \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

- la fonction de dissipation E_D :

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha\left(\dot{X}_\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{X}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + F_{ext}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = F_{ext}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m_1 + m_2)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -KR^2\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$F_{ext} = F_0\cos\Omega t$$

$$(m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + KR^2\theta = F_0\cos\Omega t$$

donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(m_1 + m_2)}\dot{\theta} + \frac{K}{(m_1 + m_2)}\theta = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)R^2}\cos(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0 \sin(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{(m_1 + m_2)}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)R^2}$$

3- La solution permanente de l'équation du mouvement :

$$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)cos(\Omega t + \varphi)$$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = -Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}$

$$\theta(t) = \frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} \sin\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right)$$

3- La fréquence de résonance pour que le module de l'amplitude soit maximum :

L'amplitude $A(\Omega)$ est maximale si :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

La pulsation ou la fréquence de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2] = 0 \Rightarrow$$

$$-4\Omega[(\omega_0^2-\Omega^2-2\delta^2] = 0 \ \Rightarrow\ \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

4- Les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

Pour un amortissement faible $\delta \ll \omega_0$:

$\Omega_{C_1} \approx \omega_0 - \delta$ et $\Omega_{C_2} \approx \omega_0 + \delta$, et $B = \Omega_{C_2} - \Omega_{C_1} = 2\,\delta$.

7- La pulsation de résonance Ω_R , la bande passante B et le facteur de qualité Q :

La pulsation de résonance Ω_R :

- $\delta = \frac{\alpha}{2(m_1+m_2)} = \frac{0.3}{2\times(1+0,5)} = 0,1\,s^{-1}$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{(m_1+m_2)}} = \sqrt{\frac{15}{1+0.5}} = 6\ rad.s^{-1}$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} = \sqrt{6^2 - 2\times(0,1)^2} = 5.99\,rad.s^{-1}$$

La bande passante B :

- $\Omega_{C_1} \approx \omega_0 - \delta \approx 5,99 - 0,1 \approx 5,89$
- $\Omega_{C_2} \approx \omega_0 + \delta \approx 5,99 + 0,1 \approx 6,09$

$$B = \Omega_{C_2} - \Omega_{C_1} = 6,09 - 5.89 = 0,2$$

Le facteur de qualité est :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{6}{2\times 0,1} = 30 \Rightarrow \quad Q = 30$$

7- Pour $\delta = 0 \Rightarrow \Omega_R = \omega_0 \ \Rightarrow A_{max}(\Omega_R) \to \infty \Rightarrow$ le système se casse.

Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie (FST)
’électrotechnique